

DẠNG 8**Tính tích phân bằng phương pháp vi phân**

Câu 1: Nếu $\int_3^5 2f(x)dx = 3$ thì $\int_1^2 f(2x+1)dx$

A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. 6.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$.

A. $I = \frac{7}{45}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.

D. $I = \frac{15}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = x + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{6e+13}{6}$.

B. $\frac{6e+25}{6}$.

C. $\frac{6e+25}{3}$.

D. $\frac{6e+19}{6}$.

Câu 4: Tích phân $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = e^{-x}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{2e} + e - 2$.

B. $\frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{e} + e - \frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{2e} + e - 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1, f'(x) - x.f(x) = x.e^{x^2}, \forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})dx$ bằng

A. $e^2 - e$.

B. $4\sqrt{e} - 2e$.

C. 1.

D. e .

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = -e$.

B. $f(1) = \frac{1}{e}$.

C. $f(1) = -\frac{2}{e}$.

D. $f(1) = \frac{2}{e}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0; 2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f'(1) \neq \frac{1}{2}, f(x) \neq 0$ với $\forall x \neq 1, (x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x)$ với $\forall x \in [0; 2]$. Giá trị của

tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 9: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b \ln \frac{\pi}{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức $T = 8a + b + c$?

A. 8. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $f(x) \neq \frac{1}{x}$ và $x^2 f^2(x) - (2x+1)f(x) = xf'(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$. B. $I = -\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $I = -\ln 2 + \frac{1}{2}$. D. $I = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^{2020x}$ và $f(0) = \frac{1}{2021}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{e^{2021}}{2020}$. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2020}}{2020}$. C. $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2020}}{2021}$. D. $\frac{e^{2020}}{2021}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn: $x^2 \cdot f'(x) + f(x) = 2x^3 + x^2, \forall x > 0$. Biết rằng $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $I = e$. B. $I = e + \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{1}{4}$. D. $I = \frac{1}{4} - e$.

Câu 13: Cho hàm số $F(x) = f(x)\sin x + 2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot \cos x$ với $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x)]^2 (\cos x - \sin x) dx$

A. $\sqrt{e} - 1$. B. $2e + 1$. C. $\frac{e^2 - 2}{4}$. D. $\frac{3e - 4}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$, $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [1; 3]$, đồng thời $f'(x)(1 + f(x))^2 = \left[(f(x))^2 (x-1) \right]^2$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_1^3 f(x) dx = a \ln 3 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính tổng $S = a + b^2$

A. $S = 4$. B. $S = 0$. C. $S = 2$. D. $S = -1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Nếu $\int_3^5 2f(x)dx = 3$ thì $\int_1^2 f(2x+1)dx$

A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. 6.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(2x+1)d(2x+1) = \frac{1}{2} \int_3^5 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$.

A. $I = \frac{7}{45}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.

D. $I = \frac{15}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} = \frac{1}{4 \cos^4 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} (2^4 - 1) = \frac{15}{4}.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = x + e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{6e+13}{6}$.

B. $\frac{6e+25}{6}$.

C. $\frac{6e+25}{3}$.

D. $\frac{6e+19}{6}$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \int f'(x)dx = \int (e^x + x)dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$\text{Nếu: } f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C \text{ và } f(0) = 4 \text{ thì: } 1 + C = 4 \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 + 3.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2}x^2 + 3 \right) dx = \left(e^x + \frac{1}{6}x^3 + 3x \right) \Big|_0^1 = e + \frac{13}{6} = \frac{6e+13}{6}.$$

Câu 4: Tích phân $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$$

- Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = e^{-x}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{1}{2e} + e - 2$. B. $\frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{e} + e - \frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2e} + e - 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) - f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = e^{-2x}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế ta có } \int (e^{-x} f(x))' dx = \int e^{-2x} dx \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} + C.$$

$$\text{Với } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow e^0 f(0) = \frac{-1}{2} e^0 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 1 \text{ nên } f(x) = \frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{e^{-x}}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{e^{-x}} \right) dx = \left(\frac{1}{2} e^{-x} + e^x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2e} + e \right) - \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}.$$

- Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1, f'(x) - x.f(x) = x.e^{x^2}, \forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1}) dx$ bằng
- A. $e^2 - e$. B. $4\sqrt{e} - 2e$. C. 1. D. e .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) - xf(x) = xe^{x^2}, \forall x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x^2/2} - f(x)xe^{-x^2/2} = xe^{x^2/2}, \forall x$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^{-x^2/2})' = xe^{x^2/2}, \forall x \Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2} = \int xe^{x^2/2} dx, \forall x$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2} = e^{x^2/2} + C, \forall x \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} + Ce^{x^2/2}, \forall x$$

$$\text{Vì } f(0) = 1 \text{ nên ta có } C = 0. \text{ Do đó, } f(x) = e^{x^2}, \forall x.$$

$$\text{Vì thế } \int_0^1 xf(\sqrt{x+1}) dx = \int_0^1 xd(e^{x+1}) = xe^{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1} dx = e.$$

- Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.
- A. $f(1) = -e$. B. $f(1) = \frac{1}{e}$. C. $f(1) = -\frac{2}{e}$. D. $f(1) = \frac{2}{e}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) + x.f(x) = 2x.e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2} . f'(x) + x.e^{\frac{1}{2}x^2} f(x) = 2x.e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ (ta nhân hai vế cho } e^{\frac{1}{2}x^2} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{2}x^2} . f(x) \right)' = 2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}x^2} f(x) = \int 2x.e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -2 \int e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} . d\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C.$$

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow e^0 \cdot f(0) = -2 \cdot e^0 + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = -2e^{-x^2} \Rightarrow f(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0; 2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$f'(1) \neq \frac{1}{2}, f(x) \neq 0 \text{ với } \forall x \neq 1, (x-1) \cdot f'(x) + f(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \text{ với } \forall x \in [0; 2]. \text{ Giá trị của}$$

tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $(x-1) \cdot f'(x) + f(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ với $\forall x \in [0; 2]$, cho $x = 1$, ta có

$$f(1) = 2f(1) \cdot f'(1) \Leftrightarrow f(1) \cdot [1 - 2f'(1)] = 0 \Rightarrow f(1) = 0.$$

Mặt khác, $\forall x \in [0; 2]$, ta có

$$(x-1) \cdot f'(x) + f(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow [(x-1) \cdot f(x)]' = [f^2(x)]' \Rightarrow (x-1) \cdot f(x) = f^2(x) + C$$

Thay $x = 1$, ta suy ra $f^2(1) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

$$\text{Do đó, ta được } (x-1) \cdot f(x) = f^2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = x-1. \end{cases}$$

Vì $f(x) \neq 0, \forall x \neq 1$ nên ta suy ra được $f(x) = x-1$.

$$\text{Khi đó, } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 9: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b \ln \frac{\pi}{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức

$$T = 8a + b + c ?$$

A. 8.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + x \cos x - x \cos x + 1 - \cos^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(x + \cos x) - \cos x(x + \cos x) + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \cos x + \frac{(x + \cos x)'}{x + \cos x} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \sin x + \ln |x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1 + \ln \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} + \ln \frac{\pi}{2} + (-1). \end{aligned}$$

Do đó $a = \frac{1}{8}; b = 1; c = -1$. Suy ra $T = 8a + b + c = 8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + 1 + (-1) = 1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $f(x) \neq \frac{1}{x}$ và $x^2 f^2(x) - (2x+1)f(x) = xf'(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

- A. $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$. B. $I = -\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $I = -\ln 2 + \frac{1}{2}$. D. $I = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2 f^2(x) - (2x+1)f(x) = xf'(x) - 1$

$$\Leftrightarrow [xf(x)]^2 - 2xf(x) + 1 = f(x) + xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow [xf(x) - 1]^2 = f(x) + xf'(x) = [xf(x) - 1]'$$

$$\Rightarrow \frac{[xf(x) - 1]'}{[xf(x) - 1]^2} = 1 \Rightarrow \int dx = \int \frac{d[xf(x) - 1]}{[xf(x) - 1]^2} = -\frac{1}{xf(x) - 1} + C$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1 - xf(x)} + C \text{ với } f(1) = 0, f(x) \neq \frac{1}{x}, \text{ suy ra } C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^{2020x}$ và $f(0) = \frac{1}{2021}$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{e^{2021}}{2020}$. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2020}}{2020}$. C. $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2020}}{2021}$. D. $\frac{e^{2020}}{2021}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^{2020x} \Leftrightarrow (x+2)f(x)e^x + (x+1)f'(x)e^x = e^{2021x}$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)e^x]' = e^{2021x} \Leftrightarrow (x+1)f(x)e^x = \int e^{2021x} dx = \frac{e^{2021x}}{2021} + C.$$

$$\text{Với } x=0 \text{ ta có } f(0) = \frac{1}{2021} + C \text{ mà } f(0) = \frac{1}{2021} \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Khi đó } (x+1)f(x)e^x = \frac{e^{2021x}}{2021} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2020}}{2021}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn: $x^2 \cdot f'(x) + f(x) = 2x^3 + x^2, \forall x > 0$. Biết rằng $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

- A. $I = e$. B. $I = e + \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{1}{4}$. D. $I = \frac{1}{4} - e$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét: } x^2 \cdot f'(x) + f(x) = 2x^3 + x^2 \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{x}} \cdot f'(x) + \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x}} \cdot f(x) = (2x+1) \cdot e^{\frac{-1}{x}}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{-1}{x}} \cdot f(x) \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x+1) \cdot e^{\frac{-1}{x}} dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot e^x dx = I$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx, v = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \end{cases}, \text{ khi đó: } I = \left(\frac{2}{e} - \frac{3}{4e^2} \right) + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \cdot e^x dx - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot e^x dx.$$

$$\text{Đặt } I' = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot e^x dx, \text{ đặt } \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx, v = \frac{-1}{x} \end{cases}, \text{ khi đó: } I' = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \cdot e^x dx.$$

$$\text{Suy ra: } I = \frac{1}{e} - \frac{1}{4e^2} = \left(e^{\frac{-1}{x}} \cdot f(x) \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{-1}{e^2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - e$$

Câu 13: Cho hàm số $F(x) = f(x)\sin x + 2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot \cos x$ với

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } f(0) = 1. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x)]^2 (\cos x - \sin x) dx$$

A. $\sqrt{e} - 1.$ B. $2e + 1.$ C. $\frac{e^2 - 2}{4}.$ D. $\frac{3e - 4}{3}.$

Lời giải**Chọn A**

Do hàm số $F(x) = f(x)\sin x + 2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot \cos x$ nên ta có

$$F'(x) = [f(x)\sin x + 2020]' = f'(x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sin x + f(x)\cos x = f'(x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(\cos x - \sin x) = f(x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln(|f(x)|) &= \int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x + \sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{(\cos x - \sin x)'}{\cos x - \sin x} \right) dx = \frac{1}{2} (x - \ln(|\cos x - \sin x|)) + C \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \text{ nên } \ln(|f(x)|) = \frac{1}{2} (x - \ln(\cos x - \sin x)) + C.$$

Do $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

$$\text{Vậy } \ln(|f(x)|) = \frac{1}{2} [x - \ln(\cos x - \sin x)] \Leftrightarrow \ln[f(x)]^2 = x - \ln(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^2 (\cos x - \sin x) = e^x.$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x)]^2 (\cos x - \sin x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx = \sqrt{e} - 1.$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2 = [(f(x))^2(x-1)]^2$ và $f(1) = -1$. Biết rằng

$$\int_1^3 f(x) dx = a \ln 3 + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Tính tổng $S = a + b^2$

A. $S = 4$.

B. $S = 0$.

C. $S = 2$.

D. $S = -1$.

Lời giải

Chọn D

Xét trên đoạn $[1;3]$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x)(1+f(x))^2 &= [(f(x))^2(x-1)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)} = (x-1)^2 \\ \Rightarrow \int \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)} dx &= \int (x-1)^2 dx \Leftrightarrow \int \left[\frac{1}{f^4(x)} + \frac{2}{f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} \right] df(x) = \frac{(x-1)^3}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)} - \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{f(x)} &= \frac{(x-1)^3}{3} + C \end{aligned}$$

Theo giả thiết: $f(1) = -1$ nên ta có: $-\frac{1}{3f^3(1)} - \frac{1}{f^2(1)} - \frac{1}{f(1)} = \frac{(1-1)^3}{3} + C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{3f^3(x)} - \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{f(x)} &= \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)} - \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{f(x)} \right]^3 - \left[-\frac{1}{f(x)} \right]^2 &+ \left[-\frac{1}{f(x)} \right] = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t, t \in \mathbb{R}$ có $g'(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $(**) \Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$

$$-\int_1^3 \frac{1}{x} dx = -\ln|x|_1^3 = -\ln 3 \Rightarrow a = -1, b = 0 \Rightarrow S = -1.$$

