

CĐ 5: SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2)$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 , thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng

Câu 4. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24 .

Câu 5. (HSG 7 Diễn Châu Liên trường THCS 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 , biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6 .

Câu 6. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - 2q^2 = 17$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng $5p+2$ là hợp số.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lập Thạch 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ là một số nguyên tố.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Trì; Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Câu 10. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng: $(5p+1):6$

Câu 11. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p+1$ và $4p+1$ đều là số nguyên tố.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - 2b^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2)$. Chứng minh: $a+b+c+d$ là hợp số.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên tố p và q thỏa mãn: $p^2 - 2q^2 = 17$. Tính $(p+q)^4 + 15$

Câu 14. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a \ (a \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Câu 15. (HSG 7 Huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

Câu 16. (HSG 7 TP Phúc Yên- Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p^2 - 1):24$.

Câu 17. (HSG 7 (LDP) Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 7^2 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với $2; 3; 4$

Câu 18. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên $n \ (n > 1)$ thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho $m; n$ là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Câu 20. (HSG 7 thành phố Thanh Hoá, 2022 - 2023; huyện Thanh Ba năm 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ là hợp số.

Câu 21. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$. Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 22. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2020 - 2021)

Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ là hợp số.

Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho các số nguyên dương $a; b; c; d; e$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ chia hết cho 2. Chứng tỏ rằng $a+b+c+d+e$ là hợp số

Câu 24. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.

Câu 25. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r

Câu 26. (HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$ (1). Chứng minh rằng: $p^2 = n + 2$

Câu 27. (HSG 7 huyện Kim Thành, 2022 - 2023)

Cho biết a, b là các số nguyên tố thỏa mãn: $a^2 - b^2 - 4 = 113$. Chứng minh rằng $a + b$ cũng là một số nguyên tố.

Câu 28. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, 2017 - 2018)

Tìm số nguyên tố p để $p+2, p+6, p+8, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Câu 29. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh, trường 2022-2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x-1)(x+1) = 6y^2$

Câu 30. (HSG 7 Tây Hồ, 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^q \cdot q^p = (2p+q+1) \cdot (2q+p+1)$

Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat

Câu 1. (HSG 7 quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Câu 3. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Câu 5. (HSG 7 huyện Phú Lý 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố.

Dạng 3: Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương $a > b > 0$

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$.
 Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên tố x và y thỏa mãn: $3x^2 + 1 = 19y^2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Yên Bái – Yên Bình 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p + 1$ chia hết cho 6.

Câu 5. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$. Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2021 - 2022)

Cho 2022 số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$ là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn:
 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$. Chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn.

Câu 7. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018-2019)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số: $A = (5m + n + 1)(3m - n + 4)$ là số chẵn.

Câu 8. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2017 - 2018)

Cho a, b, c đôi một khác nhau và $\neq 0$. Biết $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm $\overline{abc}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương, 2022- 2023)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Câu 10. (HSG 7 thành phố Lào Cai, 2022 - 2023)

Chứng minh $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Câu 11. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$

Câu 12. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $x^2 - 6y^2 + 1 = 2$ (x, y là nguyên tố)

Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p+1$ và $4p+1$ đều là số nguyên tố.

Câu 3. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^3 = 7$.

Câu 4. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ là số nguyên dương và là ước của 1995.

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Nga Sơn - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+14$ cũng là số nguyên tố.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế - BG 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p-2$ và $p+2$ đều là số nguyên tố. Hỏi $3p+2$ là số nguyên tố hay hợp số.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quảng Trạch năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 5. (HSG 7 năm 2021 - 2022)

Cho hai đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2009} + x^{2010}$

và $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{2009} + x^{2010}$.

Giá trị của biểu thức $P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right)$ có dạng biểu thức hữu tỉ là $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$; a, b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $a \div 5$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>