

BÀI 23: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

HĐ1. Đối với cánh cửa như trong Hình 7.10, khi đóng – mở cánh cửa, ta coi mép dưới BC của cánh cửa luôn sát sàn nhà (khe hở không đáng kể).

a) Từ quan sát trên, hãy giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng đi qua B trên sàn nhà.

b) Giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng trên sàn nhà.



Hình 7.10

Lời giải

a) Vì mép dưới BC của cánh cửa luôn sát sàn nhà nên khi cánh cửa đóng, điểm A trên cánh cửa sẽ nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường sát sàn nhà. Khi mở cánh cửa, điểm A sẽ di chuyển theo đường thẳng song song với đường sát sàn nhà và vẫn giữ nguyên góc vuông với các đường thẳng đi qua B trên sàn nhà. Do đó, đường thẳng AB luôn vuông góc với mọi đường thẳng đi qua B trên sàn nhà.

b) Theo tính chất của góc phẳng, khi hai đường thẳng AB và BC vuông góc với một đường thẳng CD chung, thì AB cũng vuông góc với AB . Vì vậy, khi đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng đi qua điểm B trên sàn nhà, thì đường thẳng AB cũng vuông góc với mọi đường thẳng khác trên sàn nhà.

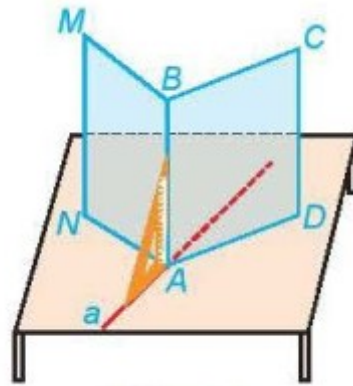
Đường thẳng Δ được gọi là **vuông góc** với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

Chú ý. Khi Δ vuông góc với (P) , ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

HĐ2. Gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật sao cho nếp gấp chia tấm bìa thành hai hình chữ nhật, sau đó đặt nó lên mặt bàn như Hình 7.11.

a) Bằng cách trên, ta tạo được đường thẳng AB vuông góc với hai đường thẳng nào thuộc mặt bàn?

b) Trên mặt bàn, qua điểm A kẻ một đường thẳng a tùy ý. Dùng ê ke, hãy kiểm tra trên mô hình xem AB có vuông góc với a hay không.



Hình 7.11

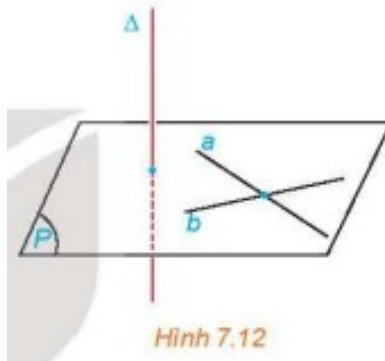
Lời giải

a) Sau khi gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật, ta sẽ có hai hình chữ nhật nằm chồng lên nhau, với đường chéo của chúng chính là đường thẳng AB . Do đó, đường thẳng AB sẽ vuông góc với đường chéo của hai hình chữ nhật đó.

b) Để kiểm tra xem đường thẳng AB có vuông góc với đường thẳng a hay không, ta có thể sử dụng một ê-ke. Đặt một đầu ê-ke lên điểm A và đưa đầu kia đi dọc theo đường thẳng a . Nếu đầu ê-ke không thay đổi hướng khi di chuyển qua đường thẳng AB , tức là đường thẳng vuông góc với đường thẳng a . Nếu đầu ê-ke thay đổi hướng khi di chuyển qua đường thẳng AB , tức là hai đường không vuông góc nhau.

Người ta chứng minh được rằng:

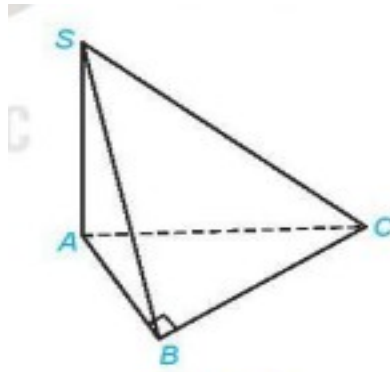
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 7.12

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC . Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Lời giải. (H.7.13)



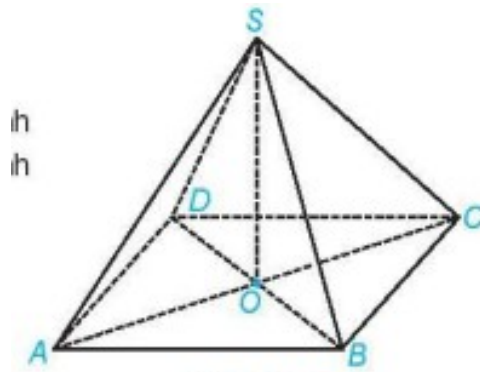
Hình 7.13

Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$.
Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.

Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.

Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $SA = SC$ và $SB = SD$ (H.7.14). Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Hình 7.14

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$ và $OB = OD$.

Từ $SA = SC$ và $SB = SD$, ta có $\triangle SAB = \triangle SCD$. Suy ra $\angle SBA = \angle SCD$.

Tương tự, từ $SA = SC$ và $SB = SD$, ta có $\triangle SAC = \triangle SBD$. Suy ra $\angle SAC = \angle SBD$.

Do đó, $\angle BSC = \angle SBD + \angle SCD = \angle SAC + \angle SBA = 180^\circ - \angle AOB$.

Mà $\angle BOC = 180^\circ$, nên $\angle BOS = \angle COS = \frac{\angle BOS}{2}$.

Từ đó suy ra $\angle BOS + \angle BSC = 90^\circ$ tức $SO \perp (ABCD)$.

Vận dụng. Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh để thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó (H.7.15). Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà.

Lời giải



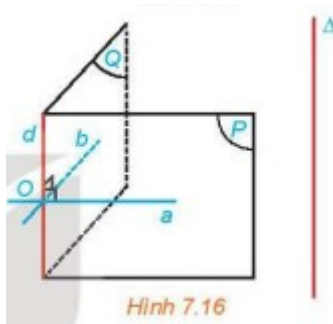
Hình 7.15

Điều này được giải thích bởi tính chất của đường thẳng và góc vuông. Một đường thẳng là đường đi qua hai điểm bất kỳ trên không gian và tạo thành một góc 180 độ. Trong khi đó, một góc vuông là một góc có độ lớn là 90 độ. Vì vậy, nếu ta đặt cột treo lên sao cho nó vuông góc với đường thẳng trên sàn nhà, thì chắc chắn cột treo sẽ đứng vuông góc với sàn nhà.

Bằng cách này, ta có thể đảm bảo rằng cột treo sẽ được đặt đúng vị trí và đứng thẳng đứng góc với sàn nhà, giúp cho quá trình sử dụng cột treo quần áo được dễ dàng hơn và tiện lợi hơn

2. TÍNH CHẤT

HĐ3. Cho điểm O và đường thẳng Δ không đi qua O . Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với Δ . Xét hai mặt phẳng phân biệt tùy ý (P) và (Q) cùng chứa d . Trong các mặt phẳng $(P), (Q)$ tương ứng kẻ các đường thẳng a, b cùng đi qua O và vuông góc với d (H.7.16). Giải thích vì sao $mp(a, b)$ đi qua O và vuông góc với Δ .



Hình 7.16

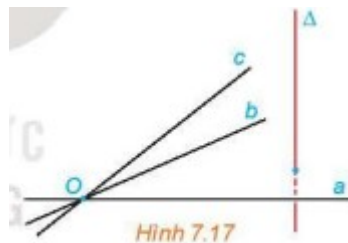
Lời giải

Ta biết rằng nếu hai đường thẳng đứng trên hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d cùng vuông góc với d thì chúng sẽ song song với nhau (do cùng vuông góc với đường thẳng d). Do đó, đường thẳng $mp(a, b)$ cũng sẽ là một đường song song với đường thẳng d .

Vì đường thẳng d là đường song song với Δ , nên đường thẳng $mp(a,b)$ cũng sẽ là đường song song với Δ . Vì vậy, $mp(a,b)$ sẽ là đường thẳng đi qua điểm O và song song với đường thẳng Δ , tức là $mp(a,b)$ vuông góc với Δ .

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

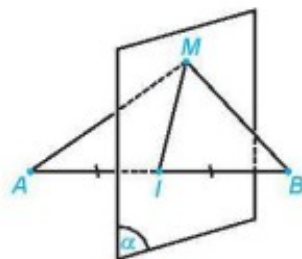
Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ (H.7.17).



Hình 7.17

Ví dụ 2. Chứng minh rằng điểm M cách đều hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi M thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .

Lời giải. (H.7.18)



Hình 7.18

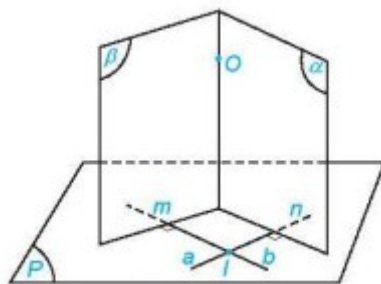
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .

Ta có $MA = MB$ khi và chỉ khi M trùng I hoặc tam giác MAB cân tại M . Mặt khác, $\triangle MAB$ cân tại M khi và chỉ khi $MI \perp AB$, tức là M thuộc mặt phẳng (α) . Do đó, $MA = MB$ khi và chỉ khi M thuộc (α) .

Chú ý. Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là **mặt phẳng trung trực** của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .

HĐ4. Cho mặt phẳng (P) và điểm O . Trong mặt phẳng (P) , lấy hai đường thẳng cắt nhau a, b tùy ý. Gọi $(\alpha), (\beta)$ là các mặt phẳng qua O và tương ứng vuông góc với a, b (H.7.19).

- a) Giải thích vì sao hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo một đường thẳng đi qua O .
- b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa Δ và (P) .



Hình 7.19

Lời giải

a) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng a và b trong mặt phẳng (P) . Theo định nghĩa, mặt phẳng (α) qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a sẽ đi qua giao điểm Q của hai đường thẳng a và b . Tương tự, mặt phẳng (β) qua điểm O và vuông góc với đường thẳng b cũng sẽ đi qua giao điểm Q .

Như vậy, ta có hai mặt phẳng (α) và (β) đều đi qua điểm Q . Vì hai mặt phẳng này đều chứa đường thẳng đi qua điểm O , nên chúng sẽ cắt nhau theo một đường thẳng đi qua điểm Q .

b) Mối quan hệ giữa Δ và (P) là Δ là mặt phẳng đi qua giao điểm Q của hai đường thẳng a và b trong mặt phẳng (P) , và vuông góc với cả hai đường thẳng a và b . Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Luyện tập 2. Cho ba điểm phân biệt A, B, C sao cho các đường thẳng AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

AB và AC đều vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có thể kết luận rằng AB và AC đều nằm trên một đường thẳng vuông góc với (P) .

Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (P) . Ta có thể chứng minh rằng AD cũng vuông góc với (P) bằng cách sử dụng tính chất của giao điểm của hai đường thẳng.

Vì AB, AC và AD đều đi qua một điểm A , nên chúng phải nằm trên cùng một đường thẳng. Do đó, A, B và C thẳng hàng.

Vậy ta đã chứng minh được rằng nếu ba điểm A, B, C sao cho AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P) thì ba điểm đó phải thẳng hàng.

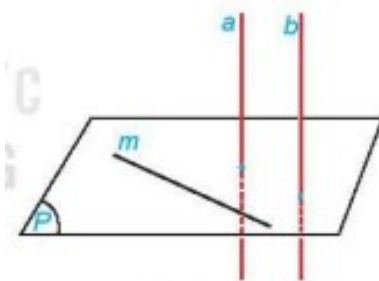
Ví dụ 3. Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P) . Giải thích vì sao có duy nhất điểm H thuộc (P) sao cho đường thẳng AH vuông góc với (P) .

Lời giải

Gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) . Lấy điểm H thuộc (P) . Khi đó, đường thẳng AH vuông góc với (P) khi và chỉ khi AH trùng với a , tức là H là giao điểm của a và (P) . Vậy có duy nhất điểm H thuộc (P) để AH vuông góc với (P) , đó là giao điểm của a với (P) .

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẺANG VÀ MẶT PHẺANG

HĐ5. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với đường thẳng b . Lấy một đường thẳng m bất kì thuộc mặt phẳng (P) . Tính (b, m) và từ đó rút ra mối quan hệ giữa b và (P) .



Hình 7.20

Lời giải

Ta có $(b, m) = 90^\circ$, do đường thẳng b và m nằm trên mặt phẳng (P) và b song song với a , vậy góc giữa b và m là góc vuông.

Từ đó, ta có thể rút ra mối quan hệ giữa b và (P) như sau:

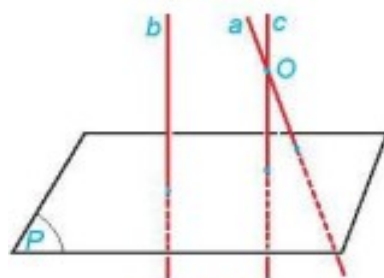
- Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) .
- Đường thẳng b vuông góc với một đường thẳng nào đó thuộc mặt phẳng (P) (vì $(b, m) = 90^\circ$ với m là đường thẳng nằm trong (P)).

- Vậy đường thẳng b cũng vuông góc với mặt phẳng (P) .

HĐ6. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) . Xét O là một điểm thuộc a nhưng không thuộc b . Gọi c là đường thẳng qua O và song song với b .

a) Hỏi c có vuông góc với (P) hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa a và c .

b) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b .



Hình 7.21

Lời giải

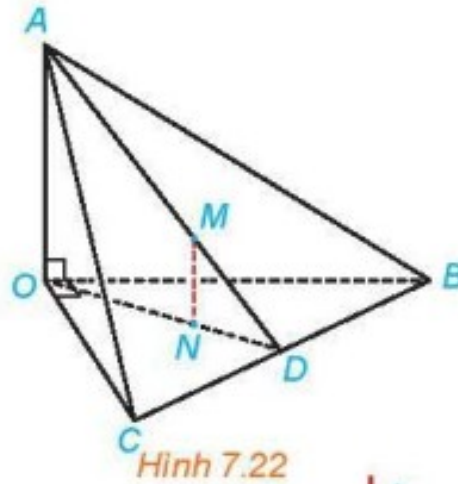
a) Để xác định liệu đường thẳng c có vuông góc với (P) hay không, ta cần xem xét vị trí tương đối giữa c và mặt phẳng (P) . Ta thấy rằng c không nằm trên mặt phẳng (P) nên không thể nói rằng c vuông góc với (P) . Tuy nhiên, vị trí tương đối giữa a và c là song song vì c và b là hai đường thẳng song song.

b) Hai đường thẳng a và b là hai đường thẳng vuông góc với cùng một mặt phẳng (P) , vì vậy chúng là hai đường thẳng chéo nhau.

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) .
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC . Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC) .

Lời giải. (H.7.22)



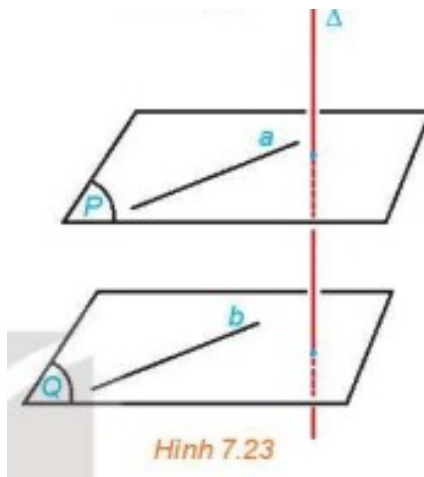
Hình 7.22

Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$. Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC .

Ta có $\frac{MA}{MD} = 2 = \frac{NO}{ND}$. Do đó, MN song song với AO .

Mặt khác, $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.

HĐ7. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng Δ vuông góc với (P) . Gọi b là một đường thẳng bất kì thuộc (Q) . Lấy một đường thẳng a thuộc (P) sao cho a song song với b (H.7.23). So sánh (Δ, b) và (Δ, a) . Từ đó rút ra mối quan hệ giữa Δ và (Q) .



Hình 7.23

Lời giải

(Δ, b) : Do Δ vuông góc với (P) và (P) song song với (Q) , nên Δ cũng vuông góc với (Q) . Vậy (Δ, b) là đường thẳng vuông góc với (Q) .

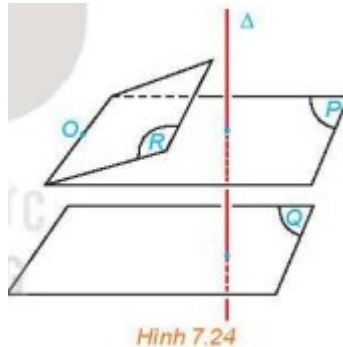
(Δ, a) : Vì a song song với b nên (Δ, a) cũng song song với (Δ, b) và do đó cũng vuông góc với (Q) .

Từ đó, ta có mối quan hệ giữa Δ và (Q) là Δ vuông góc với (Q) .

HĐ 8. Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng Δ . Xét O là một điểm thuộc mặt phẳng (P) nhưng không thuộc mặt phẳng (Q) . Gọi (R) là mặt phẳng đi qua O và song song với (Q) (H.7.24).

a) Hỏi (R) có vuông góc với Δ hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa (P) và (R) .

b) Nêu vị trí tương đối giữa (P) và (Q) .



Lời giải

a) Do (Q) và (R) song song với nhau nên chúng có cùng phương sai. Do đó, một đường thẳng nào đó trong (R) cũng song song với Δ . Mặt khác, (P) vuông góc với Δ , nên nó cắt (R) theo một đường thẳng vuông góc với Δ . Vậy (R) cắt Δ theo một đường thẳng vuông góc với Δ , tức là (R) cũng vuông góc với Δ .

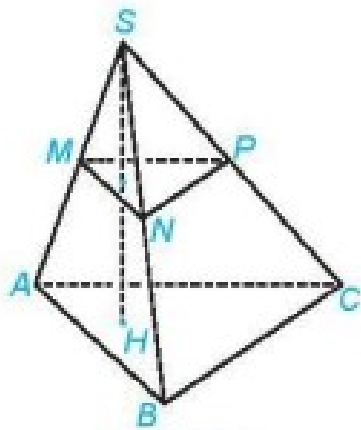
Vì (R) vuông góc với Δ và song song với (Q) , nên nó cắt (Q) theo một đường thẳng vuông góc với (Q) . Do (P) cũng vuông góc với Δ , nên (R) và (P) có vị trí tương đối giống nhau.

b) Vì cả (P) và (Q) đều vuông góc với Δ , nên chúng có vị trí tương đối giống nhau. Tuy nhiên, do (R) song song với (Q) nên vị trí của (R) và (P) khác nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) .
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC . Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H . Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

Lời giải. (H.7.25)



Hình 7.25

Do $MN \parallel AB, MP \parallel AC$ nên $(MNP) \parallel (ABC)$.

Mặt khác, $SH \perp (ABC)$. Do đó $SH \perp (MNP)$.

Luyện tập 3. Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

Lời giải

Hai mặt phẳng đó không nhất thiết phải song song với nhau. Vì nếu mặt sàn không phẳng, tức là có sự chênh lệch độ cao giữa các điểm trên sàn, thì chiếc bàn khi đặt lên sàn sẽ không còn nằm trong một mặt phẳng duy nhất, mà sẽ nghiêng theo hướng chênh lệch độ cao của sàn.

HĐ9. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) . Tính (Δ, a) .

Lời giải

Vì đường thẳng a và mặt phẳng (P) là song song nhau và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

Do đó, ta có (Δ, a) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng a đến mặt phẳng (P) .

HĐ10. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ .

a) Qua một điểm O thuộc (P) , kẻ đường thẳng a' song song với a . Nêu vị trí tương

đối giữa a' và (P) .

b) Nêu vị trí tương đối giữa a và (P) .

Lời giải

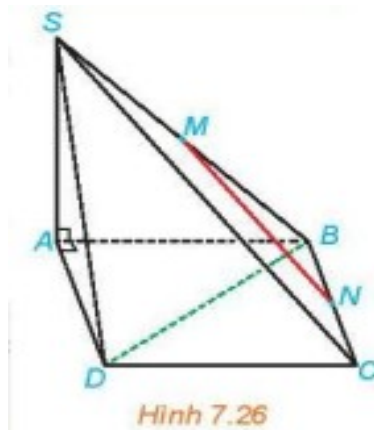
a) Vị trí tương đối giữa a' và (P) là hai đường thẳng song song với nhau.

b) Vị trí tương đối giữa a và (P) là hai mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ .

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P)
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) .

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của SB, BC . Chứng minh rằng $BD \perp MN$.

Lời giải. (H.7.26)

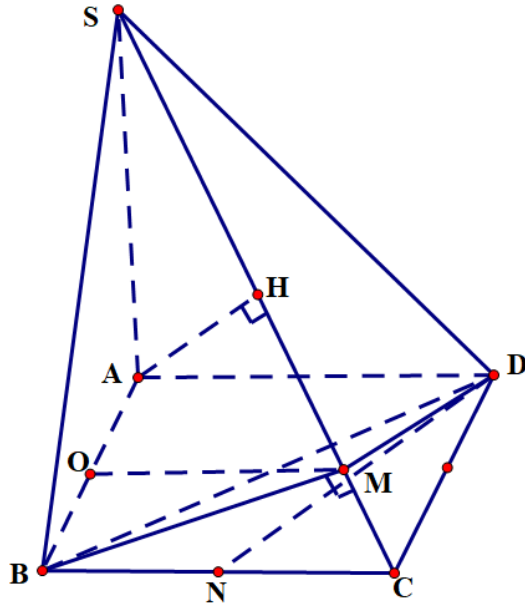


Do $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$. Mặt khác, $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$.

Ta lại có $MN \parallel SC$ nên $MN \parallel (SAC)$. Do đó $BD \perp MN$.

Luyện tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

Lời giải



Đặt O là trung điểm của AB, E là trung điểm của CD, N là trung điểm của BC .

Ta có $OM \parallel ND$ vì $OM \parallel AB$ và $ND \parallel AB$. Do đó, $\triangle OMB = \triangle NDB$.

Ta có $SA \parallel BC$ vì $ABCD$ là hình vuông nên $AH = \frac{1}{\sqrt{2}}SC, BM = \frac{1}{2}SC$, và $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}SA$.

Kẻ BD . Ta có $\triangle MBD$ là tam giác vuông tại M .

Vì $AH = \frac{1}{\sqrt{2}}SC$ và $\frac{OM}{MB} = \frac{1}{2}$ nên $\triangle OMB$ và $\triangle AHS$, $\triangle OMB$ và $\triangle AHS$ đồng dạng.

Vậy $\angle AHS = \angle OMB$.

Tương tự, $\triangle NDB$ và $\triangle ASC$ đồng dạng nên $\angle SCN = \angle NDB$.

Suy ra, $\angle MBD = \angle AHS = \angle OMB$ và $SC \perp BD$. Do đó, $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P) .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải

a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác

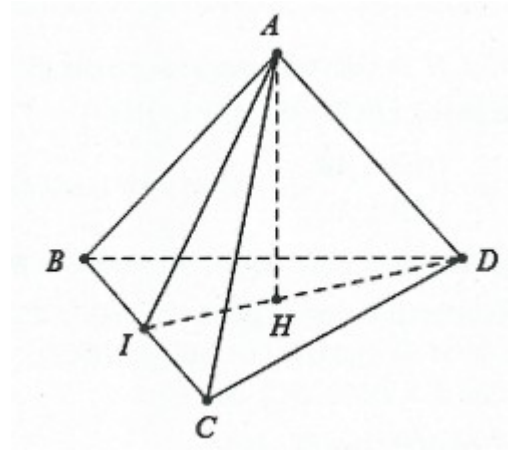
cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

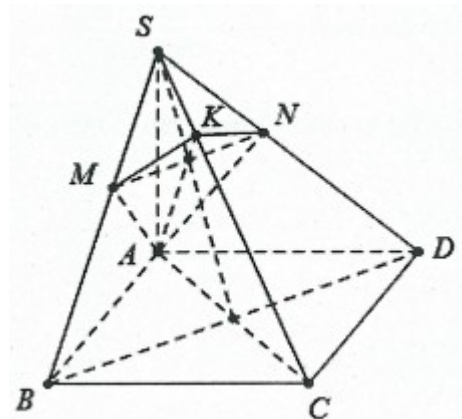
Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $SM = SN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.



Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD .

b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x; AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{x^2}{BC \cdot BD} > 0 \Rightarrow \angle B < 90^\circ$

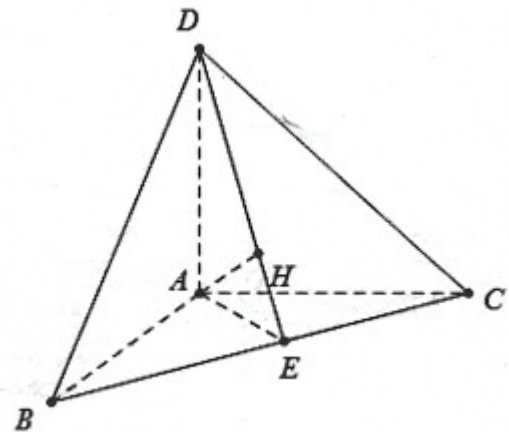
Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \angle BDC < 90^\circ \\ \angle BCD < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.



Lời giải

a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M .

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

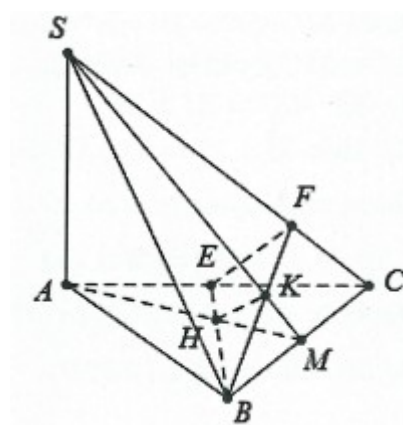
Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$

Do đó $HK \perp (SBC)$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải

a) Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$

Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

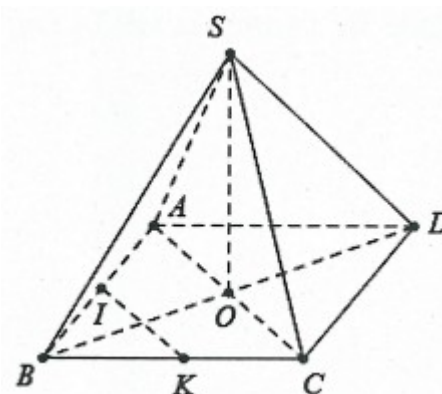
b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$

IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên

$IK \parallel AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD); SJ \perp (SAB)$

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ , chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$

Lời giải

a) Ta có: $\triangle SAB$ đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 Tứ giác $IBCI$ là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$.
 $\triangle SCD$ là tam giác vuông cân đỉnh S
 $\Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \triangle SIJ$ vuông tại S .

b) Do $\triangle SCD$ cân tại S nên $SJ \perp CD$

Do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$.

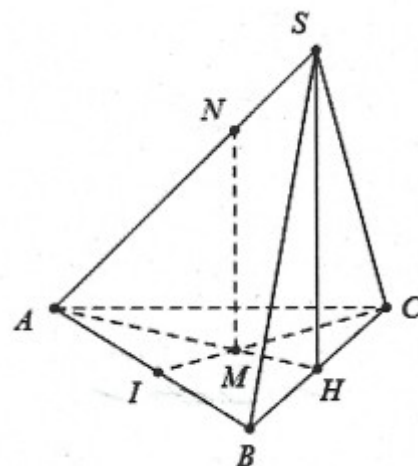
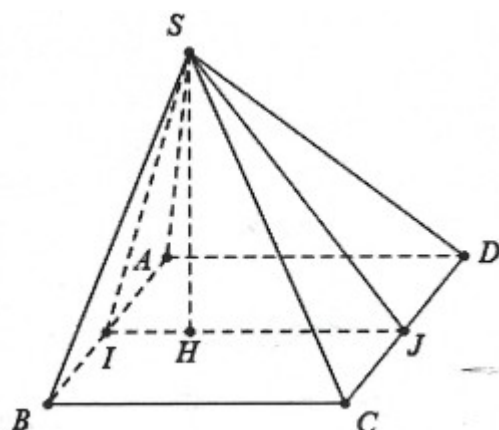
Lời giải

Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow M = AH \cap CI$.

Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải:

■ Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

■ Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải

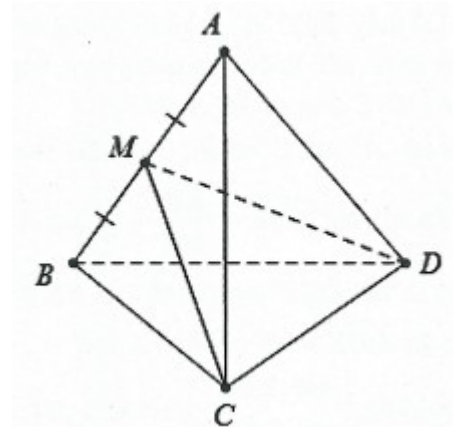
Gọi M là trung điểm của AB .

Tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ là các tam

giác đều suy ra $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$.

Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.



Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc

với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với

$$AD = CD = \frac{AB}{2}.$$

a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB , chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải

a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

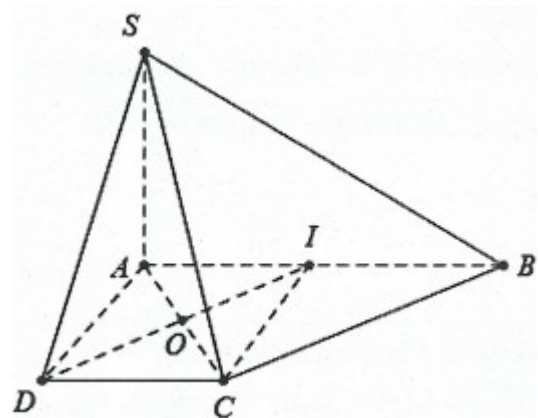
Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a .

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle SAD, \triangle SAB$ vuông tại S .

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên $\triangle SCD$ vuông tại D .



Xét $\triangle ACD$ có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \triangle SCB$ vuông tại C .

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải

a) Do $\triangle ABC$ là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

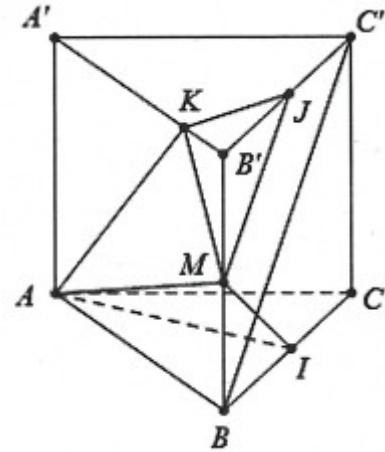
c) Ta có: $\tan \angle MB'K = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \angle MB'K = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \angle MB'K = \cot \angle MB'K \Rightarrow \angle MB'K + \angle MB'K = 90^\circ$.

Do đó $\angle AMK = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$.

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.



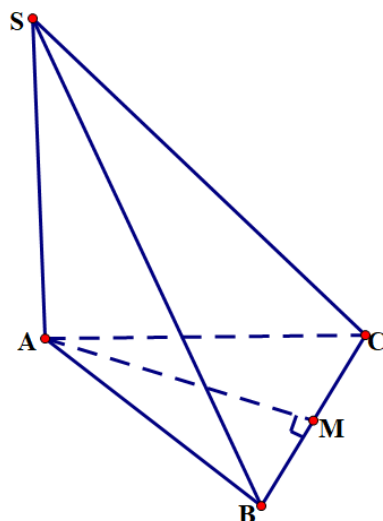
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.5. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAM)$;

b) Tam giác SBC cân tại S .

Lời giải

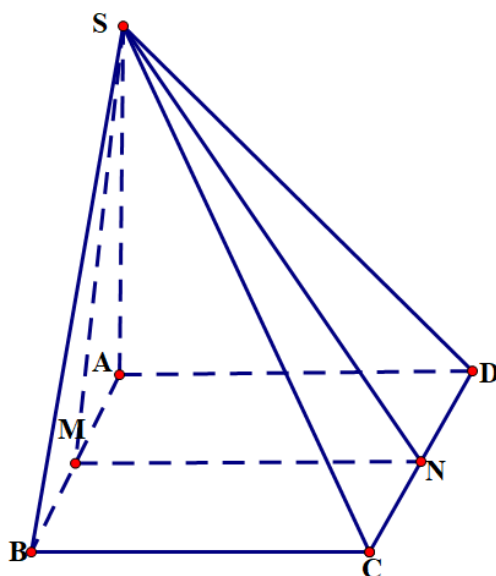


a) Ta có $SA \perp (ABC)$ và AM là đường trung bình trong tam giác đều ABC , nên $AM \perp BC$ và AM là đường cao của tam giác SBC . Khi đó, ta có $BC \perp (SAM)$ vì $BC \perp AM$.

b) Ta có $\angle SBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC = \angle SAC$. Mặt khác, ta có $SA = SC$ vì S là đỉnh của hình chóp $S \cdot ABC$ và AC là đường bờ của đáy ABC , vì ABC là tam giác cân tại A nên AC là đường trung trực của, suy ra $SC = SA$. Vậy SBC là tam giác cân tại S .

Bài 7.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải



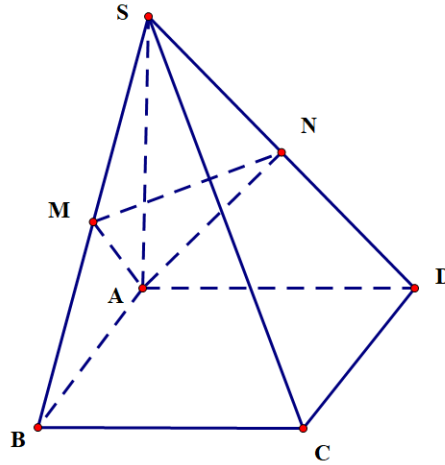
Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó, ta có $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do đó, SM và SN là hai đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, và do đó chúng cũng vuông góc với tất cả các đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó, bao gồm các cạnh AB, BC, CD và AD .

Vì $SM \perp AB$ và $SN \perp CD$, nên $\triangle SMB$ và $\triangle SND$ là hai tam giác vuông. Tương tự, $\triangle SMC$ và $\triangle SNA$ cũng là hai tam giác vuông. Do đó, các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ đều là các tam giác vuông.

Bài 7.7. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD . Chứng minh rằng:
 $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$.

Lời giải



$$\left. \begin{array}{l} +) BC \perp AB \text{ (hcn } ABCD) \\ BC \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ AB \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB); AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$\left. \begin{array}{l} +) CD \perp AD \text{ (hcn } ABCD) \\ CD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ AD \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD); AN \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AM \perp SB \\ AM \perp BC \\ SB \cap BC = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC); SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \perp AM$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AN \perp SD \\ AN \perp CD \\ SD \cap CD = \{D\} \end{array} \right\} \Rightarrow AN \perp (SCD); SC \subset (SCD) \Rightarrow SC \perp AN$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AM \perp SC \\ AN \perp SC \\ AM \cap AN = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (AMN)$$

Bài 7.8. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Lời giải

Khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng, đường thẳng chứa dây dọi vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng.

Bài 7.9. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột 1 m đến một điểm trên cột, cách chân cột 1 m được kết quả là $1,5\text{ m}$ (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?

Lời giải



Hình 7.27

Nếu phép đo của Hùng là chính xác ta có: $1^2 + 1^2 \neq 1,5^2$

Do đó theo định lý Pytago thì cột có không vuông góc với sân.

Do đó cột không có phương thẳng đứng.

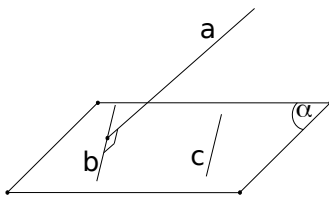
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (a) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (a) .
- B.** Nếu đường thẳng $d \perp (a)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (a) .
- C.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (a) thì $d \perp (a)$.
- D.** Nếu $d \perp (a)$ và đường thẳng $a \parallel (a)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (a) . Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (a) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (a) .

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng D không nằm trong mặt phẳng (P) , đường thẳng D được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

- A.** vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P) .
- B.** vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P) .
- C.** vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P) .

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P) .

Lời giải

Chọn D

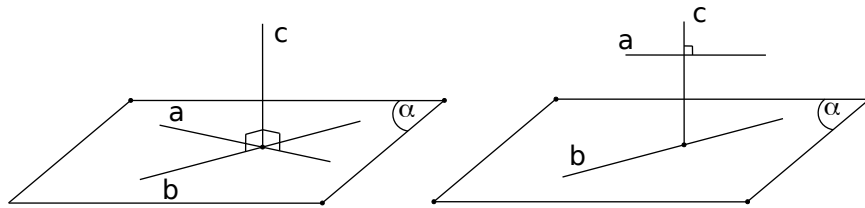
Đường thẳng D được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu D vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) . (Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- B.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
- C.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



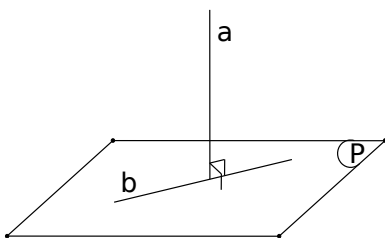
Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A.** Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
- B.** Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
- C.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
- D.** Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .

Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) . Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \wedge (P)$ và $b \wedge a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \wedge (P)$ thì $a \wedge b$.

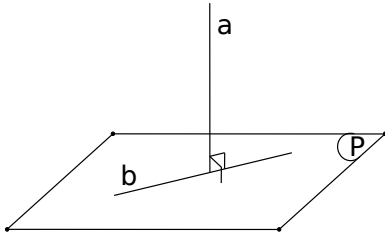
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \wedge a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \wedge a$ thì $b \wedge (P)$.

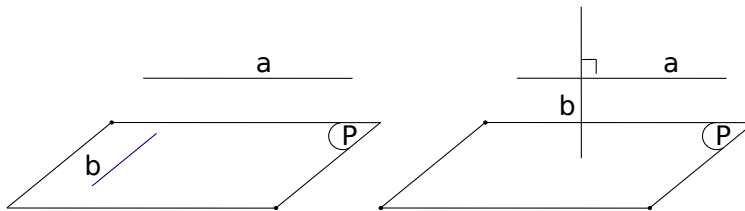
Lời giải

Chọn B

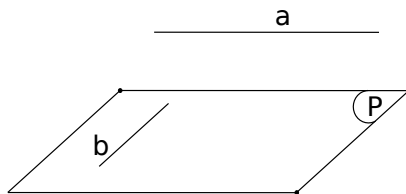
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P) .



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P) .



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .



Câu 6: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \wedge b$ và $b \wedge c$ thì $a \parallel c$

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (a) và $b \parallel (a)$ thì $a \wedge b$

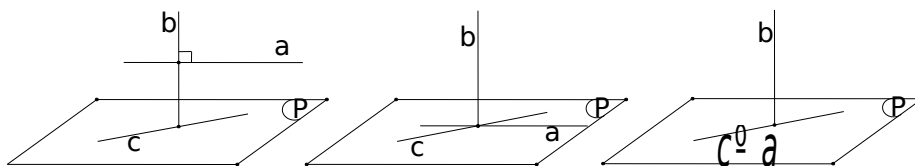
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \wedge c$ thì $c \wedge a$.

D. Nếu $a \wedge b$, $b \wedge c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c) .

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \wedge b$ và $b \wedge c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c .

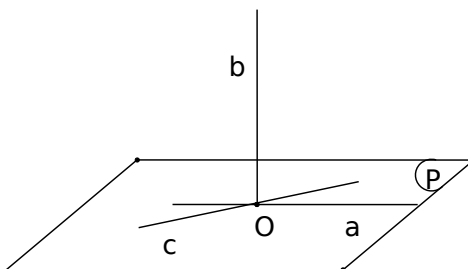


Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
- B.** Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.
- C.** Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D.** Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



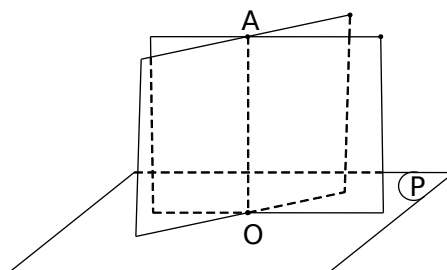
Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- B.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A.** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

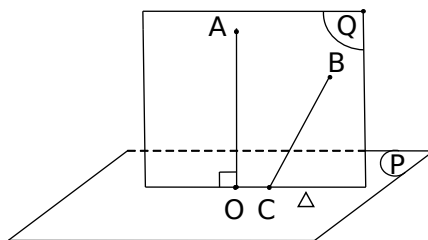
C. Với mỗi điểm $A \in (a)$ và mỗi điểm $B \in (b)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (a) và (b) .

D. Nếu hai mặt phẳng (a) và (b) đều vuông góc với mặt phẳng (g) thì giao tuyến d của (a) và (b) nếu có sẽ vuông góc với (g) .

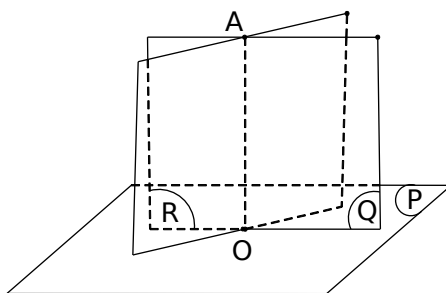
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P) .

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q) .

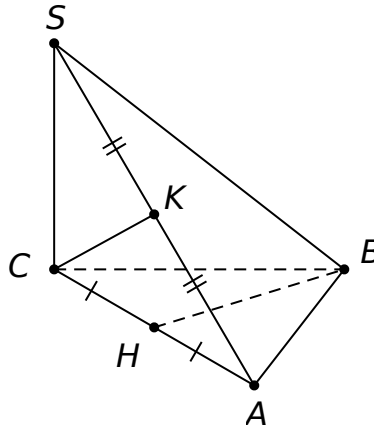
Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $CH \perp AK$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp SA$. D. $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB , tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \Rightarrow CH \perp AK$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK .

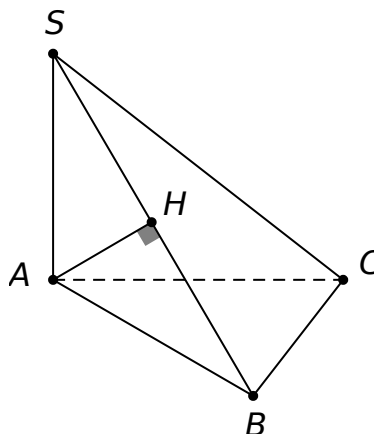
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B , có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$

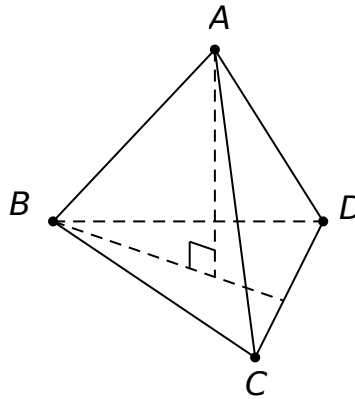
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $CD \perp BD.$ **B.** $AC = BD.$ **C.** $AB = CD.$ **D.** $AB \perp CD.$

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp(BCD)$ suy ra $AH \perp CD.$ (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD.$ (2)

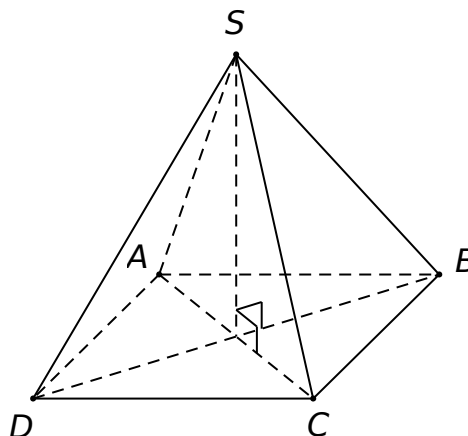
Từ (1),(2) suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB.$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $AB \perp (SAC).$ **B.** $CD \perp AC.$ **C.** $SO \perp (ABCD).$ **D.** $CD \perp (SBD).$

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC.$

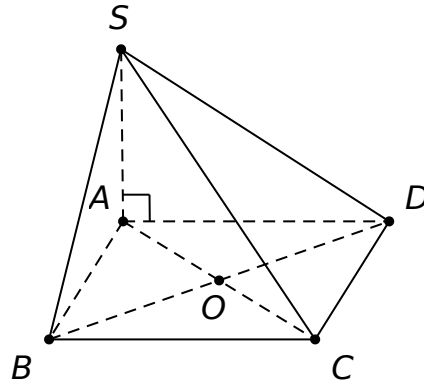
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \in (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $SA \perp BD$. B. $SC \perp BD$. C. $SO \perp BD$. D. $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO \in (SAC)$ và $SC \in (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

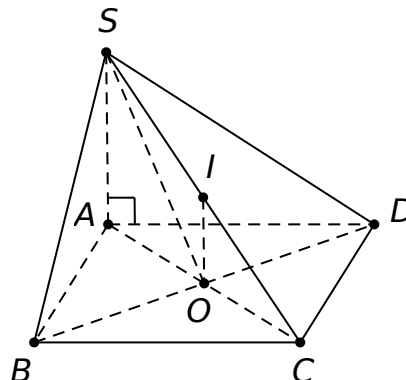
Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $IO \perp (ABCD)$.
 B. $BC \perp SB$.
 C. Tam giác SCD vuông ở D .
 D. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD .

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI \parallel SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} (SA \perp (ABCD)) \Rightarrow CD \perp SD$.

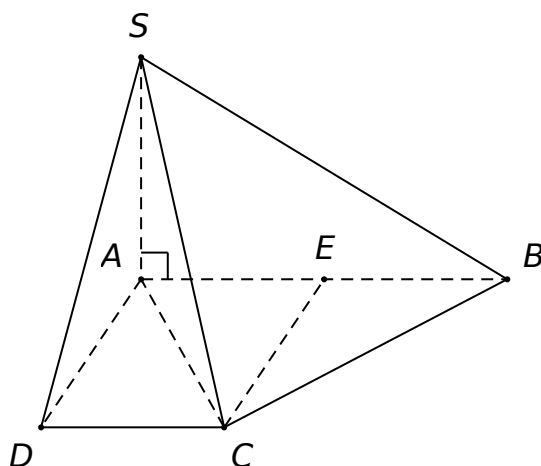
Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \Rightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. $CE \perp (SAB)$. B. $CB \perp (SAC)$.
C. Tam giác SDC vuông tại D . D. $CE \perp (SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} (do SA \perp (ABCD)) \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow DABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} (do SA \perp (ABCD)) \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

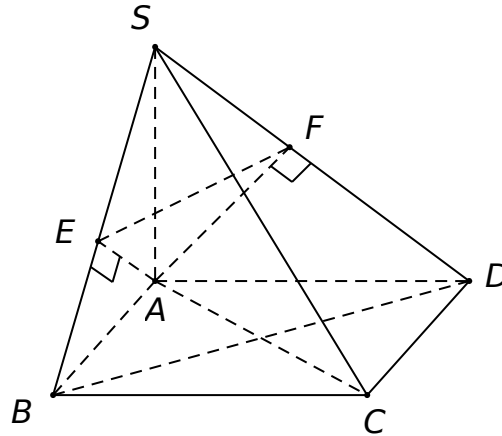
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \wedge (AFB)$. B. $SC \wedge (AEC)$. C. $SC \wedge (AED)$. D. $SC \wedge (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \wedge BC$.

Mà $AB \wedge BC$ nên suy ra $BC \wedge (SAB) \Rightarrow BC \wedge AE \cap (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \wedge SB$ mà $AE \wedge BC \Rightarrow AE \wedge (SBC) \Rightarrow AE \wedge SC$.

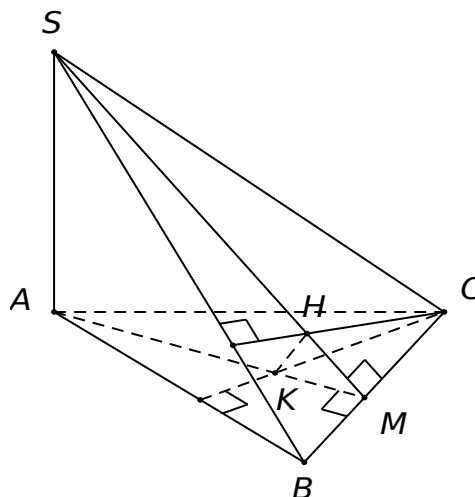
Tương tự, ta chứng minh được $AF \wedge SC$. Do đó $SC \wedge (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \wedge (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BC \wedge (SAH)$. B. $SB \wedge (CHK)$. C. $HK \wedge (SBC)$. D. $BC \wedge (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



● Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

● Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

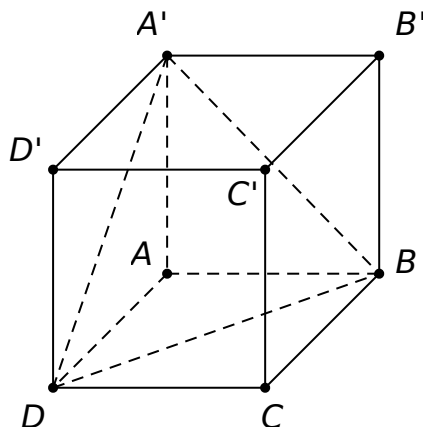
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'C'D')$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA' \perp (ABCD)$ là hình vuông suy ra $AD \perp AA'$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp AA'$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AC$

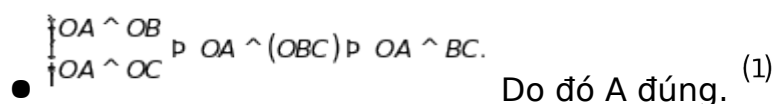
Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ ($AA' \perp (ABCD)$)
 $\Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $AA' \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $OA \perp BC$. B. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
 C. H là trực tâm $\triangle ABC$. D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC.$ (2)

Tam giác vuông BOC , ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

● Từ chứng minh trên $BC \wedge (A \vee I) \vdash BC \wedge AI. \quad (3)$

Từ ⁽³⁾ và ⁽⁴⁾, suy ra H là trục tâm $DABC$. Do đó C đúng.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

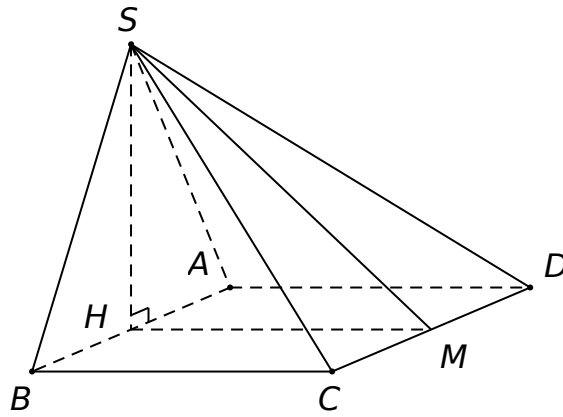
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

C. $S = a^2 \sqrt{3}$.

D. $S = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

$$SH \perp (a)$$

$SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB$ ($M \in CD$) $\Rightarrow HM \perp (a)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H .

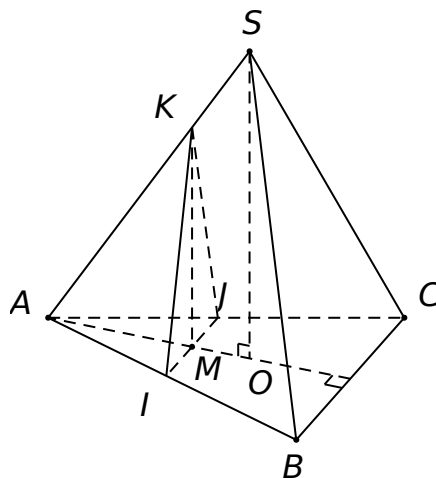
Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$. Vậy $S_{DSM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \perp A; M \perp O$). Mặt phẳng (a) đi qua M và vuông góc với AO . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (a) với hình chóp $S.ABC$.

- A.** $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(a) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (a)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (a)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ .

Diện tích tam giác IJK là $S_{DIK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK$.

Trong tam giác ABC , ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO , ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{DJK} = \frac{1}{2} \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\text{DAMN}} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$

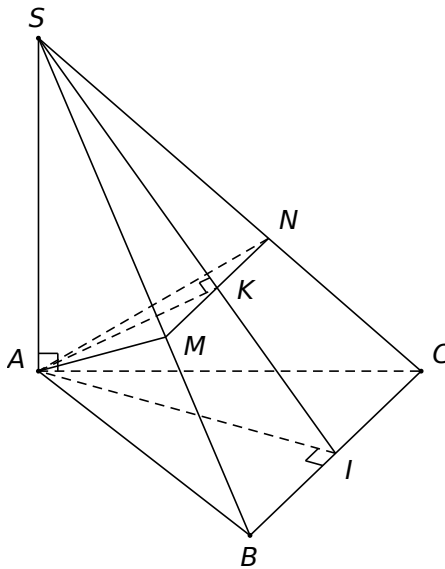
B. $S_{\text{DAMN}} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\text{DAMN}} = \frac{a^2 \sqrt{21}}{7}.$

D. $S_{\text{DAMN}} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ ($K \in SI$).

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N .

Khi đó thiết diện là tam giác AMN .

Ta có $\left\{ \begin{array}{l} BC \wedge AI \\ BC \wedge SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \wedge (SAI) \Rightarrow BC \wedge AK \Rightarrow MN \wedge AK$.

Tam giác vuông SAI , có $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC , có $\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{SI} = \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7} \Rightarrow MN = \frac{4a}{7}$.

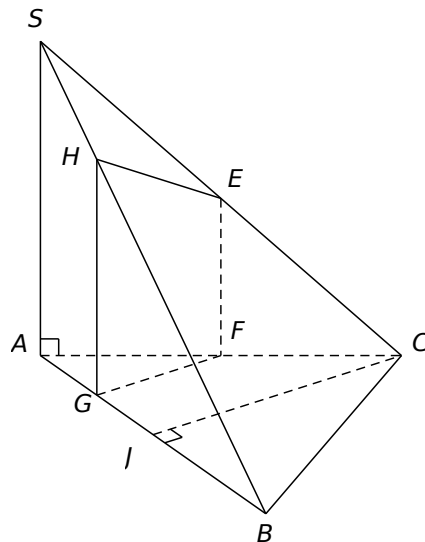
Vậy $S_{DAMN} = \frac{1}{2} AK \cdot MN = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

- A. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. B. $S_{EFGH} = \frac{a^2\sqrt{7}}{32}$. C. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. D. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC , suy ra $EF \parallel SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG .

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong $\triangle SAB$ kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SB$), suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH) \cdot FG$.

Ta có $EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$; $FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}$.

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}.$$

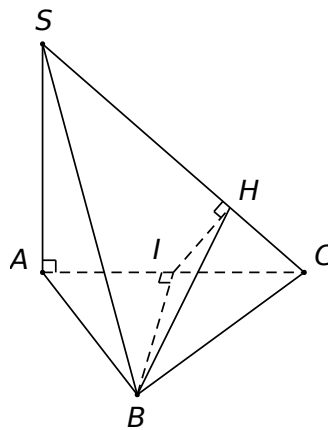
Vậy

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

- A. $S_{DBIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{10}$. B. $S_{DBIH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. C. $S_{DBIH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. D. $S_{DBIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC , suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$ (1).

Kẻ $IH \perp SC$ ($H \in SC$) (2).

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH .

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên $\triangle IBH$ vuông tại I .

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS , suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{CI \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$S_{DBIH} = \frac{1}{2} BI \cdot IH = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}.$$

Vậy

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b . Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC . Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C .

A. $a > b\sqrt{2}$.

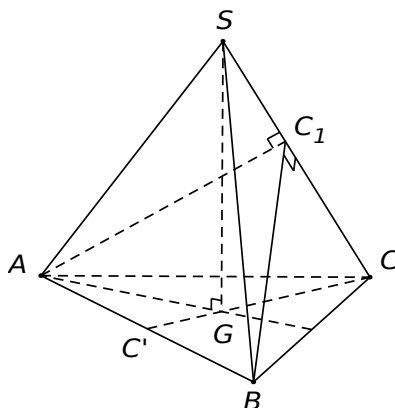
B. $a > b\sqrt{3}$.

C. $a < b\sqrt{2}$.

D. $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB . Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$ (1).

Trong tam giác SAC , kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC .

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\angle ASC < 90^\circ$.

Suy ra $\cos \angle ASC > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a < b\sqrt{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10.

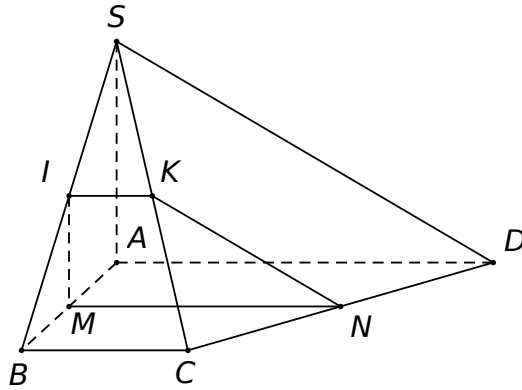
B. 20.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \cap AB \subset (P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SA \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $SD \Rightarrow MN \parallel SD \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M .
Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3$.

IK là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3$.

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7$.

Vậy $S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2} \cdot MI = 15$.

Câu 29: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O , đường cao AA' ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' ($M \neq A'$; $M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA' . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJE} = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

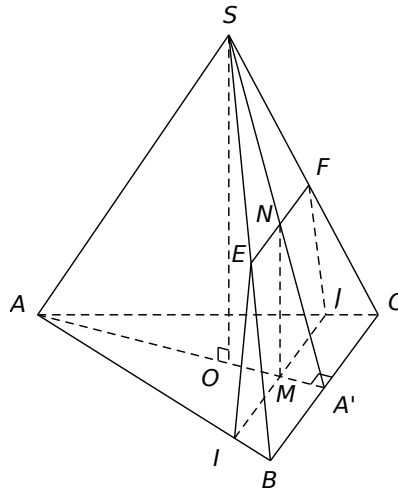
B. $S_{IJE} = 2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)^2$.

D. $S = 2(a - x)^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(a) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (a)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (a)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.

Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB, F \in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJFE} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$.

Tam giác ABC , có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ p $IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC , có $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA'} = \frac{OM}{OA'}$ p $EF = \frac{OM \cdot BC}{OA'} = 2(x\sqrt{3} - a)$.

Tam giác SOA' , có $\frac{MN}{SO} = \frac{MA'}{OA'}$ p $MN = \frac{SO \cdot MA'}{OA'} = 2(3a - 2x\sqrt{3})$.

Vậy $S_{IJFE} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3}) = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$.
Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (a) đi qua A vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (a) với hình chóp đã cho.

$$S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{7}.$$

$$B. S_{AMIN} = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}.$$

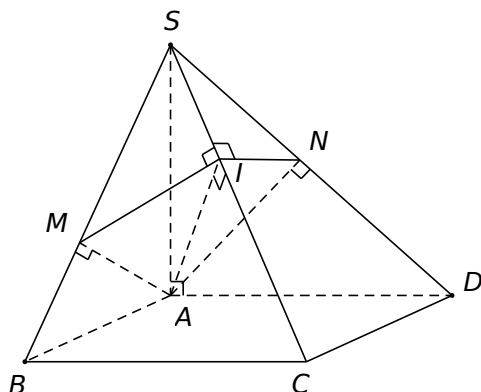
$$C. S_{AMIN} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{35}.$$

$$D. S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

A.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC , kẻ $AI \perp SC$ ($I \in SC$).

Trong mp (SBC) , dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M .

Trong mp (SCD) , dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N .

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (a) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (a) \Rightarrow SC \perp AM$ (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{DAMI} + S_{DANI} = \frac{1}{2} AM \cdot MI + \frac{1}{2} AN \cdot NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$$AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; \quad AI = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}; \quad AN = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}$.

$$S_{AMIN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{7} = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$$

Vậy

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB' . Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân.

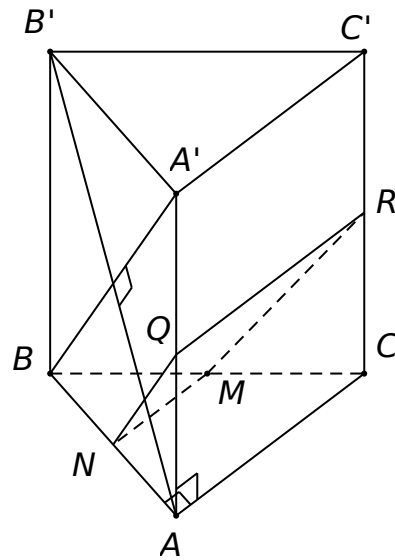
B. Hình thang vuông.

C. Tam giác.

D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \perp (a)$.

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).