

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử
- b) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$. Tính giá trị của biểu thức $A = |a - b| + |b - c| + |c - a|$

Câu 2. (2,5 điểm)

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$
- b) Giải phương trình: $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

Câu 3. (2,5 điểm)

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2$
- b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:
- $$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

- a) Chứng minh : $EA \cdot EB = ED \cdot EC$
- b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM \cdot BD + CM \cdot CA$ có giá trị không đổi
- c) Kẻ $DH \perp BC (H \in BC)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH. Chứng minh $CQ \perp PD$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= a^2(b-c) + b^2(c-a) - c^2(b-c+c-a) \\&= (b-c)(a^2-c^2) + (c-a)(b^2-c^2) = (b-c)(a-c)(a+c) + (c-a)(b-c)(b+c) \\&= (b-c)(a-c)(a+c-b-c) = (b-c)(a-c)(a-b)\end{aligned}$$

b) Đặt $a-b=x; b-c=y; c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$

Ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x+y) = 210 \Leftrightarrow xyz = 70$$

Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz = 70 = (-2).(-5).7$ nên

$$x, y, z \in \{-2; -5; 7\} \Rightarrow A = |a-b| + |b-c| + |c-a| = 14$$

Câu 2.

a) Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3-xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$

Lại có: $(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 3-xy \geq -2xy \Leftrightarrow xy \geq -3$

Suy ra $-3 \leq xy \leq 1$. Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

Lần lượt thử ta được $(x, y) \in \{(-2; 1); (1; -2); (2; -1); (-1; 2); (1; 1)\}$ là nghiệm của phương trình

b) Đặt $6x+7=t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8 = 0 (VN) \\ t^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Câu 3.

a) Ta có:

$$P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2 = x^2 - 4024x + 4048144 + x^2 + 4026x + 4052169$$

$$= 2x^2 + 2x + 8100313 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8100312,5 \geq 8100312,5 \quad \forall x$$

Vậy $\text{Min} P = 8100312,5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) Đặt $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

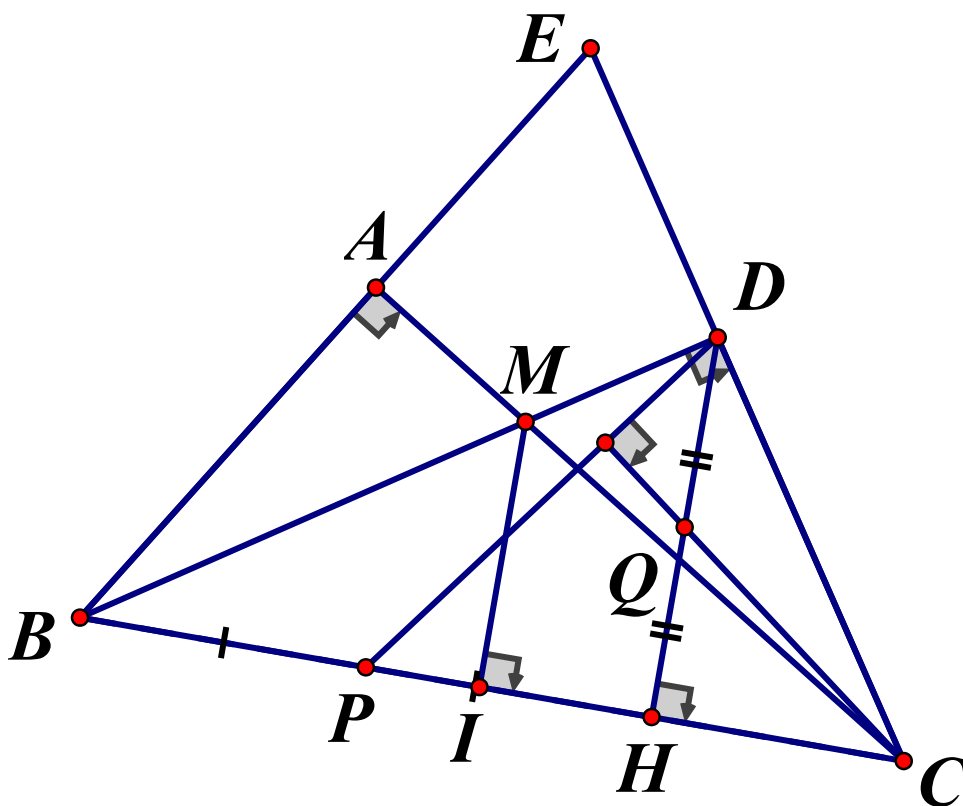
Ta có: $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1\right)$

Bởi vậy

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle EBD \sim \triangle ECA (g - g) \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA \cdot EB = ED \cdot EC$

b) Kẻ $MI \perp BC (I \in BC)$. Ta có: $\triangle BIM \sim \triangle BDC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM \cdot BD = BI \cdot BC \quad (1)$$

$$\triangle ACB \sim \triangle ICM (g - g) \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = CI \cdot BC \quad (2)$$

Tương tự:

Từ (1) và (2) suy ra $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BI \cdot BC + CI \cdot BC = BC \cdot (BI + CI) = BC^2$
(Không đổi)

c) $\triangle BHD \sim \triangle DHC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2BP}{2DQ} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{DQ} = \frac{BD}{DC}$$

Chứng minh được: $\triangle DPB \sim \triangle CQD (g.g) \Rightarrow \angle BDP = \angle CQD$

Mà $\angle BDP + \angle PDC = 90^\circ \Rightarrow \angle BCQ + \angle PDC = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$