

Câu 1. (4 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

$$A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

b) Rút gọn biểu thức:

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

b) Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Câu 3. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 4. (6 điểm)

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông $AMCD, BMEF$

a) Chứng minh rằng: $AE \perp BC$

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức : $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}x(x+2)(x^2+2x+2)+1 &= (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1 \\&= (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)+1 \\&= (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4\end{aligned}$$

b) Ta có:
$$\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow B = \dots = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Câu 2.

a) Ta có $a+b+c=0$ thì :

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

(vì $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$)

Theo giả thiết
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} \\&= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3\end{aligned}$$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4} \right) + (z^2 - 2z + 1) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + (z - 1)^2 + \frac{3}{4}(y - 2)^2 = 0$$

Có các giá trị $(x, y, z) = (1; 2; 1)$

Câu 3.

a) Ta có: $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$
 $= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t (t \in \mathbb{Z})$ thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z} (dfcm)$

Vậy A là số chính phương

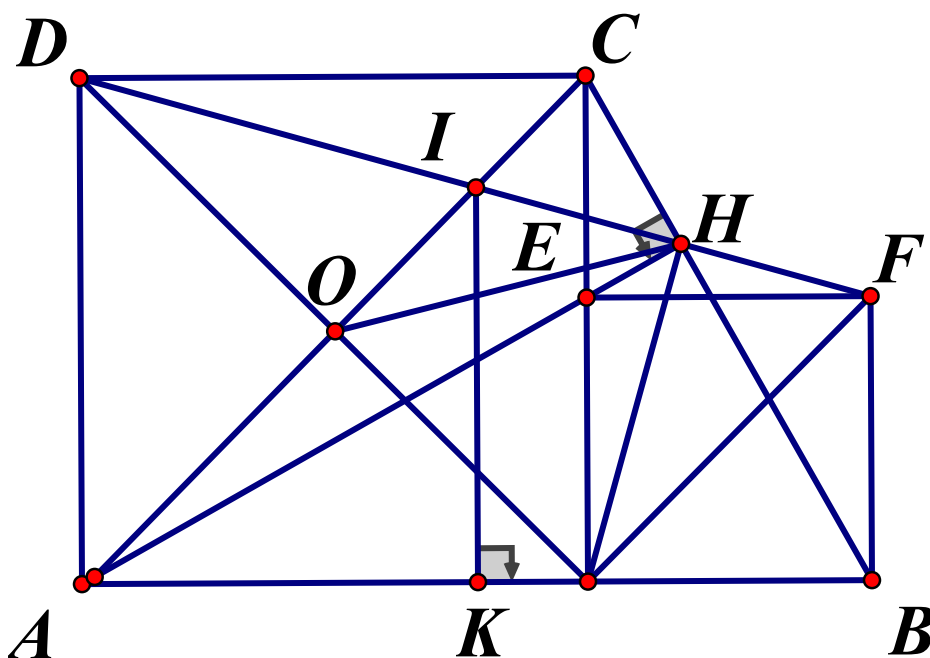
b) Dễ thấy $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016}) \end{aligned}$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 4.



a) $\triangle AME = \triangle CMB (cgc) \Rightarrow \angle EAM = \angle BCM$

Mà $\angle BCM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EAM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$\triangle AHC$ vuông tại H có HO là đường trung tuyến $\Rightarrow HO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$
 $\Rightarrow \triangle DHM$ vuông tại H suy ra $\angle DHM = 90^\circ$

Chúng minh tương tự: $\angle MHF = 90^\circ$

Suy ra $\angle DHM + \angle MHF = 180^\circ$, vậy 3 điểm D, H, F thẳng hàng

c) Gọi I là giao điểm của AC và DF

Ta có: $\angle DMF = 90^\circ \Rightarrow MF \perp DM$ mà $IO \perp DM \Rightarrow IO \parallel MF$

Vì O là trung điểm của DM nên I là trung điểm của DF

Kẻ $IK \perp AB (K \in AB) \Rightarrow IK$ là đường trung bình của hình thang ABFD

$$\Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \text{ (không đổi)}$$

Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định

Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB.

Câu 5.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b - a)(b - c)}; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} \\ &= \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1 \end{aligned}$$