|  |  |
| --- | --- |
|  | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN****QUẬN NAM TỪ LIÊM****MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021***Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)* |

# ĐỀ

**Bài 1.** **(4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức  với

a) Rút gọn biểu thức 

b) Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

2. Cho biểu thức  . Chứng minh rằng  là một số nguyên.

**Bài 2.** **(4,0 điểm)**

1. Cho  là các số nguyên cùng chia hết cho . Chứng minh rằng:  cũng chia hết cho  (q là số tự nhiên).

2. Cho  là các số nguyên thỏa mãn 

Chứng minh rằng: viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**Bài 3.** **(4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 

2. Giải phương trình : 

**Bài 4.** **(6,0 điểm)**

Cho hình vuông  độ dài cạnh bằng  và có tâm là . Điểm  là một điểm di chuyển trên  ( khác  và ). Gọi  là giao điểm của tia  và đường thẳng .  là giao điểm của  và .

1) Chứng minh rằng:  không đổi.

2) Chứng minh: .

3) Gọi  là giao điểm của  và . Tìm vị trí của điểm  để diện tích tam giác  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 5.** **(1,0 điểm)**

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

🙢**HẾT**🙠

|  |  |
| --- | --- |
|  | **ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN****QUẬN NAM TỪ LIÊM****MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021** |

**Bài 1.** **(5,0 điểm)**

1. Cho biểu thức  với

a) Rút gọn biểu thức 

b) Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

2. Cho biểu thức  . Chứng minh rằng  là một số nguyên.

**Lời giải**

1. a) Rút gọn biểu thức 

 với











Vậy  với

b) Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Với  ta có: . Áp dụng bất đẳng thức Cô- Si ta có:



Mặt khác: 

Hay 

Do đó: .Dấu “=” xảy ra.

Vậy  tại .

2. Ta có:

 



 ( Vô lí)

Vậy  là một số nguyên.

**Bài 2.** **(4,0 điểm)**

1. Cho  là các số nguyên cùng chia hết cho . Chứng minh rằng:  cũng chia hết cho  (q là số tự nhiên).

2. Cho  là các số nguyên thỏa mãn 

Chứng minh rằng: viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**Lời giải**

1. Ta có:  dư 

dư 

dư 

Do đó: dư  hay 

Ta có: 

Mà  dư nên 

Do đó: 

Vậy  cũng chia hết cho  (q là số tự nhiên).

2. Ta có: 

Do đó: với mọi thì chia dư . Nên với  lẻ thì chia dư 

Suy ra: không xảy ra  (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3 )

Vậy trong các số  có ít nhất 1 số chẵn. Ta có:  là số lẻ.

Đặt 

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

**Bài 3.** **(4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 

2. Giải phương trình : 

**Lời giải**

1. Tìm số nguyên x,y thỏa mãn:

 

Vì  và vai trò của x,y như nhau; ta giả sử ; suy ra:

 Mà  là số chính phương 

+ TH1:  không có giá trị

+ TH2: 

Vậy 

2. Giải phương trình :  (ĐK: )

Vì 





Giải phương trình  bình phương 2 vế ta có :



Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 4.** **(6,0 điểm)**

Cho hình vuông  độ dài cạnh bằng  và có tâm là . Điểm  là một điểm di chuyển trên  ( khác  và ). Gọi  là giao điểm của tia  và đường thẳng .  là giao điểm của  và .

1) Chứng minh rằng:  không đổi.

2) Chứng minh: .

3) Gọi  là giao điểm của  và . Tìm vị trí của điểm  để diện tích tam giác  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

****

**1)** Kẻ  

Ta có: 





Trong  vuông tại  có: 

 không đổi

Vậy  không đổi.

**2) ** cắt  tại ;  cắt  tại 

Ta có: 

Do 



Mặt khác  (do )



Từ  



 là hình bình hành



Mà 

**3)**  cắt  tại 

Áp dụng định lí Papuyt  thẳng hàng



Lấy  sao cho 

 là hình bình hành



Mà 



 vuông tại C





Kẻ 

Gọi  là giao điểm của  và 

Ta có: 

Mà 



Do đó: 

Dấu "=" xảy ra  là trung điểm 

**Bài 5.** **(1,0 điểm)**

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

**Lời giải**

Xét ngũ giác đều ABCDE, ta nhận thấy ba đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 2 khả năng:

- Nếu tô 5 đỉnh bởi đủ ba loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

- Nếu tô 5 đỉnh bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy, luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác nhau.