

ĐỀ ĐỘI TUYỂN SỐ 02- A1K75

Câu 1(6,0 điểm). Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2(x - \frac{3\pi}{4})$.

b) $5(x^2 - x - 6)\sqrt{5x - 19} \geq (x + 2)(x + 5 + 4\sqrt{x - 3})(\sqrt{x - 3} + 2)$.

Câu 2(5,0 điểm).

a) Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ 8 chữ số trên lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối?

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{4}{3}; (n + 2)^2 u_n = n^2 u_{n+1} - (n + 1)u_n u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công

thức số hạng tổng quát u_n theo n .

Câu 3(5,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (P) di động luôn cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Tìm giao điểm của SG với mp(P).

b) Biết rằng $2\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8$. chứng minh rằng mp(P) luôn đi qua một điểm cố định

Câu 4(3,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Kẻ qua M đường thẳng $d // AB$. Gọi B' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (ACD) .

a) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng (ABD) và (ABC)

theo thứ tự tại C', D' . Chứng minh rằng $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}$.

Câu 5(1,0 điểm). Cho ba số thực x, y, z thoả mãn

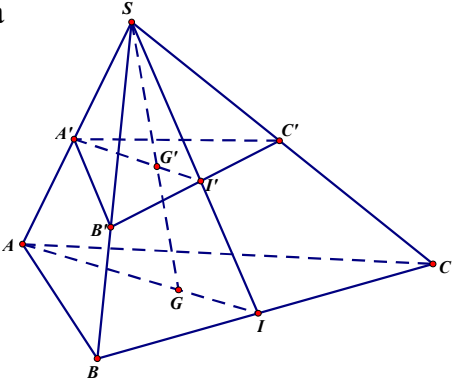
$$x + y + z = 2 \text{ và } x + 1 > 0; y + 1 > 0; z + 4 > 0.$$

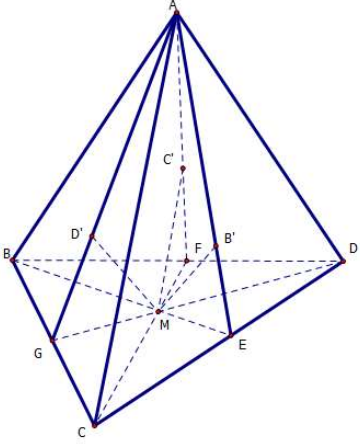
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+4}$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Điểm
1 (6,0đ)	a) (3,0 điểm) $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2(x - \frac{3\pi}{4})$ (1).	
	Phương trình đã cho tương đương với $2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 1 + \cos(2x - \frac{3\pi}{2})$	0,5
	$\Leftrightarrow -2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x = -\sin 2x$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \cos x$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos x$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,5
	b) (3,0 điểm)	
	Điều kiện xác định: $x \geq \frac{19}{5} \Rightarrow x+2 > 0$ $bpt \Leftrightarrow 5(x+2)(x-3)\sqrt{5x-19} \geq (x+2)(x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$ $\Leftrightarrow 5(x-3)\sqrt{5x-19} \geq (x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$	0,5
	Đặt $a = \sqrt{5x-19}, b = \sqrt{x-3}+2, a \geq 0, b > 0$ $bpt \Leftrightarrow (a^2+4)a \geq (b^2+4)b \Leftrightarrow a \geq b$	1,0
	$a \geq b \Leftrightarrow x-5 \geq \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 7$	1,0
	Vậy nghiệm bpt: $x \geq 7$	0,5
2	a) (2,5 điểm)	

(5,0đ)	Do $0+1+2+3+4+5+6+7=28$, nên để tổng 4 chữ số đầu và tổng 4 chữ số cuối bằng nhau là tổng đó bằng 14. Ta lập 4 bộ số có tổng là 14 và có chữ số 0 là: $(0;1;6;7); (0;2;5;7); (0;3;4;7); (0;3;5;6)$. Với mỗi bộ số có số 0 trên ứng với một bộ còn lại không có số 0 và có tổng bằng 14. TH1: Bộ có số 0 đứng trước: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp 4 số đầu có $3.3!$ cách. +) Xếp 4 số cuối có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số. TH2: Bộ có số 0 đứng sau: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp bộ không có chữ số 0 đứng trước có $4!$ cách. +) Xếp bộ có chữ số 0 đứng sau có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số. Vậy có $1728+2304=4032$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.	
b) (2,5điểm)		
	Ta có $u_n \neq 0 \forall n \in N^*$ $(n+2)^2 u_n = n^2 u_{n+1} - (n+1)u_n u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+2)^2 (n+1)^2}{u_{n+1}} = \frac{n^2 (n+1)^2}{u_n} - (n+1)^3$ Đặt $\frac{n(n+1)^2}{u_n} = x_n \Rightarrow x_1 = 3$	0,5
	Ta có: $x_{n+1} = x_n - (n+1)^3, x_n = x_{n-1} - n^3, \dots, x_2 = x_1 - 2^3$ $\Rightarrow x_n = x_1 - (2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \frac{16 - n^2 (n+1)^2}{4}$	1,5
	Suy ra $u_n = \frac{4(n^2 + n)^2}{16 - (n^2 + n)^2}$	0,5
3 (5điểm)	a, Gọi I là giao của AG và BC nên I là trung điểm của BC. SI cắt B'C' tại I' Trong tam giác SAI: A'I' cắt SG tại G' Khi đó G' là giao của SG và mặt phẳng (P) 	2,5
	b, Ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \frac{SI}{SI'}$ (1) Thật vậy: từ B kẻ BM//B'C' cắt SI tại M, từ C kẻ CN// B'C' cắt SI tại N Khi đó vì I là trung điểm BC nên SM+SN=2SI	

	$\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SM}{SI'} + \frac{SN}{SI'} = \frac{SM + SN}{SI'} = \frac{2.SI}{SI'}$ $\Rightarrow 2\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8 \Leftrightarrow 2\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SI}{SI'} = 8 \quad (*)$ Gọi O là trung điểm AI, A'I' cắt SO tại O' khi đó mặt phẳng (P) đi qua O' Mặt khác từ (*) ta chứng minh tương tự (1) có $\frac{SA}{SA'} + \frac{SI}{SI'} = 2\frac{SO}{SO'} = 4 \text{ vậy } O' \text{ là trung điểm của } SO.$ Hay O' là điểm cố định nên (P) luôn đi qua điểm cố định là O'	1,0
		0,5
		1,0
4 (3,0đ)		
	Trong mặt phẳng (BCD) gọi $BM \cap CD = \{E\}$. Trong mặt phẳng (ABE) kẻ $MB' // AB (B' \in AE) \Rightarrow d \equiv MB'$. Ta có $\begin{cases} B' \in d \\ B' \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow d \cap (ACD) = \{B'\}$ a) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $CM \cap BD = \{F\}, DM \cap BC = \{G\}$. Trong mặt phẳng (ACF) kẻ $MC' // AC (C' \in AF)$. Trong mặt phẳng (ADG) kẻ $MD' // AD (D' \in AG)$. Ta có $MB' // AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{ME}{BE} = \frac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}} (1).$ Tương tự ta có $\frac{MC'}{AC} = \frac{S_{\Delta MBD}}{S_{\Delta BCD}} (2); \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}} (3).$ Từ (1), (2) và (3) Suy ra $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MBD} + S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$	1,5
		1,5

	c) Ta có $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MB'.MC'.MD'}{AB.AC.AD}} \Leftrightarrow \frac{1}{MB'.MC'.MD'} \geq \frac{27}{AB.AC.AD}$. Ta có $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{AB.AC.AD}{MB'.MC'.MD'}}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27.AB.AC.AD}{AB.AC.AD}}} = 3\sqrt{3}.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MB'}{AB} = \frac{MC'}{AC} = \frac{MD'}{AD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{MF}{CF} = \frac{MD}{DG} = \frac{1}{3}$.	
5 (1,0đ)	Đặt $a = x + 1$; $b = y + 1$; $c = z + 4$. Ta có $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 8$. Khi đó $P = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-4}{c} = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}\right)$.	0,25
	Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a+b}$ với $a, b > 0$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Tương tự $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+b+c}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a + b = c$.	0,25
	Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c}$. Hay $P = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}\right) \leq 3 - \frac{16}{a+b+c} = 1$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$ và $c = 4$. Vậy $\max P = 1$	0,25