

BÀI 18. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

CHƯƠNG 6. LOGARIT

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

- Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}$$

Với a là số thực tùy ý:

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Với a là số thực khác 0 :

- Trong biểu thức a^m , a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Lưu ý: 0^0 và $0^{-n} (n \in \mathbb{N}^*)$ không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Chú ý

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.

- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}$$

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức:

Giải

$$A = 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} = 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} = 4 + 1 = 5.$$

2. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét. Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a .

Lưu ý: $\sqrt[n]{0} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$

Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Ví dụ 2. Tính: a) $\sqrt[3]{-64}$; b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

Giải

$$\text{a) } \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lĩ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Ví dụ 3. Tính:

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8}$

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$

Giải

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{4 \cdot (-8)} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}$

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Vì sao trong định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỉ lại cần điều kiện cơ số $a > 0$?

Chú ý. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 4. Tính: a) $16^{\frac{3}{2}}$; b) $8^{\frac{-2}{3}}$.

Giải

a) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{(4^2)^3} = \sqrt{(4^3)^2} = 4^3 = 64$

b) $8^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{(2^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(2^{-2})^3} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

3. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

a) Khái niệm lũy thừa với số mũ thực

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

Chú ý. Lũy thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

$$A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{3}-1}} (a > 0)$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức:

Giải

$$A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{3}-1}} = \frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{a^2}{a^{3-1}} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Ví dụ 6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

Giải

Ta có: $8^{\sqrt{3}} = (2^3)^{\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}} = (2^2)^{2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3} < 4\sqrt{3}$ và $2 > 1$ nên $2^{3\sqrt{3}} < 2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}} < 4^{2\sqrt{3}}$.

b) Tính lũy thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính căn bậc n và lũy thừa với số mũ thực.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	$\sqrt{\square} 2 0 \cdot 1 5 =$	4.488875137	$\sqrt{20,15} \approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	$\text{SHIFT } x^{\square} 5 \text{ ► } 3 2 0 =$	3.169786385	$\sqrt[5]{320} \approx 3,1698$
$15^{3,2}$	$1 5 x^{\square} 3 \cdot 2 =$	5800.855256	$15^{3,2} \approx 5800,8553$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Thực hiện phép tính (sử dụng biến đổi công thức lũy thừa)

Câu 1. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Tính: a) $\sqrt[3]{-125}$; b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

Câu 2. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Tính: a) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{625}$; b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}$

Câu 3. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Tính:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

Câu 4. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Thực hiện phép tính:

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}$;

b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$.

Câu 5. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Chứng minh rằng: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 36^{0,5} + (\sqrt{2})^0.$$

Câu 6. Thực hiện phép tính sau:

Câu 7. Tính:

a) $\sqrt[3]{-27}$; b) $25^{\frac{3}{2}}$; c) $32^{-\frac{2}{5}}$; d) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Câu 8. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$ b) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}$

d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}$

e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}$

Câu 9. Biết rằng $4^x = 5$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$.

Câu 10. Biết rằng $5^x = 10^y = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Câu 11. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^0$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$ d) $(-55)^0$; e) $2^{-8} \cdot 2^5$; g) $\frac{3^4}{(3^{-2})^3}$

Câu 12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{0,001}$; b) $\sqrt[5]{-32}$; c) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; d) $-\sqrt[6]{100^3}$; e) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$; g) $\sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5}$.

Câu 13. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}$; e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$ g) $(-\sqrt[6]{4})^3$

Câu 14. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2}$ d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt[4]{25}$

Câu 15. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$; b) $32^{-\frac{2}{5}}$; c) $81^{1,25}$; d) $1000^{-\frac{5}{3}}$ e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$ g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 16. Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

Câu 17. Biết rằng $3^\alpha + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}}$ b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

Câu 18. Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Câu 19. Tính:

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

Câu 20. Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a , biết:

a) $A = \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$ với $a = 3$

b) $B = \frac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$ với $a = \sqrt{5}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức (sử dụng biến đổi công thức lũy thừa)

$$A = \frac{x^{\frac{3}{2}}y + xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad (x, y > 0)$$

Câu 21. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{(a^{\sqrt{2}-1})^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}} \quad (a > 0)$$

Câu 22. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Rút gọn biểu thức:**Câu 23. (SGK-KNTT 11-Tập 2)** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} \quad (x, y \neq 0)$$

$$b) \quad B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} \quad (x, y \neq 0)$$

Câu 24. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad A = \frac{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$$

$$b) \quad B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}$$

Câu 25. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad \sqrt[5]{32x^{15}y^{20}}; \quad b) \quad 6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x}$$

Câu 26. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48}; \quad b) \quad 8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3} \quad (x > 0, y > 0)$$

Câu 27. Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad (a^{\sqrt{6}})^{\sqrt{24}}; \quad b) \quad a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a} \right)^{\sqrt{2}-1};$$

$$c) \quad a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}; \quad d) \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$$

Câu 28. Cho a và b là hai số dương, $a \neq b$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left[\frac{a-b}{\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2b^4}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^4} + b^4} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right).$$

Câu 29. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad \frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}} \quad b) \quad (4^{\sqrt{27}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad c) \quad 3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}} \quad d) \quad \left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad (a > 0, b > 0)$$

Câu 30. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \quad 2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1} \quad b) \quad (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} \quad c) \quad \left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{8}} \quad d) \quad a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2}$$

e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}$

g) $\left(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Câu 31. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Câu 32. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$

Câu 33. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} (a > 0, a \neq 1)$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}} (a > 0, b > 0)$.

Câu 34. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$

b) $B = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa

Câu 35. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

Câu 36. (Rút gọn biểu thức) Cho a và b là hai số dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}}.$$

Câu 37. So sánh cơ số $a (a > 0)$ với 1, biết rằng:

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$;

b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

Câu 38. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$;

b) $(0, 2)^{\sqrt{16}}$ và $(0, 2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Câu 39. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) 2^{300} và 3^{200} ;

b) $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[3]{4}$.

Câu 40. Cho x, y là các số thực dương và số thực a thỏa mãn:

$$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}. \text{ Chứng minh rằng: } a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

Câu 41. Xác định các giá trị của số thực a thỏa mãn:

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$ b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$ c) $(\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a$.

Câu 42. Không sử dụng máy tính cầm tay, so sánh hai số a và b , biết:

a) $a = (\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{2}}$ và $b = (\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{3}}$;

b) $a = (\sqrt{2} - 1)^{\pi}$ và $b = (\sqrt{2} + 1)^e$;

c) $a = \frac{1}{3^{400}}$ và $b = \frac{1}{4^{300}}$;

d) $a = \frac{8}{\sqrt[4]{27}}$ và $b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Dạng 4. Ứng dụng giải toán thực tế

Câu 43. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Một số dương x được gọi là viết dưới dạng kí hiệu khoa học nếu $x = a \cdot 10^m$, ở đó $1 \leq a < 10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

- a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 59800000000000000000000 kg;
b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 000000000000000000000167262 kg.
(Theo Vật lí 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

Câu 44. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Ngân hàng thường tính lãi suất cho khách hàng theo thể thức lãi kép theo định kì, tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền P với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) được tính theo công thức lãi kép sau: $A = P(1 + r)^N$.

Bác Minh gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác Minh thu được sau 3 năm.

Câu 45. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^N.$$

A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Câu 46. (SGK-KNTT 11-Tập 2) Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á khoảng 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân

số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức

$A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Câu 47. (Vận dụng thực tiễn) Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển,

a là một hằng số dương,

d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tìm giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu $15m$ ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 48. Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

Câu 49. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho

bởi $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài $19,6m$, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 50. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo P (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính P theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 51. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày). (Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 52. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(m)$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức

$I_h = I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $3m$ gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu $6m$?

Câu 53. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Câu 54. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có $10g$ chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ là

- A. a^5 . B. $a^{\frac{5}{9}}$. C. $a^{\frac{4}{3}}$. D. a^2 .

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

- A. a^6 . B. $a^{\frac{3}{2}}$. C. $a^{\frac{2}{3}}$. D. $a^{\frac{1}{6}}$.

Câu 3. Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^m + a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$. C. $(a^m)^n = (a^n)^m$. D. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Câu 4. Với $a > 0, b > 0, \alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. B. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. C. $\frac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. D. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Câu 5. Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

- A. $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. B. $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. C. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. D. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Câu 6. Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. B. $(a^m)^n = a^{m+n}$. C. $(a+b)^m = a^m + b^m$. D. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Câu 7. Với α là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\sqrt{10^\alpha} = (\sqrt{10})^\alpha$. B. $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. C. $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. D. $(10^\alpha)^2 = (10)^{\alpha^2}$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

- A. $Q = b^{\frac{4}{3}}$. B. $Q = b^{\frac{4}{9}}$. C. $Q = b^{\frac{5}{9}}$. D. $Q = b^2$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = \sqrt{x}$ B. $P = x^{\frac{1}{8}}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$

Câu 10. Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$ bằng

- A. $a^{\frac{7}{3}}$ B. $a^{\frac{5}{6}}$ C. $a^{\frac{11}{6}}$ D. $a^{\frac{10}{3}}$

Câu 11. Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x$ B. $P = x^{\frac{11}{6}}$ C. $P = x^{\frac{7}{6}}$ D. $P = x^{\frac{5}{6}}$

Câu 12. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$ B. $P = \sqrt{x}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$

Câu 13. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2 \sqrt{x}}} = x^\alpha$ (với $x > 0$), giá trị của α là

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 14. Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

- A. $\sqrt[3]{a^2}$ B. $a^{\frac{8}{3}}$ C. $a^{\frac{3}{8}}$ D. $\sqrt[6]{a}$

Câu 15. Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $P = x^{-2}$ B. $P = x^{-\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{1}{2}}$ D. $P = x^2$

Câu 16. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$ B. $P = x^{\frac{7}{12}}$ C. $P = x^{\frac{5}{8}}$ D. $P = x^{\frac{7}{24}}$

Câu 17. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

- A. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ B. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$ C. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$ D. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

Câu 18. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$ mệnh đề nào dưới đây đúng

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

Câu 19. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

Câu 20. Cho $(\sqrt{2} - 1)^m < (\sqrt{2} - 1)^n$. Khi đó

- A. $m = n$ B. $m < n$ C. $m > n$ D. $m \perp n$

Câu 21. Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

B. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$.

C. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$.

D. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

A. $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$

B. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$

C. $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$

D. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$

Câu 23. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{5}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{5}}$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

C. $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$

D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$

Câu 24. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$

B. $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$

C. $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$

D. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$

Câu 25. Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[2]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

A. $a > 0$.

B. $0 < a < 1$

C. $a > 1$.

D. $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 26. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{2}{3}}$

B. $P = x^{\frac{1}{2}}$

C. $P = x^{\frac{13}{24}}$

D. $P = x^{\frac{1}{4}}$

Câu 27. Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{2}{1009}$.

B. $\frac{1}{1009}$.

C. $\frac{3}{1009}$.

D. $\frac{3}{2018^2}$.

Câu 28. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

A. $P = a$.

B. $P = a^3$.

C. $P = a^4$.

D. $P = a^5$.

Câu 29. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

A. $P = a$

B. $P = a^3$

C. $P = a^4$

D. $P = a^5$

Câu 30. Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn P được kết quả:

A. a^5 .

B. a .

C. a^3 .

D. a^4 .

Câu 31. Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{21}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{18}$

Câu 32. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 312$.

B. $m^2 + n^2 = 543$.

C. $m^2 - n^2 = -312$.

D. $m^2 + n^2 = 409$.

Câu 33. Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức

A. $P = a(a+1)$

B. $P = a - 1$

C. $P = a$

D. $P = a + 1$

Câu 34. Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ ta được

A. $P = ab$

B. $P = a + b$

C. $P = a^4b + ab^4$

D. $P = ab(a+b)$

Câu 35. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P \in (330; 340)$

B. $P \in (350; 360)$

C. $P \in (260; 370)$

D. $P \in (340; 350)$

Câu 36. Cho $a > 0, b > 0$, giá trị của biểu thức

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 37. Tính giá trị của biểu thức

A. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$

B. $P = 1$

C. $P = 7 - 4\sqrt{3}$

D. $P = 7 + 4\sqrt{3}$

Câu 38. Cho hàm số

A. $M = 2017^{1008} - 1$

B. $M = -2017^{1008} - 1$

C. $M = 2017^{2016} - 1$

D. $M = 1 - 2017^{2016}$

$$P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$$

Câu 39. Giá trị của biểu thức

A. -9 .

B. -10 .

C. 10 .

D. 9 .

$$f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}} (\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$$

Câu 40. Cho hàm số

A. $2017^{2018} + 1$.

B. $-2017^{1009} - 1$.

C. 2017^{1009} .

D. $2017^{1009} + 1$.

Câu 41. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^{12}} \sqrt{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2,7)$ bằng

A. $0,027$.

B. 27 .

C. $2,7$.

D. $0,27$.

$$P = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1 - \sqrt{3})^{2017}}{(1 + \sqrt{3})^{2019}}$$

Câu 42. Tính giá trị biểu thức

A. $P = -2^{2017}$.

B. -1 .

C. -2^{2019} .

D. 2^{2018} .

Câu 43. Giá trị biểu thức $(3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$ bằng

A. $(\sqrt{2} + 1)^{2019}$.

B. $(\sqrt{2} - 1)^{2017}$.

C. $(\sqrt{2} - 1)^{2019}$.

D. $(\sqrt{2} + 1)^{2017}$.

$$T = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{a}{b}} - \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

Câu 44. Cho $a > 0, b > 0$ giá trị của biểu thức

A. 1 .

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 45. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5} + 2)^{-2017} < (\sqrt{5} + 2)^{-2018}$

B. $(\sqrt{5} + 2)^{2018} > (\sqrt{5} + 2)^{2019}$

C. $(\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019}$

D. $(\sqrt{5} - 2)^{2018} < (\sqrt{5} - 2)^{2019}$

Câu 46. So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$.

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$

B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,3}$

C. $\sqrt{3}^{0,3} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$

D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3} < (0,7)^{3,2}$

Câu 47. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$

B. $0 < a < 1, b > 1$

C. $a > 1, 0 < b < 1$

D. $a > 1, b > 1$

Câu 48. So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$?

A. $c < a < b$.

B. $b < a < c$.

C. $c < b < a$.

D. $a < c < b$.