ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ

(TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ)

HÀ NỘI - 2012

TÍNH ĐỊNH THỨC

Chuyên đề này nghiên cứu về các phương pháp tính định thức cấp n tổng quát.

1. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ DẠNG TAM GIÁC

Ta cần biến đổi định thức cấp n về định thức dạng tam giác. Khi đó định thức cấp n bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 1. Tính định thức cấp n:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Giải:

Lấy các dòng i (i = 2, 3,…, n) trừ đi dòng thứ nhất ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Ví dụ 2. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Lấy các dòng i (i = 2, 3,…, n) trừ đi dòng thứ nhất ta được:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

Đưa bội $a_1 - x$ ở cột đầu, $a_2 - x$ ở cột thứ 2,…, $a_n - x$ ở cột thứ n ra ngoài ta được:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times\begin{vmatrix}\frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x}\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

Viết $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$ và cộng tất cả các cột vào cột đầu tiên ta được:

$$D=(a_1-x)\dots(a_n-x)\times\begin{vmatrix}1+\frac{x}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right)$$

2. PHƯƠNG PHÁP TÁCH THÀNH CÁC THỪA SỐ

Định thức cần tính được xem như một đa thức của một hay nhiều phần tử của nó. Biến đổi định thức để định thức này chia hết cho một số các thừa số, do đó (nếu các thừa số này nguyên tố cùng nhau) thì định thức và tích các thừa số này lệch nhau một hằng số.

Tiếp đó, để xác định được chính xác giá trị của định thức ta cần so sánh hệ số theo một biến nào đó của định thức và tích trên, từ đó xác định được giá trị của định thức.

Ví dụ 3. Tính định thức:

$$D=\begin{vmatrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & z & y\\ y & z & 0 & x\\ z & y & x & 0\end{vmatrix}$$

Giải:

Cộng tất cả các cột vào cột đầu tiên, ta thấy định thức chia hết cho $x+y+z$; sau đó cộng vào cột thứ nhất cột thứ 2, trừ đi cột thứ 3 và thứ tư ta được định thức chia hết cho $y+z-x$; cộng vào cột thứ 3, cột thứ nhất và trừ đi cột thứ 2, thứ 4 ta được định thức chia hết cho $x-y+z$; cuối cùng, cộng vào cột thứ 4 cột thứ nhất, trừ đi cột thứ 2, thứ 3 ta được định thức chia hết cho $x+y-z$. Vì x, y, z là các biến số độc lập với nhau, nên các thừa số trên là nguyên tố cùng nhau, vì thế định thức chia hết cho tích:

$$(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$$

Tích này chứa x^4 với hệ số $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$, trong khi định thức cũng chứa x^4 nhưng với hệ số +1, vì thế:

$$\begin{aligned} D &= -(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z) \\ &= x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2 \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính định thức **Vandermonde** cấp n sau:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Giải:

Coi D_n là đa thức của ẩn x_n với các hệ số phụ thuộc vào $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ta thấy đa thức trên có các nghiệm là $x_n = x_1, x_n = x_2, \ldots, x_n = x_{n-1}$, vì thế nó chia hết cho $x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}$.

Tất cả các phần tử trên là nguyên tố cùng nhau (do $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ là các phần tử bất kỳ, không phụ thuộc vào nhau). Do đó D_n chia hết cho tích của chúng, nghĩa là

$$D_n = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

Khai triển D_n theo dòng cuối cùng, ta thấy rằng nó là đa thức bậc $n-1$ của x_n và hệ số của x_n^{n-1} bằng với định thức Vandermonde D_{n-1} với các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, từ hệ số của x_n trong phần tích bên phải của đẳng thức trên là 1 ta suy ra $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ không chứa x_n, so sánh các hệ số trong cả hai vế ta được $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Khi đó $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$, áp dụng công thức này ta lại có:

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2})$$

Lặp lại quá trình này, với chú ý rằng $D_1 = 1$ ta được:

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG CÔNG THỨC TRUY HỒI

Trong phương pháp này, ta dùng cách khai triển định thức theo các dòng hoặc các cột một cách hợp lý để đưa về định thức có cùng dạng nhưng với cấp nhỏ hơn. Có thể là đưa D_n về hệ thức chỉ liên hệ với D_{n-1}, hoặc liên hệ với cả D_{n-1} và D_{n-2}.

Giả sử bằng cách khai triển nào đó, ta đưa được về công thức truy hồi dạng:

$$D_n = p.D_{n-1} + q.D_{n-2}, \qquad n > 2 \tag{1}$$

với p, q là các hằng số. Ta xét riêng từng trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu q = 0 thì ta tính được $D_n = p^{n-1}.D_1$, trong đó D_1 là định thức cấp 1 dạng đã cho.

Trường hợp 2. Nếu $q \neq 0$, gọi α, β là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - p.x - q = 0$. Khi đó $p = \alpha + \beta, q = -\alpha.\beta$ và (1) được viết dưới dạng:

$$D_n - \beta.D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta.D_{n-2}\right) \tag{2}$$

hoặc

$$D_n - \alpha.D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha.D_{n-2}\right) \tag{3}$$

Trường hợp 2a. Giả sử rằng $\alpha \neq \beta$, khi đó từ (2) và (3) ta được

$$D_n - \beta.D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta.D_1\right) \text{ và}$$

$$D_n - \alpha.D_{n-1} = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha.D_1\right)$$

Vì vậy

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}.\left(D_2 - \beta D_1\right) - \beta^{n-1}.\left(D_2 - \alpha D_1\right)}{\alpha - \beta}$$

Hay $D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$ với $C_1 = \dfrac{D_2 - \beta D_1}{\alpha\left(\alpha - \beta\right)}, C_2 = -\dfrac{D_2 - \alpha D_1}{\beta\left(\alpha - \beta\right)}$ (4)

Công thức (4) này có thể nhớ dễ dàng, cụ thể C_1 và C_2 có thể tính lại bằng cách xét (4) với n = 1, n = 2 thì được: $D_1 = C_1\alpha + C_2\beta, D_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$, từ hệ này giải được C_1 và C_2 theo α, β, D_1, D_2.

Trường hợp 2b. Bây giờ ta xét trường hợp $\alpha = \beta$, khi đó (2) và (3) trở thành

$$D_n - \alpha.D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha.D_{n-2}\right)$$

Do đó

$$D_n - \alpha.D_{n-1} = A\alpha^{n-2} \tag{5}$$

Với $A = D_2 - \alpha D_1$.

Trong (5), xét với $n-1$ ta được $D_{n-1} - \alpha.D_{n-2} = A\alpha^{n-3}$, do đó $D_{n-1} = \alpha.D_{n-2} + A\alpha^{n-3}$, thế ngược trở lại (5) ta được $D_n = \alpha^2.D_{n-2} + 2A\alpha^{n-2}$, cứ lặp lại như thế ta được

$D_n = \alpha^{n-1}.D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$ hoặc $D_n = \alpha^n\left[(n-1)C_1 + C_n\right]$ với $C_1 = \frac{A}{\alpha^2}, C_2 = \frac{D_1}{\alpha}$ (vì $q \neq 0$ nên ở đây $\alpha \neq 0$).

Chú ý:

Khi trình bày một bài toán tính định thức cụ thể ta nên làm tuần tự như trên (việc này là không khó khăn), không được áp dụng luôn công thức vì sẽ dễ sai lầm về công thức và người đọc khó chấp nhận kết quả đưa ra.

Ví dụ 5. Sử dụng phương pháp truy hồi tính định thức trong ví dụ 2.

Giải:

Khai triển cột cuối cùng bằng cách viết $a_n = x + (a_n - x)$, ta đưa định thức D_n về tổng của hai định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & \cdots & x & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

Trong định thức đầu tiên, lấy tất cả các cột trừ đi cột cuối cùng, và khai triển định thức thứ hai theo cột cuối cùng ta được:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1}$$

Đây chính là công thức truy hồi, khi đó ta lại tiếp tục khai triển D_{n-1} và thay vào công thức trên được:

$$\begin{aligned} D_n = {} & x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\ & + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x) \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục $n-1$ lần với chú ý rằng $D_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$, ta có:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

Ví dụ 6. Tính định thức cấp n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải:

Khai triển theo dòng thứ nhất, rồi theo cột thứ nhất ta được công thức truy hồi là:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

Phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $\alpha = 2, \beta = 3$.

Do đó công thức trên được viết lại là:

$$D_n - 2.D_{n-1} = 3\left(D_{n-1} - 2.D_{n-2}\right)$$
$$D_n - 3.D_{n-1} = 2\left(D_{n-1} - 3.D_{n-2}\right)$$

Do đó ta được:

$$D_n - 2.D_{n-1} = 3^{n-2}\left(D_2 - 2.D_1\right)$$
$$D_n - 3.D_{n-1} = 2^{n-2}\left(D_2 - 3.D_1\right)$$

Ta có $D_1 = 5, D_2 = 19$, giải hệ hai phương trình này với các "ẩn" được coi là D_n và D_{n-1} ta được:

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

4. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH MỘT ĐỊNH THỨC THÀNH TỔNG CÁC ĐỊNH THỨC

Một số định thức được tính bằng cách phân tích nó thành tổng của các định thức cùng cấp.

Ví dụ 7. Tính định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Phân tích định thức theo dòng thứ nhất thì định thức phân tích thành tổng của hai định thức, sau đó mỗi định thức này lại phân tích thành hai định thức nữa ứng với phân tích dòng thứ hai, cứ tiếp tục như thế, đến dòng cuối cùng ta được 2^n định thức.

Khi phân tích như vậy, ta thấy mỗi một dòng đều là các phần tử giống nhau hết, hoặc đều là a_i, hoặc đều là b_j. Do đó khi $n > 2$ thì định thức có ít nhất 2 dòng tỷ lệ, do đó định thức bằng 0. Khi $n \le 2$, ta được:

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \left(a_1 - a_2\right)\left(b_2 - b_1\right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TẤT CẢ CÁC PHẦN TỬ CỦA ĐỊNH THỨC

Phương pháp này được áp dụng khi thay đổi tất cả các phàn tử của định thức bởi cùng một số thì ta được mọi phần bù đại số được tính một cách dễ dàng. Phương pháp này dựa trên tính chất sau: Nếu cộng tất cả các phần tử của định thức D với số x thì định thức sẽ tăng thêm một lượng bằng x nhân với tổng của tất cả các phần bù đại số của D. Thật vậy, nếu:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

Khai triển dòng thứ nhất của D' thành tổng của hai định thức, sau đó lại khai triển các định thức này theo dòng thứ hai, cứ tiếp tục như thế ta được:

Những định thức chứa hơn một dòng bằng x hết thì bằng 0.

Những định thức chỉ chứa một dòng bằng x, thì khai triển theo các dòng này ta dễ dàng được công thức: $D'=D+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

Vì vậy, để tính định thức của D', ta sẽ thay bằng tính định thức D và tính tổng các phần bù đại số của D.

Ví dụ 8. Tính định thức D_n trong ví dụ 2.

Giải:

Lấy tất cả các phần tử trừ đi x, ta được định thức

$$D=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

Tất cả các phần bù đại số của các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0, và bù đại số của mỗi phần tử trên đường chéo chính bằng tích của các phần tử còn lại trên đường chéo chính, vì thế:

$$\begin{aligned} D_n &= (a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_{n-1}-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\ldots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\ldots(a_n-x) \\ &= x(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right) \end{aligned}$$

BÀI TẬP

TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ DẠNG TAM GIÁC

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

8. Tính định thức cấp n trong đó các phần tử được xác định bởi $a_{ij} = \min(i, j)$.

9. Tính định thức cấp n trong đó các phần tử được xác định bởi $a_{ij} = \max(i, j)$.

10. Tính định thức cấp n trong đó các phần tử được xác định bởi $a_{ij} = |i - j|$.

TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH CÁC THỪA SỐ:

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1-x \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$

TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÔNG THỨC TRUY HỒI:

17. $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÁCH BIỂU DIỄN THÀNH TỔNG CÁC ĐỊNH THỨC:

27. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n & a_n \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

TÍNH CÁC ĐỊNH THỨC SAU:

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$ 32. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$

43. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \cdots & x_n^3+x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$

52. $\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \cdots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \cdots & x+a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \cdots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$

54. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$ với $\varphi_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + \cdots + a_{kk}$.

56. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \cdots & f_1(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \cdots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \cdots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix}$

Với $f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk}$.

57. $\begin{vmatrix} 1 & C_{x_1}^1 & C_{x_1}^2 & \cdots & C_{x_1}^{n-1} \\ 1 & C_{x_2}^1 & C_{x_2}^2 & \cdots & C_{x_2}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{x_n}^1 & C_{x_n}^2 & \cdots & C_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$ Với $C_x^h = \dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

58. $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

59. $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & \dfrac{x_2}{x_2-1} & \cdots & \dfrac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

60. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$

61. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

62. $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n & \cos\alpha_n & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$

63. $\begin{vmatrix} f_n(x_1,y_1) & y_1 f_{n-1}(x_1,y_1) & \cdots & y_1^{n-1} f_1(x_1,y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2,y_2) & y_2 f_{n-1}(x_2,y_2) & \cdots & y_2^{n-1} f_1(x_2,y_2) & y_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1} f_{n-1}(x_{n+1},y_{n+1}) & \cdots & y_{n+1}^{n-1} f_1(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$

Với $f_i(x,y)$ là đa thức hai biến x, y với bậc i.

64. $\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

65. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$

66. $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

67. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

68. $\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$

69. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

70. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}$

71. $\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix}$

72. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

73. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}$

74. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$ 75. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

76. $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$ với $f_i(x)$ là đa thức bậc không lớn hơn $n-2$.

77. $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$ 77. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$

78. $\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}$ 79. $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$

80. $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$ 81. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$

82. $\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$ 83. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

84. Dãy Fibonaci (Fibonaci là nhà toán học người Italy ở thế kỷ 13) là dãy bắt đầu với các số 1, 2 và sau đó mỗi số sau bằng tổng của hai số đứng ngay trước nó: Ta có dãy 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…

Chứng minh rằng phần tử thứ n của dãy Fibonaci bằng định thức cấp n sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

85. $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}$

86. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

87. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

88. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$

89. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}$

90. Chứng minh rằng phương trình:

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

Sử dụng kết quả này và kết quả của bài 88 suy ra biểu diễn $\cos n\alpha$ theo $\cos\alpha$.

91. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Với định thức trên cấp $n-1$. Sử dụng đẳng thức trên và bài tập 88, hãy biểu diễn $\sin n\alpha$ thành tích của $\sin\alpha$ thành đa thức của $\cos\alpha$.

92. Không tính định thức, hãy chứng minh đẳng thức sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

93. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ 94. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

95. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \cdots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \cdots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \cdots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x & a+2x & a+3x & \cdots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}$

96. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$

97. Không tính toán, hãy xem xét mối liên hệ giữa hai định thức vòng tròn sau đây:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix} \text{ và } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

98. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$ 99. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \cdots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \cdots & C_{m+n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \cdots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$

100. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 101. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \cdots & C_{n+2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}$

102. $\begin{vmatrix} C_{p+n}^{n} & C_{p+n+1}^{n} & \cdots & C_{p+2n}^{n} \\ C_{p+n+1}^{n} & C_{p+n+2}^{n} & \cdots & C_{p+2n+1}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p+2n}^{n} & C_{p+2n+1}^{n} & \cdots & C_{p+3n}^{n} \end{vmatrix}$

103. $\begin{vmatrix} 1 & C_{p}^{1} & C_{p}^{2} & \cdots & C_{p}^{n} \\ 1 & C_{p+1}^{1} & C_{p+1}^{2} & \cdots & C_{p+1}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{p+n}^{1} & C_{p+n}^{2} & \cdots & C_{p+n}^{n} \end{vmatrix}$

104. $\begin{vmatrix} C_{m}^{p} & C_{m}^{p+1} & \cdots & C_{m}^{p+n} \\ C_{m+1}^{p} & C_{m+1}^{p+1} & \cdots & C_{m+1}^{p+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m+n}^{p} & C_{m+n}^{p+1} & \cdots & C_{m+n}^{p+n} \end{vmatrix}$

105. $\begin{vmatrix} 1 & C_{2}^{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_{3}^{2} & C_{3}^{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_{4}^{2} & C_{4}^{3} & C_{4}^{4} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{n}^{2} & C_{n}^{3} & C_{n}^{4} & \cdots & C_{n}^{n} \\ 1 & C_{n+1}^{2} & C_{n+1}^{3} & C_{n+1}^{4} & \cdots & C_{n+1}^{n} \end{vmatrix}$

106. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 6 & 10 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2!} \\ 4 & 10 & 20 & \cdots & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \frac{n(n+1)}{2!} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} & \cdots & \frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!} \end{vmatrix}$

107. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & C_{1}^{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & C_{2}^{1} & C_{2}^{2} & 0 & \cdots & 0 & x^{2} \\ 1 & C_{3}^{1} & C_{3}^{2} & C_{3}^{3} & \cdots & 0 & x^{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{n}^{1} & C_{n}^{2} & C_{n}^{3} & \cdots & C_{n}^{n-1} & x^{n} \end{vmatrix}$

108. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \cdots & x^{2} \\ 1 & 3 & 3.2 & 3! & 0 & \cdots & x^{3} \\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 4! & \cdots & x^{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \cdots & x^{n} \end{vmatrix}$

109. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{0} \\ 1 & C_{1}^{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1} \\ 1 & C_{2}^{1} & C_{2}^{2} & 0 & \cdots & 0 & x_{2} \\ 1 & C_{3}^{1} & C_{3}^{2} & C_{3}^{3} & \cdots & 0 & x_{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{n}^{1} & C_{n}^{2} & C_{n}^{3} & \cdots & C_{n}^{n-1} & x_{n} \end{vmatrix}$

110. $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

111. $\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$

112. $\begin{vmatrix} a_{1} & x & x & \cdots & x \\ y & a_{2} & x & \cdots & x \\ y & y & a_{3} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_{n} \end{vmatrix}$

113. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \cdots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 114. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

115. $\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+1 \end{vmatrix}$

116. $\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & a_n \\ -n & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$

117. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$

118. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$

119. $\begin{vmatrix} a^{p}-x & a^{p+1}-x & \cdots & a^{p+n-1}-x \\ a^{p+n}-x & a^{p+n+1}-x & \cdots & a^{p+2n-1}-x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{p+n(n-1)}-x & a^{p+n(n-1)+1}-x & \cdots & a^{p+n^2-1}-x \end{vmatrix}$

120. $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \cdots & a^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \cdots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}$

121. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

122. $\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \cdots & b \\ a & c_1 & b & b & \cdots & b \\ a & 0 & c_2 & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$

123. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \cdots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$

124. $\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}$

125. $\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & (x_1-a_1)^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_1-a_1)^2 & \cdots & a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & (x_1-a_1)^2 \end{vmatrix}$

126. $\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_n \end{vmatrix}$

127. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

128. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

129. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

130. $\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$

131. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$

132. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+4 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}$

133. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$

134. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+a & x & \cdots & x \\ x & x & x+a^2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+a^n \end{vmatrix}$

135. $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$

136. $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$

137. $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$

CÁC BÀI TOÁN KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH THỨC

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Cho ma trận vuông A cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó $\det(A) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$, với $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ là số nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ của n số tự nhiên đầu tiên.

Rất nhiều bài toán liên quan đến định nghĩa định thức, đặc biệt là các bài toán về chứng minh tính không suy biến của một ma trận số (thường là các số nguyên) với các tính chất nào đó.

Ví dụ 1. Cho ma trận A cấp n mà các phần tử của nó đều là các số nguyên, chứng minh rằng ma trận $6A - 5E_n$ không suy biến.

Giải:

Ta thấy rằng ma trận $B = 6A - 5E_n = (b_{ij})_n$ có các đặc điểm sau:

1) Có mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều là các số nguyên chẵn;
2) Các phần tử trên đường chéo chính là các số nguyên lẻ.

Do đó, theo định nghĩa định thức thì:

$$\det(B) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} b_{1\alpha_1}b_{2\alpha_2}\ldots b_{n\alpha_n}$$

Với $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ là số nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Định thức trên bao gồm $n!$ phần tử, trong đó $n!-1$ phần tử là các số chẵn, chỉ có duy nhất phần tử $b_{11}.b_{22}\ldots b_{nn}$ ứng với hoán vị $(1,2,\ldots,n)$ là số lẻ. Do đó định thức của B là số lẻ, nghĩa là $\det(B) \neq 0$.

2. MỐI LIÊN HỆ VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Một số bài toán được núp dưới "vỏ bọc" là một hệ phương trình tuyến tính (thuần nhất). Ta đã biết trong chương trình Toán Cao Cấp 1, với A là ma trận vuông thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$, và có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

Ví dụ 2. (Đề thi Olympic Toàn Quốc năm 1994)

Cho a_{ij} là các số nguyên $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Giải:

Đưa hệ phương trình về hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn}-1)x_n = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số không suy biến, vì có tất cả các phần tử đều là số nguyên chẵn, trừ các phần tử trên đường chéo chính là số nguyên lẻ, do đó hệ này có duy nhất một nghiệm, và là nghiệm tầm thường.

Ví dụ 3. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận cấp n thoả mãn điều kiện:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Chứng minh rằng A là ma trận không suy biến.

Giải:

Giả sử ngược lại, nghĩa là A là ma trận suy biến, $\det(A) = 0$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nhận A làm ma trận hệ số có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Trong vô số nghiệm đó, ngoài nghiệm tầm thường, sẽ có nghiệm khác tầm thường, giả sử $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ là một nghiệm khác tầm thường.

Trong vectơ nghiệm X_0 ở trên, gọi $|x_i^0| = \mathrm{Max}\{|x_j^0|, j = 1, 2, \ldots, n\}$, do đó xét phương trình thứ i của hệ trên là:

$$a_{i1}x_1^0 + \cdots + a_{ii-1}x_i^0 + a_{ii}x_i^0 + a_{ii+1}x_{i+1}^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 = 0$$

Giữ nguyên $a_{ii}x_i^0$ ở bên trái, chuyển tất cả các phần tử còn lại sang bên phải và lấy trị tuyệt đối hai vế ta được:

$$\left|a_{ii}\right|.\left|x_i^0\right| = \left|a_{ii}x_i^0\right| = \left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^0\right| \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}x_j^0\right| =$$

$$= \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|.\left|x_j^0\right| \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|.\left|x_i^0\right| = \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|\right).\left|x_i^0\right|$$

Nhưng vì $\left|x_i^0\right| = \mathrm{Max}\left\{\left|x_j^0\right|, j = 1,2,\ldots,n\right\}$ nên $\left|x_i^0\right| > 0$, do đó từ hệ thức trên ta suy ra:

$$\left|a_{ii}\right| \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán, suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý. Trong các kỳ thi trước, bài toán này được ra nhưng với dạng ma trận A là các số cụ thể nào đó, có thể với các số cụ thể thì vấn đề trở nên khó nhận ra hơn là dạng tổng quát như ví dụ này.

Ví dụ 4. (Đề thi Olympic Toàn Quốc năm 2006)

Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho mỗi dòng của nó chứa đúng 2 phần tử khác 0, trong đó phần tử nằm ở đường chéo chính bằng 2006, phần tử còn lại bằng 1. Chứng minh ma trận A là ma trận khả nghịch.

Giải:

Không khó để nhận ra rằng bài toán này là trường hợp riêng của Ví dụ 3 ở trên.

Chú ý. Tuy không gặp thường xuyên, nhưng có thể nếu phải chứng minh một ma trận vuông là khả nghịch (hay không suy biến), bạn chỉ cần chỉ ra rằng nó có ma trận nghịch đảo bằng cách chỉ ra dạng trực tiếp của ma trận nghịch đảo của nó.

Ví dụ 5. Cho A là một ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^k = 0, k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng ma trận $E - A$ khả nghịch, và tìm ma trận nghịch đảo của nó.

Giải:

Bằng cách nhân trực tiếp ta có thể kiểm tra rằng

$$(E - A)\left(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right) = E - A^k = E$$

Do đó $E - A$ khả nghịch, và $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu A là ma trận phản đối xứng, nghĩa là: $A' = -A$ thì ma trận $E + A$ không suy biến.

Giải:

Giả sử $E + A$ là ma trận suy biến, khi đó tồn tại vectơ $X \neq 0$ sao cho $(E + A).X = 0$, nghĩa là: $AX = -X$, lấy chuyển vị hai vế ta được:

$$X' = -(AX)' = -X'.A' = X'A$$

$$\Rightarrow \quad X'X = X'AX = -X'X$$

Suy ra $X = 0$ vì ta luôn có $X'X > 0, \quad \forall X \neq 0$. Điều này là vô lý, do đó $E + A$ là ma trận không suy biến.

Ví dụ 7: Cho A là ma trận thực cấp $m \times n$ với $m < n$ (A có số dòng nhỏ hơn số cột) sao cho các dòng của AA' phụ thuộc tuyến tính. Chứng minh rằng các dòng của ma trận A cũng phụ thuộc tuyến tính.

Giải: Vì AA' là ma trận cấp $m \times m$ và AA' có các dòng phụ thuộc tuyến tính nên hệ thuần nhất $(AA')X = 0$ có vô số nghiệm, do đó tồn tại $X_0 \neq 0$ sao cho :

$$(AA')X_0 = 0_m$$

Suy ra $X_0'(AA')X_0 = 0$, nên $(A'X_0)'(A'X_0) = 0$, do đó $A'X_0 = 0$ (với vectơ α, tích vô hướng $\alpha' \times \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$)

Vì thế nên hệ thuần nhất $A'X = 0$ có nghiệm không tầm thường X_0, nên nó sẽ có vô số nghiệm, từ đó suy ra $r(A') < m$, suy ra điều phải chứng minh.

3. PHÉP NHÂN ĐỊNH THỨC

Nhiều khi để tính một định thức ta cần nhân nó với một định thức khác (hoặc nhân với chính nó): $|A|.|B| = |A.B|$

Ví dụ 7. Tính định thức sau bằng cách bình phương:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

Giải:

Xét:

$$d^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4, \quad \lambda = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Do đó $d = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

Ví dụ 8. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} (1+a^2)x_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ -bx_1 + (1+a^2)x_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ -cx_1 - dx_2 + (1+a^2)x_3 + bx_4 = 0 \\ -dx_1 + cx_2 - bx_3 + (1+a^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

Đây chỉ là trường hợp riêng của ví dụ 6, hệ phương trình trên có ma trận hệ số là:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & b & c & d \\ -b & 1+a^2 & d & -c \\ -c & -d & 1+a^2 & b \\ -d & c & -b & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$|A|^2 = |A|.|A'|$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2 & b & c & d \\ -b & 1+a^2 & d & -c \\ -c & -d & 1+a^2 & b \\ -d & c & -b & 1+a^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1+a^2 & -b & -c & -d \\ b & 1+a^2 & -d & c \\ c & d & 1+a^2 & -b \\ d & -c & b & 1+a^2 \end{vmatrix}$$ Suy ra $|A| \neq 0$, suy ra

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4, \quad \lambda = (1+a^2)^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0.$$

đpcm.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng định thức $D_n = |d_{ij}|$, trong đó d_{ij} là ước chung lớn nhất của các số i và j, bằng $\varphi(1).\varphi(2)\ldots\varphi(n)$. Trong đó $\varphi(k)$ là số các số tự nhiên bé hơn k và nguyên tố cùng nhau với k.

2. Cho A là ma trận vuông cấp n chẵn, thoả mãn $a_{ii} = 0, i = 1,2,\ldots,n$; $a_{ij} = \pm 1, i \neq j$. Chứng minh rằng $\det(A) \neq 0$.

3. (Đề thi Olympic Toàn Quốc năm 2003)

Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$$

Trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1$. Tính $\det(A)$.

4. Cho A là ma trận cấp n thoả mãn điều kiện:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

và $a_{ii} > 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

Chứng minh rằng $\det(A) > 0$.

5. Tìm điều kiện cần và đủ để ma trận có các phần tử nguyên có nghịch đảo có các phần tử nguyên.

6. Chứng minh rằng với A, B là hai ma trận vuông thoả mãn $AB = BA$ thì $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

7. Cho hai ma trận A, B vuông cấp n thoả mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng:

a) $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k = B^k(A + kE_n)$.

b) $\det(B) = 0$ và $\operatorname{trace}(B^k) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

c) B là ma trận lũy linh.

8. Chứng minh rằng với A, B là 2 ma trận vuông cấp n và $\det(A \pm B) \neq 0$. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(M) \neq 0$.

9. Chứng minh rằng định thức của một ma trận thực phản đối xứng không là số âm.

10. Tìm ma trận vuông A cấp $n \geq 2$ sao cho: $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$ với mọi ma trận M.

11. Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n lẻ và $AB = 0$. Chứng minh rằng ít nhất 1 trong 2 ma trận $A + A', B + B'$ suy biến.

12. (Đề thi Olympic Toàn Quốc năm 2000)

a) Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n, thoả mãn $AB = BA$, $A^r = 0$, $B^s = 0$. Chứng minh rằng $(A + B)^{r+s} = 0$.

b) Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n, thoả mãn $AB = BA$, $A^r = 0$, $B^s = 0$. Chứng minh rằng $E + A + B, E - A - B, E - A + B, E + A - B$ là các ma trận khả nghịch.

13. Cho A là một ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^k = 0, k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng các ma trận sau là không suy biến: $E \pm A$, $E \pm (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^p)$, với mọi $p \in \mathbb{N}$.

TÍNH CÁC ĐỊNH THỨC SAU ĐÂY BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH CÁC ĐỊNH THỨC:

14. $\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos(\alpha_1 - \alpha_3) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \alpha_n) \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_3) & \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & 1 & \cdots & \cos(\alpha_3 - \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_n) & \cos(\alpha_2 - \alpha_n) & \cos(\alpha_3 - \alpha_n) & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \cdots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \cdots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dfrac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \dfrac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \dfrac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \dfrac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$ 19. $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & (n+1)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$

Với $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

22. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$ Với $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

23. Chứng minh rằng giá trị của **định thức vòng tròn** được cho bởi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1).f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n)$$

Với $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ và $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là các căn bậc n của đơn vị.

24. Sử dụng bài 23, chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1).f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n)$$

Với $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ và $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là các căn bậc n của đơn vị.

TÍNH CÁC ĐỊNH THỨC CẤP N SAU ĐÂY:

25. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \cdots & \alpha^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \cdots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \cdots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \cdots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \cdots & (n-1)a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

28. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \cdots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \cdots & s-a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s-a_2 & s-a_3 & \cdots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

29. $\begin{vmatrix} \overbrace{-1 \quad -1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1}^{(p\text{ cột})} & \overbrace{1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1}^{(n-p\text{ cột})} \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1 & -1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad \cdots \quad 1 & 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad -1 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} \overbrace{a \quad a \quad a \quad \cdots \quad a}^{(p\text{ cột})} & \overbrace{b \quad b \quad b \quad \cdots \quad b}^{(n-p\text{ cột})} \\ b \quad a \quad a \quad \cdots \quad a & a \quad b \quad b \quad \cdots \quad b \\ b \quad b \quad a \quad \cdots \quad a & a \quad a \quad b \quad \cdots \quad b \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a \quad a \quad a \quad \cdots \quad b & b \quad b \quad b \quad \cdots \quad a \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cdots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos\theta \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \cdots & \sin(a+(n-1)h) \\ \sin(a+(n-1)h) & \sin a & \sin(a+h) & \cdots & \sin(a+(n-2)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \cdots & \sin a \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \cdots & (n-2)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 1^2 \end{vmatrix}$

35. Tính $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$

36. Cho $x \in \mathbb{R}$, tính định thức:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ xa_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ xa_{n-1} & xa_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ xa_2 & xa_3 & xa_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

37. Sử dụng phép nhân định thức chứng minh rằng nếu đổi chỗ hai dòng của định thức thì định thức đổi dấu.

38. Sử dụng phép nhân định thức chứng minh rằng nếu biến đổi một dòng của định thức bằng cách cộng vào nó tích của dòng khác sau khi đã nhân với số $\alpha \in \mathbb{R}$ thì định thức không thay đổi giá trị.

39. Chứng minh rằng định thức:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$

bằng không nếu $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

TÍNH LŨY THỪA MA TRẬN

1. CHÉO HÓA MA TRẬN

Rất nhiều bài toán liên quan đến việc tính lũy thừa tổng quát của một ma trận vuông, cụ thể là tính ma trận $A^k, k \in \mathbb{N}$, với A là ma trận vuông nào đó. Để giải quyết bài toán này, trước hết ta cần một số khái niệm cơ bản sau đây:

Định nghĩa. Ma trận vuông A cấp n được gọi là ma trận chéo nếu nó có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Trong đó các số λ_i có thể trùng nhau.

Với ma trận chéo, ta có thể tính lũy thừa một cách dễ dàng:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Định nghĩa. Cho ma trận vuông A, nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì ta nói A chéo hóa được và ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

Vấn đề đặt ra là: Ma trận có điều kiện gì thì chéo hóa được, và nếu chéo hóa được thì ma trận P như trên được xác định như thế nào? Câu trả lời có trong định lý sau đây:

Định lý. Giả sử A là ma trận vuông cấp n. Điều kiện cần và đủ để A chéo hoá được là nó có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Xem chứng minh định lý này trong sách Toán cao cấp (Tập 1. Đại số tuyến tính, Nguyễn Đình Trí), trang 327.

Từ cách chứng minh định lý này, ta có quy trình chéo hoá một ma trận như sau:

Bước 1. Tìm các vectơ riêng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập tuyến tính của ma trận A;

Bước 2. Lập ma trận P với các cột là các vectơ riêng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ở trên;

Bước 3. Ma trận $P^{-1}AP$ sẽ là ma trận chéo với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các phần tử trên đường chéo chính, trong đó λ_i là giá trị riêng ứng với vectơ riêng $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Chú ý. Người ta đã chứng minh được rằng nếu ma trận A có n giá trị riêng đôi một khác nhau thì nó cũng sẽ có n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Do đó nếu ma trận A có n giá trị riêng đôi một khác nhau thì luôn chéo hóa được.

Ví dụ 1. Hãy chéo hoá ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

Giải:

Trước hết, ta tìm các giá trị riêng của ma trận A

$$\left|\lambda E_2 - A\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$$

Sau đó ta tìm các vectơ riêng ứng với từng giá trị riêng:

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$, vectơ riêng tương ứng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y$$

Ta chọn vectơ riêng là: $X_1 = (2,1)$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$, vectơ riêng tương ứng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

Ta chọn vectơ riêng là: $X_2 = (1,1)$

Ma trận P có dạng: $P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Ta thấy rằng $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, và:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Nhận xét. Sau khi thực hiện thành thạo việc chéo hóa một ma trận cụ thể thì việc tính lũy thừa một ma trận (ma trận cần tính này là chéo hóa được) trở nên dễ dàng. Thật vậy nếu có:

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}A^kP = B^k \quad \Rightarrow \quad A^k = PB^kP^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 2. (Đề thi OLP Vòng 1 năm 2006 – Trường ĐHKTQD).

Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Hãy tính A^n.

Giải:

Trước hết ta đi tìm các giá trị riêng của A bằng cách giải phương trình:

$$|\lambda E_3 - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2; \lambda_3 = 4$$

Ứng với giá trị riêng bội 2: $\lambda_{1,2} = -2$ ta tìm được các vectơ riêng tương ứng là:

$$X_1 = (1,1,0); X_2 = (-1,0,1).$$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 4$ ta tìm được vectơ riêng tương ứng là: $X_3 = (1,1,2)$.

Với $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ thì ta có $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Từ đây ta suy ra:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}4^n + (-1)^n 2^{n-1} & -\frac{1}{2}4^n + (-1)^n 2^{n-1} & \frac{1}{2}4^n + (-1)^{n+1} 2^{n-1} \\ \frac{1}{2}4^n + (-1)^{n+1} 2^{n-1} & -\frac{1}{2}4^n + 3(-1)^n 2^{n-1} & \frac{1}{2}4^n + (-1)^{n+1} 2^{n-1} \\ 4^n - (-1)^n 2^n & -4^n + (-1)^n 2^n & 4^n \end{pmatrix}$$

Chú ý. Trong khi trình bày bài thi, việc tìm giá trị riêng và vectơ riêng có thể làm ở bên ngoài, cái chính là bạn phải đưa ra được chính xác ma trận P làm chéo hóa A.

2. CHÉO HÓA MA TRẬN VỚI SỐ PHỨC

Trong nhiều trường hợp đa thức đặc trưng của ma trận A cần chéo hóa không có nghiệm thực thì xử lý thế nào? Ví dụ dưới đây ta sẽ thực hiện việc chéo hóa một ma trận với đa thức đặc trưng có nghiệm phức. Trong trường hợp này việc chéo hóa vẫn cứ tiến hành một cách bình thường.

Ví dụ 3. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 2002)

Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2002}.

Giải:

Giá trị riêng của A là nghiệm của phương trình:

$$\left|\lambda E_2 - A\right| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Ứng với giá trị riêng: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ta tìm được vectơ riêng tương ứng là: $X_1 = (2+i, 1)$.

Ứng với giá trị riêng: $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ta tìm được vectơ riêng tương ứng là: $X_2 = (2-i, 1)$.

Với $P = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì ta có $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$, và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix} = B$$

Lấy mũ 2002 hai vế đẳng thức trên, chú ý rằng qua dạng lượng giác của số phức thì:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Từ đây ta suy ra:

$$A^{2002} = PB^{2002}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} & \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Chú ý. Để thực hiện tốt chéo hóa ma trận với số phức thì nhất thiết phải thành thạo việc tính toán với số phức, đặc biệt là tính lũy thừa số phức dưới dạng lượng giác.

Các bài toán xuất hiện không chỉ đơn thuần ở việc tính lũy thừa một ma trận như ở trên, mà có thể xuất hiện ở nhiều dạng khác nhau.

Ví dụ 4. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 2005)

Cho ma trận:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Đặt $M^n = \left\{b_{ij}(n)\right\}_{i,j=1,2,3} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Tính $S_n = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij}(n)$.

Giải:

Ta giải quyết bài toán này thông qua phép tính M^n như sau:

Trước hết ta tìm các giá trị riêng của M:

$$|\lambda E_3 - M| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_{2,3} = 2$$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta tìm được vectơ riêng là: $X_1 = (-1,1,0)$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_{2,3} = 2$ (bội 2) ta tìm được vectơ riêng là: $X_2 = (1,0,0)$ và $X_3 = (0,0,1)$;

Ma trận P có dạng $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, suy ra $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, và $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có: $M^n = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, do đó $S_n = 3.2^n$.

Còn một mảng khá quan trọng liên quan đến tính lũy thừa ma trận là đa thức ma trận và định thức của đa thức ma trận.

3. ĐA THỨC MA TRẬN

Với A là một ma trận vuông và $f(x)$ là một đa thức bậc n,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

thì $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$.

Khi đó nếu A là ma trận chéo hóa được thì f(A) được tính bởi công thức:

$$f(A) = P(a_n B^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_1 B + a_0 E)P^{-1}$$

với $A = PBP^{-1}$, B là ma trận chéo.

Ta chứng minh được kết quả sau:

Định lý. Ma trận A có đa thức đặc trưng là P(x) thì $P(A) = 0$.

Do đó để tính đa thức ma trận f(A) (hay định thức liên quan đến đa thức ma trận) ta có thể xử lý trên đa thức dư của phép chia đa thức f(x) cho đa thức đặc trưng của ma trận đang xét (tuy đây là điều không thật sự cần thiết trong nhiều trường hợp).

Ví dụ 5. (Đề thi OLP Vòng 2 năm 2008 – Trường ĐHKTQD)

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 4x - 6, g(x) = x^{2007} - x + 6$

1) Tính $|g(A)|$;

2) Tính $[f(A)]^{2008}$.

Giải:

1) Sử dụng phương pháp chéo hóa ma trận ta được $\left|g(A)\right| = 6^{2008}$;

Tuy nghiên ta có một chú ý nhỏ là trong cách giải này, khi biểu diễn g(A) thành tích PBP^{-1} với B là ma trận dạng chéo thì ta không nên nhân P và P^{-1} vào, điều đó là vô nghĩa vì ở đây ta chỉ cần tính định thức, định thức của P và P^{-1} sẽ triệt tiêu cho nhau;

2) Ta có $\left[f(A)\right]^{2008} = \left[P(A) + A\right]^{2008} = A^{2008}$, P(x) là đa thức đặc trưng của A.

Dùng chéo hoá, xét $Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ta được: $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, vậy

$$A^{2008} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^{2008} \end{pmatrix}Q^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 + 3.6^{2008} & 4 - 4.6^{2008} \\ 3 - 3.6^{2008} & 3 + 4.6^{2008} \end{pmatrix}$$

4. CHÉO HÓA TRỰC GIAO

Trên đây ta xét các vấn đề liên quan đến việc chéo hóa một ma trận thực bất kỳ, nhưng trong trường hợp ma trận có dạng đối xứng thì **có nhiều kết quả thú vị** cần bổ sung.

Định nghĩa. Ma trận P được gọi là ma trận trực giao nếu nó khả nghịch và $P' = P^{-1}$.

Định nghĩa. Cho ma trận vuông A. Nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì ta nói A là chéo hóa trực giao được và P là ma trận làm chéo hóa trực giao ma trận A.

Ta có kết quả rất thú vị sau (Theo Toán cao cấp, Tập 1. Đại số tuyến tính, Nguyễn Đình Trí, trang 334)

Định lý. Xét ma trận vuông A cấp n. Điều kiện cần và đủ để ma trận A chéo hóa trực giao được là A đối xứng.

Người ta cũng chứng minh được rằng, nếu ma trận A là ma trận đối xứng thực thì tất cả các giá trị riêng của nó đều là số thực, do đó ta có nhận xét sau:

Nhận xét. Với A là ma trận đối xứng thực, khi đó tồn tại ma trận (trực giao) P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng chéo, với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng của ma trận A.

5. KHI KHÔNG THỂ CHÉO HÓA ĐƯỢC

Phương pháp nào cũng có hai mặt của nó, ta không thể phủ nhận tính hiệu quả của việc chéo hóa ma trận, nhưng công cụ chéo hóa ma trận không phải là duy nhất, dùng phương pháp chéo hóa ma trận ta có thể gặp những rắc rối sau: Thứ nhất là việc tính toán khá phức tạp, thứ hai là có những trường hợp mà ta không thể tìm ra được n vectơ độc lập tuyến tính được. Trường hợp thứ nhất còn có thể khắc phục được bằng cách thực hiện cẩn thận nhưng khi trường hợp thứ hai xảy ra ta phải dùng cách khác để xử lý, có thể dự đoán kết quả rồi chứng minh kết quả đó bằng quy nạp, hoặc có thể dùng cách phân tích một ma trận thành tổng của những ma trận đơn giản khác, sau đây ta xét cơ sở toán học và các ví dụ điển hình.

Trong toán học phổ thông ta đã biết công thức: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, liệu công thức này còn đúng đối với các ma trận vuông cùng cấp hay không?

Định lý. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $AB = BA$, khi đó ta có:

- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $A^n - B^n = (A-B)\left(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{-1}\right)$
- $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

Chú ý thêm rằng E là ma trận giao hoán với mọi ma trận vì $AE = EA = A$, do đó từ định lý trên ta cũng suy ra:

- $E - A^n = (E-A)\left(E + A + \cdots + A^{n-2} + A^{n-1}\right)$
- $(E+A)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k$

Với chú ý này, rất nhiều trường hợp khi cần tính lũy thừa tổng quát một ma trận, người ta phân tích ma trận dưới dạng $A = E + B$, với B là một ma trận nào đó mà tồn tại k đủ bé (k = 2, 3,…) sao cho B^k có dạng rất đơn giản.

Ví dụ 6. Tính A^{100} với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải:

Ta có $A = E + B$, với E là ma trận đơn vị còn B là:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta dễ kiểm tra $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B^3 = 0$. Do đó $B^k = 0, k \ge 3$

Vậy:

$$A^{100} = (E+B)^{100} = E + 100B + \tfrac{100.99}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 2006)

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2006 & 1 & -2006 \\ 2005 & 2 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2005 \end{pmatrix}$. Xác định các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận:

$$S = E + A + A^2 + \cdots + A^{2006}$$

Giải:

Ta có $A = E + B$, trong đó $B = \begin{pmatrix} 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \end{pmatrix}$, ta kiểm tra không khó khăn là $B^2 = 0$, và do đó với mọi số tự nhiên k thì $A^k = E + kB$. Từ đó suy ra

$$S = 2007E + 1003.2007.B$$

Vậy các phần tử trên đường chéo chính của S là:

$$s_{11} = 2007(1 + 1003.2005), \quad s_{22} = 1004.2007$$
$$s_{33} = 2007(1 - 1003.2006)$$

Như đã nói ở trên, ta cũng có thể tính lũy thừa tổng quát của một ma trận bằng phương pháp dự đoán và quy nạp, nhưng trường hợp này ít xảy ra vì dự đoán một công thức tổng quát không phải lúc nào cũng làm được.

Ví dụ 8. Tính $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$

Giải:

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & \sum_{i=0}^{n-1} 2^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP

Bài tập 1. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 1995)

Cho ma trận $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Tính M^n, với $n\in\mathbb{N}$.

Bài tập 2.

1) Tính $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n$.

2) Áp dụng câu 1 ở trên, hãy tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(A^n-E\right)\right]$, với $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{x}{n}\\ -\frac{x}{n} & 1\end{pmatrix}$.

Bài tập 3. Giả sử $A^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\left(a_{ij}(n)\right)$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn của hệ thức $\frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$ và tính giới hạn này khi $n\to\infty$.

Bài tập 4. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 1996)

Giả sử: $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n)\\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n)\\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n)\end{pmatrix}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Bài tập 5. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 1998)

Cho: $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 1\\ 0 & 1/3 & 1\\ 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$. Đặt:

$$A^n=\begin{pmatrix}a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n)\\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n)\\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n)\end{pmatrix}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}a_{ij}(n)$ với $i,j=1,2,3$.

Bài tập 6. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 1999)

1) Cho ma trận: $A=\begin{pmatrix}\frac{x}{1998} & 1999\\ 0 & \frac{x}{2000}\end{pmatrix}$

Ký hiệu: $A^n=\begin{pmatrix}a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x)\\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x)\end{pmatrix}$.

Tìm $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} a_{ij}(n,x)$, $i,j=1,2$.

2) Cho $f(x)=x^{1999}+x^2-1$ và cho ma trận

$$C=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\2&3&0&0\\4&9&-1&0\\1&2&5&2\end{pmatrix}$$

Tính $\det f(C)$.

Bài tập 7. Cho hai ma trận

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\8&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng $\det(E-A^{2009})\neq 0,\quad \det(E-B^{2009})\neq 0$.

Bài tập 8. Chứng minh rằng nếu ma trận A vuông cấp n thỏa mãn $A^2=A$ thì ma trận A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận C sao cho: $C^{-1}AC$ có dạng chéo.

Chứng minh

Dễ dàng thấy rằng A chỉ có các giá trị riêng là 0 hoặc 1 vì nếu λ là giá trị riêng của A thì :

$$AX=\lambda X\Rightarrow \lambda X=A\left(AX\right)=A\left(\lambda X\right)=\lambda^2X \text{ (X là vectơ riêng)}$$

Từ đó suy ra λ chỉ nhận 2 giá trị là 0 hoặc 1.

Gọi V là không gian con sinh bởi tất cả các vectơ riêng của A, khi đó hiển nhiên rằng $V\subset\mathbb{R}^n$, ta chứng minh chiều ngược lại, nghĩa là: $\mathbb{R}^n\subset V$, thật vậy:

Xét $X\in\mathbb{R}^n$, ta có:

$$X=X-AX+AX \qquad (1)$$

Nhưng $A\left(X-AX\right)=AX-A^2X=AX-AX=0=0\left(X-AX\right)$, do đó $X-AX\in V$, ta cũng có $A\left(AX\right)=1.AX$ do đó $AX\in V$.

Vậy từ (1) suy ra $X\in V$, nghĩa là $V=\mathbb{R}^n$, hay A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính, nghĩa là A chéo hóa được.

Bài tập 9. Chứng minh rằng nếu ma trận A vuông cấp n thỏa mãn $A^2=2009E$ thì ma trận A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận C sao cho: $C^{-1}AC$ có dạng chéo.

Chứng minh

Dễ dàng thấy rằng A chỉ có các giá trị riêng là $\pm\sqrt{2009}$ vì nếu λ là giá trị riêng của A thì :

$$AX=\lambda X\Rightarrow 2009X=A\left(\lambda X\right)=\lambda^2X \text{ (X là vectơ riêng)}$$

Từ đó suy ra λ chỉ nhận 2 giá trị là $\pm\sqrt{2009}$.

Gọi V là không gian con sinh bởi tất cả các vectơ riêng của A, khi đó hiển nhiên rằng $V \subset \mathbb{R}^n$, ta chứng minh chiều ngược lại, nghĩa là: $\mathbb{R}^n \subset V$, thật vậy:

Xét $X \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$X = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right) + \frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right) \qquad (2)$$

Nhưng

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right)\right) &= \frac{1}{2}A\left(X + \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AX + \sqrt{2009}X\right) = \frac{\sqrt{2009}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2009}}AX + X\right) \\ &= \sqrt{2009}\left[\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right)\right] \end{aligned}$$

do đó $\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right) \in V$, tương tự ta cũng có $\frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{\sqrt{2009}}AX\right) \in V$.

Vậy từ (2) suy ra $X \in V$, nghĩa là $V = \mathbb{R}^n$, hay A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính, nghĩa là A chéo hóa được.

HẠNG CỦA MA TRẬN

1. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MA TRẬN

Như đã biết trong chương trình, trên ma trận ta có các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng (hoặc các cột) như sau:

P1. Đổi chỗ hai dòng (cột) của ma trận và giữ nguyên các dòng (cột) khác;

P2. Nhân một dòng (cột) của ma trận với một số khác không;

P3. Biến đổi một dòng (cột) của ma trận bằng cách cộng vào dòng (cột) đó tích của dòng (cột) khác trong ma trận với một số bất kỳ.

Ta cũng đã biết rằng phép biến đổi sơ cấp trên các dòng (cột) của ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận đó. Bây giờ ta sẽ nghiên cứu sâu thêm về các phép biến đổi sơ cấp.

Định nghĩa: Các ma trận $U(i,j), U(i,\alpha), U(i,j,\lambda)$ (với $\alpha \neq 0$) tương ứng là các ma trận có được từ ma trận đơn vị cùng cấp E bằng cách: Đổi chỗ dòng thứ i và dòng thứ j của E, nhân dòng thứ i của E với α, và cộng vào dòng thứ i tích của dòng thứ j với λ.

Tương tự, các ma trận $V(i,j), V(i,\alpha), V(i,j,\lambda)$ (với $\alpha \neq 0$) tương ứng là các ma trận có được từ ma trận đơn vị cùng cấp E bằng cách: Đổi chỗ cột thứ i và cột thứ j của E, nhân cột thứ i của E với α, và cộng vào cột thứ i tích của cột thứ j với λ.

Chú ý: Với A là ma trận cấp $m \times n$ thì các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của A có thể biểu diễn bởi phép nhân về bên trái A các ma trận $U(i,j), U(i,\alpha), U(i,j,\lambda)$. Cụ thể là:

P1. $U(i,j).A$ là ma trận có được từ A bằng cách đổi chỗ hai dòng i và j;

P2. $U(i,\alpha).A$ là ma trận có được từ A bằng cách nhân dòng i với α;

P3. $U(i,j,\lambda).A$ là ma trận có được từ A bằng cách cộng vào dòng i, tích của dòng j với λ.

Tương tự, ta cũng có điều tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên cột nhưng khác là phép nhân là về bên phải ma trận A, nghĩa là:

P1. $A.V(i,j)$ là ma trận có được từ A bằng cách đổi chỗ hai cột i và j;

P2. $A.V(i,\alpha)$ là ma trận có được từ A bằng cách nhân cột i với λ;

P3. $A.V(i,j,\lambda)$ là ma trận có được từ A bằng cách cộng vào cột i, tích của cột j với λ.

Nhận xét. Từ các điều nêu trên, ta suy ra việc thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên dòng hay trên cột của một ma trận tương ứng với việc nhân về bên trái hay bên phải ma trận đó với ma trận không suy biến (chính xác hơn là một dãy các ma trận không suy biến nên tích đó cũng là ma trận không suy biến).

Phép phân tích ma trận:

Với A là ma trận cấp $m \times n$, có hạng là r thì bằng các phép biến đổi sơ cấp (trên các dòng và trên các cột) ta có thể đưa A về ma trận có dạng:

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{m\times n}$$

Trong đó E_r là ma trận đơn vị cấp r, ký hiệu 0 là các ma trận không.

Vì lý do như vậy, nên với A là ma trận cấp $m \times n$, có hạng là r thì ta luôn có thể viết dưới dạng $A = PRQ$, trong đó P, Q là các ma trận vuông không suy biến cấp m, n còn R là ma trận cấp $m \times n$ có dạng:

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{m\times n}$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng mọi ma trận hạng r đều có thể phân tích được thành tổng của r ma trận hạng 1.

Giải:

Gọi A là ma trận cấp $m \times n$, có hạng là r. Khi đó tồn tại các ma trận vuông không suy biến cấp m, n là P, Q sao cho $A = PRQ$, với R là ma trận cấp $m \times n$ có dạng

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta phân tích R thành $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_r$, trong đó R_i là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0, trừ phần tử ở dòng i, cột i là bằng 1. Ta lại có $r\left(PR_iQ\right) = r\left(R_i\right) = 1$, và $A = P(R_1 + R_2 + \cdots + R_r)Q = PR_1Q + PR_2Q + \cdots + PR_rQ$ là cách phân tích A thành tổng của r ma trận có hạng 1.

Ví dụ 2.

Cho A là một ma trận vuông cấp n, có hạng là r thoả mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng Vết(A) = r.

Giải:

Vì ma trận A có hạng r nên tồn tại các ma trận P, Q, R sao cho $A = P.R.Q$, trong đó P, Q là các ma trận vuông không suy biến, còn $R = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, ta cũng dễ thấy rằng

$R^2 = R$. Vì $A^2 = A$ nên $PRQ = PRQ.PRQ \Rightarrow R = R.QP.R$ (Do P, Q khả nghịch). Ta lại có

$$\text{Vết}(A) = \text{Vết}(PRQ) = \text{Vết}(PR.RQ) = \text{Vết}(RQ.PR) = \text{Vết}(R) = r$$

2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP

Định lý 1. Với A, B là hai ma trận cùng cấp $m \times n$ bất kỳ ta có:

$$\left|r(A) - r(B)\right| \le r(A+B) \le r(A) + r(B)$$

Định lý 2. Với A, B là hai ma trận bất kỳ sao cho tích AB có nghĩa, ta có:

$$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

Hệ quả. Hạng của ma trận sẽ không đổi nếu ta nhân về bên trái hay bên phải nó với một ma trận không suy biến.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử B không suy biến, khi đó:

$$r(A) = r(AB.B^{-1}) \le r(AB) \le r(A) \quad \Rightarrow \quad r(AB) = r(A)$$

Kỹ thuật chứng minh nhỏ này tuy đơn giản nhưng được áp dụng trong khá nhiều trường hợp.

Định lý 3. Với $A_{m\times n}, B_{n\times p}$ là hai ma trận bất kỳ, khi đó ta có:

$$r(A) + r(B) \le n + r(AB)$$

Chứng minh

Giả sử $r(A) = r, r(B) = s$, khi đó tồn tại P_1, Q_1, P_2, Q_2 là các ma trận không suy biến sao cho $A = P_1R_1Q_1, A = P_2R_2Q_2$, với $R_1 = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{m\times n}$, $R_2 = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{n\times p}$. Ta có

$$\begin{aligned} & AB = P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2 \\ & \Rightarrow r(AB) = r(P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2) = r(R_1Q_1P_2R_2) = r(R_1CR_2) \end{aligned}$$

Với $C = Q_1P_2$ là ma trận cấp n không suy biến, nên $r(C) = n$. Ta dễ thấy rằng ma trận R_1CR_2 có được từ ma trận C bằng cách thay các phần tử ở $n-r$ dòng cuối, $n-s$ cột cuối bằng 0. Ta cũng thấy rằng nếu bỏ đi một dòng hay một cột của ma trận thì hạng của nó giảm đi không quá 1. Vì vậy hạng của ma trận R_1CR_2 không nhỏ hơn $n-(n-r)-(n-s) = r+s-n$, do đó $r(AB) \ge r+s-n$. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Nếu A là ma trận vuông cấp n và $A^2 = E$ thì $r(E+A) + r(E-A) = n$.

Giải:

Ta có $n = r(2E) = r(E+A+E-A) \le r(E+A) + r(E-A)$, nhưng ta cũng có:

$$0 = r\left(E^2 - A^2\right) = r\left(\left(E - A\right)\left(E + A\right)\right) \ge r\left(E - A\right) + r\left(E + A\right) - n$$

Do đó $r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right) \le n \quad \Rightarrow \quad r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right) = n$.

3. LIÊN HỆ VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Rất nhiều bài toán về hạng của ma trận có thể xử lý bằng hệ phương trình tuyến tính một cách có hiệu quả, sau đây là cơ sở của việc áp dụng này và một số ví dụ minh hoạ.

Định lý 4. Số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A.X = 0$ bằng $n - r\left(A\right)$, trong đó n là số ẩn của hệ phương trình (bằng số cột của A), và $r\left(A\right)$ là hạng của ma trận A.

Hệ quả. Nếu A, B là các ma trận cùng cấp và các hệ phương trình tuyến tính $A.X = 0, B.X = 0$ là tương đương thì $r\left(A\right) = r\left(B\right)$.

Ví dụ 4. Nếu A là ma trận vuông cấp n và $A^2 = E$ thì $r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right) = n$.

Giải:

Từ giả thiết ta có $\left(E - A\right)\left(E + A\right) = 0$, do đó ta dễ thấy rằng các cột của ma trận $E + A$ đều là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\left(E - A\right).X = 0$, vì vậy:

$$r\left(E + A\right) \le \dim V = n - r\left(E - A\right), \text{ V là không gian nghiệm.}$$

Vì vậy ta có:

$$r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right) \le n$$

nhưng ta luôn có

$$n = r\left(2E\right) = r\left(E + A + E - A\right) \le r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right)$$

Từ hai bất đẳng thức này suy ra $r\left(E + A\right) + r\left(E - A\right) = n$.

BÀI TẬP

1. Cho A là một ma trận vuông cấp n có hạng r. Tìm $r\left(A^*\right)$.

2. Cho A là ma trận vuông cấp n, $a_{ii} = 0; i = 1,2,\ldots,n; a_{ij} = 1; p, i \neq j$. Chứng minh rằng $r\left(A\right) \geq n-1$.

3. Cho P, Q là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn: $P^2 = P; Q^2 = Q$, và $E-(P+Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng: $r(P) = r(Q)$.

4.

a) Giả sử A là ma trận vuông thoả mãn $A^k = 0, k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng ma trận $E + A + A^2 + \cdots + A^p$ khả nghịch với $\forall p \in \mathbb{N}$.

b) Giả sử A là ma trận vuông thoả mãn $A^k = 0, k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta luôn có: $r(A) = r(A + A^2 + \cdots + A^n)$.

5. Chứng minh rằng với mọi ma trận thực vuông cấp n, đều tồn tại $M \in \mathbb{N}$ sao cho: $r(A^k) = r(A^{k+1}); \quad \forall k \geq M$.

6.

a) Chứng minh rằng với A, B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB = BA$ và $A^s = B^r = 0$, $r, s \in \mathbb{N}$ thì $\left(A+B\right)^{r+s} = 0$.

b) Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n, thoả mãn $AB = BA$, $A^r = 0$, $B^s = 0, r, s \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $r(E + A + B) = r(E - A - B) = n$.

7. Giả sử $A_{n\times p}, B_{p\times q}, C_{q\times r}$ sao cho $r(B) = r(AB)$. Chứng minh rằng $r(BC) = r(ABC)$.

8. Giả sử P, Q, R là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng:

$$r(PQ) + r(QR) \leq r(Q) + r(PQR)$$

9. Chứng minh rằng hạng của ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng bằng cấp cao nhất của các định thức con chính khác không của nó.

VẾT CỦA MA TRẬN

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Thì $\text{Vết}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ được gọi là vết của ma trận A.

Ví dụ 1. Với ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ thì

Vết(A) = 3 - 6 + 4 = 1, còn Vết(E_n) = n.

Từ định nghĩa trên ta suy ra các tính chất cơ bản của vết như sau:

Định lý 1. Tính chất tuyến tính của vết ma trận

Với A, B là các ma trận vuông cấp n và λ là một số thực thì:

- Vết(A + B) = Vết(A) + Vết(B);
- Vết($\lambda.A$) = λ.Vết(A).

Định lý 2. Với A, B là các ma trận vuông cấp n thì:

$$\text{Vết}(A.B) = \text{Vết}(B.A).$$

Chú ý. Kết quả của định lý 2 còn đúng đối với các ma trận dạng $A_{m\times n}, B_{n\times m}$, nghĩa là khi đó cả A.B và B.A đều tồn tại.

Nhận xét. Vết của một ma trận vuông là một số, và nếu A = B thì Vết(A) = Vết(B), nhưng điều ngược lại hiển nhiên là không đúng. Nhận xét nhỏ này được áp dụng có hiệu quả trong nhiều bài toán cụ thể.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi ma trận A cấp $m \times n$, B cấp $n \times p$, C cấp $p \times q$ thì ta luôn có:

$$\text{Vết}(ABC) = \text{Vết}(B'A'C') = \text{Vết}(A'C'B')$$

Ví dụ 3. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n.

1) Sử dụng ví dụ 2, chứng minh rằng nếu A, B, C là các ma trận đối xứng thì:

$$\text{Vết}(ABC) = \text{Vết}(BAC)$$

2) Chỉ ra phản ví dụ với kết luận trên nếu không có giả thiết A, B, C đối xứng.

Ví dụ 4. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A'A = A^2$, chứng minh rằng:

1) $\text{Vết}\left[(A - A')'(A - A')\right] = 0;$

2) A là ma trận đối xứng.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận vuông A và B cấp n sao cho

$$AB - BA = E$$

Giải:

Dùng phản chứng, giả sử tồn tại các ma trận A, B sao cho $AB - BA = E$, thế thì lấy vết hai vế đẳng thức này ta được:

$$0 = \text{Vết}(AB - BA) = \text{Vết}(E) = n$$

Điều này là vô lý, suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận A, B, C, D vuông cấp n sao cho: $AC + DB = E$ và $CA + BD = 0$.

2. Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n và ma trận A là khả nghịch. Liệu có đẳng thức: $AB - BA = A$?

3. Cho ma trận vuông A không suy biến cấp n. Liệu đối với ma trận vuông X bất kỳ cấp n có thể tìm được một ma trận vuông Y cấp n thoả mãn: $X = AYA^{-1} - A^{-1}YA$?

Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu Vết(A.X) = 0 với mọi ma trận vuông X cấp n thì A = 0.

5. Cho $A_{n\times p}, B_{q\times n}$. Chứng minh rằng: Vết(A.X.B) = 0 với mọi $X_{p\times q} \Leftrightarrow BA = 0$.

6. (Đẳng thức Wagner)

a) Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 thì ta luôn có:

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$$

b) (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 2004)

Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 thì ta luôn có:

$$(AB - BA)^{2004} C - C(AB - BA)^{2004} = 0$$

7. Giả sử A, B là các ma trận thực đối xứng. Chứng minh rằng:

$$\text{Vết}(ABAB) \le \text{Vết}(A^2B^2)$$

8. Chứng minh rằng:

$$\forall A \in \text{Mat}(3\times 3), A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Rank}(A) \le 1 \\ \text{Trace}(A) = 0 \end{cases}$$

9. (Đề thi OLP Toàn Quốc năm 1997)

Cho A là một ma trận vuông cấp n với hạng là $r(A) = r \le n$ thoả mãn đẳng thức $A^2 = A$. Chứng minh rằng $\text{Trace}(A) = r$.

ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG
GIÁ TRỊ RIÊNG

Dạng của đa thức đặc trưng:

Với A là một ma trận vuông cấp n thì đa thức đặc trưng của A có dạng:

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n c_n$$

Với c_k là tổng tất cả các định thức con chính cấp k của A.

Ở đây định thức con chính của A được hiểu theo nghĩa là định thức con của ma trận A với các dòng và các cột được lập từ A có cùng các chỉ số, do đó:

$$c_k = \sum_{C_n^k} D_{i_1i_2\cdots i_k}^{i_1i_2\cdots i_k}$$

Từ dạng của đa thức đặc trưng ta suy ra tổng của các giá trị riêng của A bằng vết của nó và tích của các giá trị riêng này bằng định thức của A.

Giá trị riêng của đa thức ma trận:

Với đa thức $f(x) = x^2$**:**

Giá trị riêng của ma trận A^2 bằng (tính cả bội tương ứng) bình phương các giá trị riêng của A.

Với đa thức $f(x) = x^p$**:**

Giá trị riêng của ma trận A^p bằng (tính cả bội tương ứng) lũy thừa bậc p các giá trị riêng của A.

Định thức của đa thức ma trận:

Với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A, $f(\lambda)$ là một đa thức bất kỳ. Khi đó định thức của ma trận $f(A)$ được tính bởi công thức:

$$|f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n)$$

Chứng minh:

Giả sử $f(\lambda) = a_0\prod_{j=1}^{m}(\mu_j - \lambda)$ và $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. Thay $\lambda = A$ vào $f(\lambda)$ ta được:

$$f(A) = a_0\prod_{j=1}^{m}(\mu_j E - A)$$

Lấy định thức hai vế đẳng thức trên ta được:

$$\left|f(A)\right| = \left|a_0\prod_{j=1}^{m}(\mu_j E - A)\right| = a_0^n\prod_{j=1}^{m}\varphi(\mu_j) = a_0^n\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\mu_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[a_0\prod_{j=1}^{s}(\mu_j - \lambda_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Giá trị riêng của đa thức ma trận:

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A và với $f(x)$ là một đa thức bất kỳ thì $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$.

Chứng minh:

Xét đa thức $g(x) = \lambda - f(x)$, với λ là số bất kỳ và áp dụng bài số 8 ta được:

$$\left|g(A)\right| = g(\lambda_1)g(\lambda_2)\ldots g(\lambda_n)$$

Nghĩa là:

$$\left|\lambda E - f(A)\right| = (\lambda - f(\lambda_1))(\lambda - f(\lambda_2))\ldots(\lambda - f(\lambda_n))$$

Chú ý rằng $\left|\lambda E - f(A)\right|$ là đa thức đặc trưng của $f(A)$, do đó các giá trị riêng của $f(A)$ là $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

Giá trị riêng của phân thức ma trận:

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A và $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ là một phân thức bất kỳ sao cho nó xác định tại $x = A$ (nghĩa là hàm $h(x)$ thỏa mãn điều kiện $\left|h(A)\right| \neq 0$) thì $\left|f(A)\right| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n)$ và các số $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$.

BÀI TẬP

Bài tập 1: Tìm giá trị riêng của ma trận $A'A$ với $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}_{1\times n}$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng tất cả các giá trị riêng của A đều khác không khi và chỉ khi A không suy biến.

Bài tập 3: Cho A là ma trận không suy biến, chứng minh rằng λ_0 là giá trị riêng của A khi và chỉ khi λ_0^{-1} là giá trị riêng của A^{-1}.

Bài tập 4: Cho ma trận vuông A, B cấp n bất kỳ. Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của AB và BA trùng nhau.

Bài tập 5: Cho A là ma trận cấp $m\times n$ và B là ma trận cấp $n\times m$. Tìm liên hệ giữa đa thức đặc trưng của AB và BA bằng cách xét hệ thức sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{pmatrix}$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng:

a) Mọi ma trận vuông cấp n, đối xứng với các phần tử là các số thực đều có đủ n giá trị riêng là các số thực;

b) Mọi ma trận vuông cấp n, phản đối xứng với các phần tử là các số thực đều có đủ n giá trị riêng là các số thuần ảo. Từ đó suy ra định thức của ma trận phản đối xứng thực là các số không âm.

Bài tập 7: Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp sao cho $AB = BA$, và tồn tại $p \in \mathbb{N}$ sao cho $A^p = 0$ thì:

$$\left|A^2 + AB + B^2\right| = |B|^2$$

Bài tập 8: Tìm giá trị riêng của các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN KHỐI

I. Khái niệm và các phép toán

1. Định nghĩa. Ma trận A được viết dưới dạng

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ij} là các ma trận, cách biểu diễn ma trận A như thế được gọi là ma trận khối. Tất nhiên các ma trận A_{ij} trên cùng một dòng sẽ có chung số dòng, trên cùng một cột sẽ có chung số cột.

2. Phép toán trên ma trận khối.

a) Phép cộng 2 ma trận, nhân ma trận với số: Nếu A, B là 2 ma trận khối được phân chia các khối như nhau thì ta có thể cộng và nhân bình thường.

b) Phép nhân ma trận khối với ma trận khối:

Giả sử

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ik}, B_{kj} là các ma trận con nhân được với nhau (số cột của ma trận A_{ik} bằng số dòng của ma trận B_{kj}), khi đó ma trận tích AB tồn tại, khối ma trận nằm ở "dòng" i, "cột j" của AB là:

$$A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{in}B_{nj}$$

Ví dụ 1:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C & E \\ E & 0 \end{pmatrix}; \quad B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & C \end{pmatrix}$$

với $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sử dụng phép nhân ma trận khối ở trên ta được:

$$AB = \begin{pmatrix} C & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C & C \\ E & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ví dụ 2: Một ma trận khối $A = (A_{ij})$ được gọi là ma trận khối dạng tam giác nếu tất cả các khối trên đường chéo chính (nghĩa là các khối $A_{11}, A_{22}, \ldots$ đều là các ma trận vuông, và tất cả các khối về một phía của đường chéo chính đều bằng 0. Chứng minh rằng nếu A và B là 2 ma trận khối với các phần tử trên đường chéo chính tương ứng cùng cấp và với các khối bằng 0 nằm về cùng phía của đường chéo chính (đều là phía trên, phía dưới) thì tích AB của chúng cũng là ma trận khối dạng tam giác với các khối trên đường chheos chính cùng cấp và các khối bằng 0 cùng nằm về một phía của đường chéo chính như các ma trận thành phần A, B.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng ma trận khối dạng tam giác trên là lũy linh khi và chỉ khi tất cả các khối nằm trên đường chéo chính đều là lũy linh.

II. Một số kết quả cơ bản

1. Định thức của ma trận khối:

Theo định lý Laplace về khai triển định thức, ta công nhận (không cần chứng minh lại) công thức sau đây về tính định thức của ma trận khối:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A).\det(C)$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với A, B là 2 ma trận vuông cấp n và $\det(A \pm B) \neq 0$. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(M) \neq 0$.

Lời giải:

Xét ma trận tích của các ma trận khối:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & A+B \\ B-A & B+A \end{pmatrix}$$

Lấy định thức 2 vế ta được:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} E & E \\ -E & E \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ B-A & B+A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ 0 & 2(A+B) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n.\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = 2^n.\det(A-B).\det(A+B) \neq 0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

2. Biến đổi sơ cấp trên ma trận khối

Ngoài việc ta có thể biến đổi sơ cấp bình thường trên các khối dòng của ma trận, ta còn có thể biến đổi theo kiểu khác.

Thông thường những phép biến đổi được thực hiện chỉ với ma trận khối gồm 4 khối (2 khối dòng, 2 khối cột).

Ví dụ 5: Cho $A = \left(A_{ij}\right)$ là ma trận khối và cho A_{ij} là các khối với cấp $m_i \times n_j$. Ma trận khối nhận được từ A bằng cách cộng vào khối dòng thứ i tích của khối dòng thứ j sau khi đã nhân về bên trái khối dòng thứ j này với ma trận chữ nhật X cấp $m_i \times m_j$ chính là ma trận nhận được từ A bằng cách nhân về bên trái với ma trận khả nghịch P. Tương tự như vậy với biến đổi trên cột, nghĩa là: Ma trận khối nhận được từ A bằng cách cộng vào khối cột thứ i tích của khối cột thứ j sau khi đã nhân về bên phải khối cột thứ j này với ma trận chữ nhật Y cấp $n_j \times n_i$ chính là ma trận nhận được từ A bằng cách nhân về bên phải với ma trận khả nghịch Q. Tìm dạng của ma trận P, Q.

Lời giải:

Việc xác định ma trận P, Q giống hệt trong biến đổi sơ cấp trên ma trận.

3. Ma trận nghịch đảo của ma trận khối

Xét các ma trận $A_{r\times r}, B_{s\times s}, C_{r\times s}$ là các ma trận sao cho A, B khả nghịch, khi đó:

- ✓ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$
- ✓ $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

Ví dụ 6: Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, tính

$$\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

BÀI TẬP

1. Cho $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, chứng minh rằng :

a) Nếu $\det(A) \neq 0$ thì $\det(R) = \det(A).\det\left(D - CA^{-1}B\right)$;

b) Nếu $\det(D) \neq 0$ thì $\det(R) = \det\left(A - BD^{-1}C\right).\det(D)$;

c) Với ma trận khả nghịch A cấp n. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(R) = n$ khi và chỉ khi $D = CA^{-1}B$.

2. Nếu A và D là các ma trận vuông cấp n và $AC = CA$, chứng minh rằng:

a) Nếu $\det(A) \neq 0$ thì $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$;

b) Trong trường hợp $\det(A) = 0$ thì câu a) trên đây còn đúng nữa hay không?

Lời giải: (Câu b)

Ở đây ta không cần điều kiện $\det(A) \neq 0$, nhưng trong tình huống tương tự thì phải cần thiết $\det(A) \neq 0$, nếu chỉ có $\det(D) \neq 0$ và $CD^T = -DC^T$ thì

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A - BD^{-1}C\right).\det\left(D^t\right) = \det\left(AD^t + BC^t\right)$$

Xét ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Thì $CD^T = -DC^T = 0$, nhưng $\det\left(AD^T + BC^T\right) = -1 \neq 1 = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

3. Giả sử u là một dòng, v là một cột và a là một số. Chứng minh rằng đẳng thức sau đây là đúng:

$$\begin{vmatrix} A & v \\ u & a \end{vmatrix} = a|A| - u\left(A^*\right)v$$

trong cả 2 trường hợp A không suy biến và A suy biến (Qua giới han!).

4. Giả sử u, v là các vectơ n chiều, A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng :

$$\left|A + u^T v\right| = |A| + vA^* u^T$$

5. Cho A, B, C, D là các ma trận vuông cấp n sao cho AB^T, CD^T đều là các ma trận đối xứng và $AD^T - BC^T = I$. Chứng minh rằng $A^T D - C^T B = I$.

ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

I. Định nghĩa và định lý cơ bản

Định nghĩa 1. Đa thức $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ trong vành $\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ được gọi là một đa thức đối xứng n ẩn nếu

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}\right)$$

với mọi hoán vị $\sigma\in S_n$. Trong đó $f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}\right)$ được suy ra từ $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bằng cách thay x_i bởi $x_{\sigma(i)}, i=1,2,\dots,n$.

Định nghĩa 2. Các đa thức sau đây :

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$$
$$\sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
………
$$\sigma_n=x_1x_2x_3\dots x_{n-1}x_n$$

là các đa thức đối xứng n ẩn, và ta gọi chúng là các đa thức đối xứng cơ bản.

Định lý cơ bản về đa thức đối xứng: Mọi đa thức đối xứng $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ trong vành $\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ đều biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng một đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản với các hệ số trong $\mathbb{R}$.

II. Mối liên hệ giữa một số đa thức đối xứng thường gặp

Trong mục này ta nghiên cứu mối liên hệ ở dạng định thức của các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$, các hàm $s_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ và các đa thức đối xứng dạng $p_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum\limits_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$:

1. Mối liên hệ giữa σ_k và s_k:

Ta có $\sigma_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ là đa thức đối xứng cơ bản thứ k (trong n đa thức đối xứng cơ bản ở trên), nó là hệ số của x^{n-k} trong khai triển đa thức:

$$(x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n)$$

Trước tiên, ta chứng minh rằng:

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^k k\sigma_k=0$$

Tích $s_{k-p}\sigma_p$ có chứa các thành phần dạng $x_i^{k-p}\left(x_{j_1}\dots x_{j_p}\right)$. Nếu $i\in\{j_1,\dots,j_p\}$ thì thành phần này bị triệt tiêu với thành phần $x_i^{k-p+1}\left(x_{j_1}\dots\hat{x}_i\dots x_{j_p}\right)$ của tích $s_{k-p+1}\sigma_{p-1}$ (ở đây $\hat{x}_i$ có nghĩa là tích này bị khuyết so với tích trước 1 bậc là x_i), còn nếu $i\notin\{j_1,\dots,j_p\}$ thì nó bị triệt tiêu với thành phần $x_i^{k-p-1}\left(x_ix_{j_1}\dots x_{j_p}\right)$ của tích $s_{k-p-1}\sigma_{p+1}$.

Từ đó ta có hệ k phương trình với k ẩn $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k$:

$$\begin{cases} \sigma_1 & & & & & = & s_1 \\ s_1\sigma_1 & - & 2\sigma_2 & & & = & s_2 \\ s_2\sigma_1 & - & s_1\sigma_2 & + & 3\sigma_3 & = & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_k\sigma_1 & - & s_{k-1}\sigma_2 & + \cdots + & (-1)^k k\sigma_k & = & s_n \end{cases}$$

Theo quy tắc Cramer ta suy ra được:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & 1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \cdots & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1: Cho A, B là 2 ma trận vuông cấp n thỏa mãn điều kiện

$$\mathrm{tr}\left(A^k\right) = \mathrm{tr}\left(B^k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Chứng minh rằng A và B là các ma trận có cùng các giá trị riêng.

2. Mối liên hệ giữa p_k và σ_k:

Ta kiểm chứng dễ dàng rằng:

$$\begin{aligned} 1 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + \cdots &= \left(1 + x_1t + (x_1t)^2 + \cdots\right)\cdots\left(1 + x_nt + (x_nt)^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(1 - x_1t)(1 - x_2t)\cdots(1 - x_nt)} \\ &= \frac{1}{1 - \sigma_1t + \sigma_2t^2 - \cdots + (-1)^n\sigma_nt^n} \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra:

$$\begin{cases} \sigma_1 & & & & & = & p_1 \\ p_1\sigma_1 & - & \sigma_2 & & & = & p_2 \\ p_2\sigma_1 & - & p_1\sigma_2 & + & \sigma_3 & = & p_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_k\sigma_1 & - & p_{k-1}\sigma_2 & + \cdots + & (-1)^k\sigma_k & = & p_n \end{cases}$$

Tương tự như trên, ta tính được:

$$\sigma_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix} \text{ và } p_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \cdots & 1 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

3. Mối liên hệ giữa p_k và s_k:

Xét đa thức $f(t) = (1 - x_1t)(1 - x_2t)\cdots(1 - x_nt)$. Khi đó

$$-\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \left(\frac{1}{f(t)}\right)' = \left[\left(\frac{1}{1-x_1t}\right)\left(\frac{1}{1-x_2t}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-x_nt}\right)\right]' = \left(\frac{x_1}{1-x_1t} + \cdots + \frac{x_n}{1-x_nt}\right)\frac{1}{f(t)}$$

Do đó:

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{x_1}{1-x_1t} + \cdots + \frac{x_n}{1-x_nt} = s_1 + s_2t + s_3t^2 + \cdots$$

Mặt khác ta cũng có $\dfrac{1}{f(t)} = 1 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + \cdots$, và

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \left(\frac{1}{f(t)}\right)'\left(\frac{1}{f(t)}\right)^{-1} = \frac{p_1 + 2p_2t + 3p_3t^2 + \cdots}{1 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + \cdots}$$

Nghĩa là:

$$\left(1 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + \cdots\right)\left(s_1 + s_2t + s_3t^2 + \cdots\right) = p_1 + 2p_2t + 3p_3t^2 + \cdots$$

Từ đó ta được:

$$s_k = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_2 & p_1 & 1 \\ kp_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$$

và

$$p_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_2 & s_1 & -(k-1) \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}$$