LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn thi: Toán ( Chuyên )

**1. PHẦN ĐỀ THI**

**Câu 1** ( 2,0 điểm )

1) Giải phương trình



2) Cho *a,b,c* là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện  và 

Chứng minh



**Câu 2** ( 2,0 điểm )

1) Cho ba số nguyên *a,b* và *c* thỏa mãn  chia hết cho 6. Chứng minh *abc* chia hết cho 54

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương ( x,y ) thỏa mãn 

**Câu 3** ( 2,0 điểm )

1) Tìm tất cả cặp số nguyên ( x,y ) sao cho *xy* là số chính phương và  là số nguyên tố

2) Với các số thực không âm *a,b* và *c* thỏa mãn , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Câu 4** ( 3,0 điểm ) Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn ( *AB < AC* ), nội tiếp đường tròn(*O*). Ba đường cao *AD*,*BE* và *CF* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Đường thẳng *EF* cắt đường thẳng *AD* tại điểm *Q*. Gọi *M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC* và *AH*. Đường thẳng *IM* cắt đường thẳng *EF* tại điểm *K.*

1) Chứng minh rằng tam giác *AEK* đồng dạng với tam giác *ABM*

2) Đường thẳng *EF* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *S*, đường thẳng *SI* cắt đường thẳng *MQ* tại điểm *T*. Chứng minh rằng bốn điểm *A*,*T*,*H* và *M* cùng thuộc một đường tròn

3) Tia *TH* cắt đường tròn (*O*) tại điểm *P*. Chứng minh rằng ba điểm *A*,K và *P* thẳng hàng

**Câu 5** ( 1,0 điểm ) Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm *M* nếu điểm *M* nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác

**2. PHẦN LỜI GIẢI**

**Câu 1** ( 2,0 điểm )

1) Điều kiện xác định 

Sử dụng nhân liên hợp, ta có phương trình ban đầu tương đương với



Chuyến vế, rút nhân tử chung ta được



Ta có  nên  với mọi , kéo theo x = 4 ( thỏa mãn điều kiện xác định )

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 4

2) Theo đề bài ta có  và  nên . Nếu a + b = 0 thì a = -b. Tuy nhiên khi đó  là trái giả thiết. Do đó, ta phải có  dẫn tới 

Hoàn toàn tương tự ta có  và 

Từ đây ta suy ra



Đây chính là điều phải chứng minh

**Câu 2** ( 2,0 điểm )

1) Nếu cả ba số *a,b,c* đều lẻ thì  sẽ lẻ và do đó  không chia hết cho 6, trải giả thiết. Do đó, trong ba số *a.b.c* phải có ít nhất một số chẵn, nghĩa là *abc* chia hết cho 2

Nếu *abc* không chia hết cho 3 tức là trong 3 số *a,b,c* không có số nào chia hết cho 3, dẫn tới  ( mod 3 ). Vì  chia hết cho 3 nên -2ab cũng chia hết cho 3, vô lí vì *a.b.c* đều không chia hết cho 3. Do đó, ta phải có *abc* chia hết cho 3. Từ đây ta có ngay  chia hết cho 3. Vì số chính phương khi chia 3 thì dư chỉ có thể là 0,1 cả 3 số  phải chia hết cho 3 kéo theo *a,b,c* đều chia hết cho 3. Khi đó *abc* chia hết cho 27

Vì ( 27,2 ) = 1 nên *abc* chia hết cho 27.2 = 54. Phép chứng minh hoàn tất

2) Phương trình đã cho được viết lại thành



 Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y, tính biệt thức



Điều kiện cần để phương trình có nghiệm *y* nguyên là  là số chính phương. Suy ra  là số chính phương ( do *x* nguyên dương nên ). Vì  là số lẻ và nếu gọi  thì *d* lẻ và  nên ta phải có *d* = 1. Suy ra  đều là các số chính phương. Mà



nên  và tìm được *x* = 1. Thay *x* = 1 tìm được *y* = 1, *y* = 4. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương ( *x,y* ) là ( 1,1 ) và ( 1,4 )

**Câu 3** ( 2,0 điểm )

1) Đặt  với  thì  Chú ý là  nên *x,y* ở cùng phía với 0. Và nếu cặp ( *x,y* ) thỏa mãn thì cặp ( *-x,-y* ) cũng thỏa mãn, do đó ta chỉ cần xét . Khi đó  và do  là số nguyên tố nên ta phải có . Do  nên  nên để có đẳng thức  thì . Vậy, có hai cặp ( *x,y* ) là ( 1,1 ),( -1,-1 )

 2) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có



Suy ra  Dâu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = 0, . Gía trị nhỏ nhất của *P* là 

Lại có, theo bất đẳng thức AM-GM thì



kéo theo



Dâu bằng xảy ra khi và chỉ khi . Giả ta tìm được . Gía trị lớn nhất của *P* là 

**Câu 4** ( 3,0 điểm )



1) Xét các tam giác *BFC* và *BEC* lần lượt vuông tại *F* và *E* với các trung tuyến tương ứng là *FM* và *EM*, khi đó ta được *FM* = *EM* = *BC*. Tương tự, xét các tam giác *AFH* và *AEH* lần lượt vuông tại *F* và *E* với các trung tuyến tương ứng là *FI* và *EI*, khi đó ta cũng được *FI* = *EI* =  *AH*. Như vậy, *MI* là đường trung trực của *EF*, vì thế *K* là trung điểm của *EF*. Mặt khác, lại chú ý rằng  nên ta được , kéo theo . Từ đó ta thu được  và . Do đó, 

2) Xét  với *ID*  *SM* và *SK*  *IM* ( vì *MI* là trung trực của *EF* ), vì thế *Q* là trực tâm của . Như vậy, *MQ*  *MT* *SI* và từ đó ta được . Do đó, năm điểm *I,T,E,F,M* cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến *QT*.*QM* = *QE*.*QF*. Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác *AEFH* là tứ giác nội tiếp, ta cũng có *QE*.*QF* = *QA*.*QH*. Như vậy, *QT*.*QM* = *QA*.*QH*, vì vậy bốn điểm *A,T,H,M* cùng thuộc một đường tròn

3) Trên tia *TH* lấy một điểm *P’* sao cho *HT*.*HP’* = *HA*.*HD*. Khi đó, ta cũng được *HT*.*HP’* = *HB*.*HE* = *HC*.*HF* và do đó các tứ giác *TBP’E* và *TCP’F* là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có  và . Từ đó, chú ý rằng tứ giác *TIEF* nội tiếp nên , ta thu được





Do đó  (O) và kéo theo . Như vậy, *HA*.*HD* = *HT*.*HP* nên tứ giác *ATDP* nội tiếp và . Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc  và *AO*  *EF*, kết hợp với , ta thu được  và *IM* // *AO* (  *EF* ). Lại chú ý rằng các tứ giác *ATHM* và *ITDM* là các tứ giác nội tiếp, ta được



Do đó, , từ đó suy ra *A,P,K* thẳng hàng

**Câu 5 ( 1,0 điểm )**

1)

Mỗi một phần đều là tam giác vuông cân với độ dài cạnh bên bằng 

Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 8 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần có chứa ít nhất

 điểm

Nói cách khác, tồn tại một tam giác vuông cân có cạnh bằng  chứa ít nhất 253 điểm. Mà tam giác vuông cân có cạnh bên bằng thì sẽ chứa trong một tam giác đều có cạnh bằng , ta có điều phải chứng minh

2) Gọi hình vuông được cho là *ABCD* với tâm *O*. Ta sử dụng hai đường vuông góc *IF*,*EG* đi qua *O* và tạo với các cạnh một góc  để chia hình vuông thành 4 tứ giác *AIOG*, *BIOE*, *CEOF*, *DFOG* như hình vẽ



Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 4 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần phủ ít nhất

 điểm

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác *AIOG* phủ ít nhất 506 điểm. Ta dựng tam giác đều *IMN* sao cho  và  như hình vẽ. Kẻ *OH*  *AB*. Ta có . Tương tự . Ta lại có . Suy ra



Như vậy tam giác đều *IMN* có cạnh nhỏ hơn , suy ra tồn tại tam giác đều phủ toàn bộ tam giác đều *IMN*. Tam giác đều ấy do đó phủ toàn bộ tứ giác *AIOG*, suy ra nó cũng phủ ít nhát 506 điểm được cho