

Người làm: Nguyễn Thị Minh

Zalo: Nguyễn Minh

- số đt zalo: 0972360860

Email: caccontoi@gmail.com

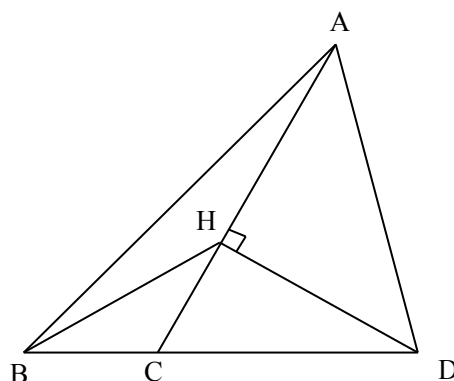
CD13 : PHẦN HÌNH HỌC

***Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau.**

Câu 1 . (HSG 7 Diễm Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB .

Lời giải



Kẻ DH vuông góc với AC tại H . Vì góc C bằng 120° (gt) suy ra $\angle ACD = 60^\circ \Rightarrow \angle DH = 30^\circ$ (1)

Mà trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền nên $CH = \frac{CD}{2}$

mà $CB = \frac{CD}{2}$ (gt) suy ra $CH = BC$ khi đó Tam giác $\triangle BCH$ cân tại C

$\Rightarrow \angle CBH = 30^\circ$ (2), mà $\angle ABC = 45^\circ \Rightarrow \angle ABH = 15^\circ$

Xét tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° (gt) suy ra $\angle BAH = 15^\circ$ nên tam giác AHB cân tại $H \Rightarrow AH = BH$.

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BDH$ cân tại $H \Rightarrow DH = BH \Rightarrow AH = DH$

Do đó tam giác AHD vuông cân tại $H \Rightarrow \angle ADH = 45^\circ$

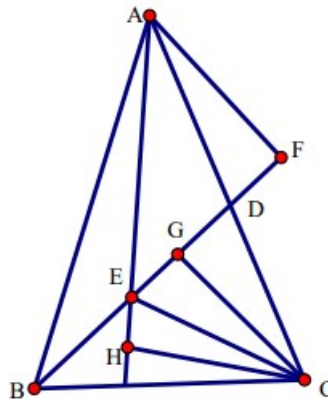
Vậy $\angle ADB = \angle ADH + \angle DH = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

Câu 2 . (HSG 7 Vĩnh Phúc- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , gọi D là trung điểm của AC . Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho

$\angle ADE = \angle ABD$. Chứng minh rằng $\angle ADE = \angle ECB$.

Lời giải



Vẽ $AF \perp DB$; $CG \perp DB$; $CH \perp AE$

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle CAH$ có: $\angle AFB = \angle AHC = 90^\circ$, $AB = AC$ (gt), $\angle ABF = \angle CAH$ (gt)

Suy ra: $\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $AF = CH$.

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle CDG$ có: $\angle AFD = \angle CGD = 90^\circ$, $AD = DC$ (gt), $\angle ADF = \angle CDG$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle ADF = \triangle CDG$ (cạnh huyền – góc nhọn) Suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$

Xét $\triangle CEH$ và $\triangle CEG$ có: $\angle CHE = \angle CGE = 90^\circ$, CE là cạnh chung, $CH = CG$ (cmt)

Suy ra $\triangle CEH = \triangle CEG$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle ECH = \angle ECG$

Mà $\angle ECG = \angle ECB + \angle GCB$; $\angle ECH = \angle EAC + \angle HCA$

Do đó $\angle ECB + \angle GCB = \angle EAC + \angle HCA$ (1)

Mặt khác: $\angle EBA + \angle GCB = \angle ECB + \angle HCA$ (2)

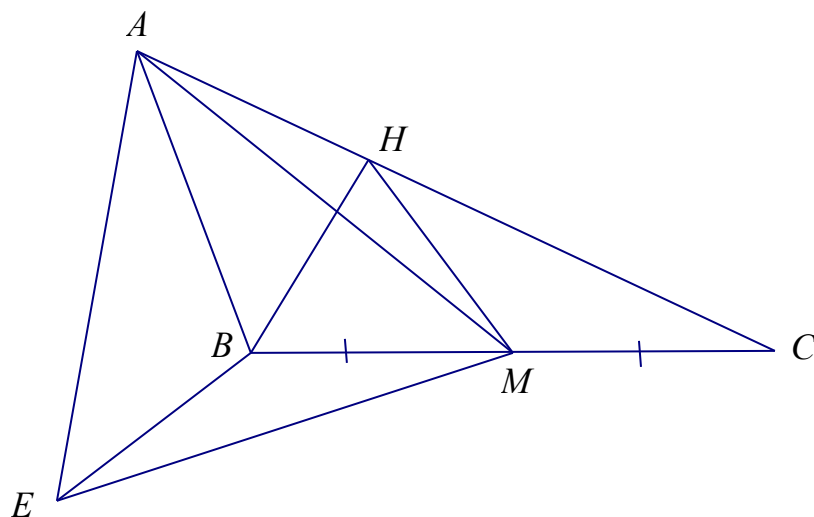
Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có: $\angle ECB - \angle EBA = \angle EAC - \angle ECB = \angle EBA - \angle ECB \Rightarrow \angle EBA = \angle ECB$

Mà $\angle DAE = \angle ABD$ nên $\angle DAE = \angle ECB$

Câu 3. (HSG 7 Bắc Ninh - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM , $\angle MAB = 30^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Tính số đo $\angle ABC$ biết $\angle ABC$ là góc tù.

Lời giải



Kẻ BH vuông góc với AC tại H suy ra $\Rightarrow \triangle BHC$ là tam giác nửa đều

Có $BH = \frac{BC}{2}$.

Có $\triangle BHC$ vuông tại H có trung tuyến $HM \Rightarrow HM = \frac{BC}{2} = BM$

Suy ra $MB = BH = MH$ (1) và $\triangle BMH$ đều suy ra $\angle BMH = 60^\circ$ hay $\angle BMA + \angle HMA = 60^\circ$ (*)

Vẽ tam giác đều $\triangle MAE$ (E và M khác phía đối với AB). Suy ra $\angle AME = 60^\circ$ hay $\angle BME + \angle AMB = 60^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) có $\angle BME = \angle HMA$

Do $\angle MAB = 30^\circ$ suy ra AB vừa là phân giác vừa là trung trực của $EM \Rightarrow MB = EB$ (2)

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle EMB$ có: $MH = MB$ (cmt), $\angle HME = \angle BMA$ (cmt), $MA = ME$ (cmt)

Suy ra $\triangle AMH = \triangle EMB$ (c.g.c) nên $AH = EB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH = BH$. Suy ra tam giác AHB vuông cân tại H nên $\angle ABH = 45^\circ$.

Từ đó $\angle ABC = \angle ABH + \angle HBC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

*Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 Hưng Hà - năm học 2022 - 2023)

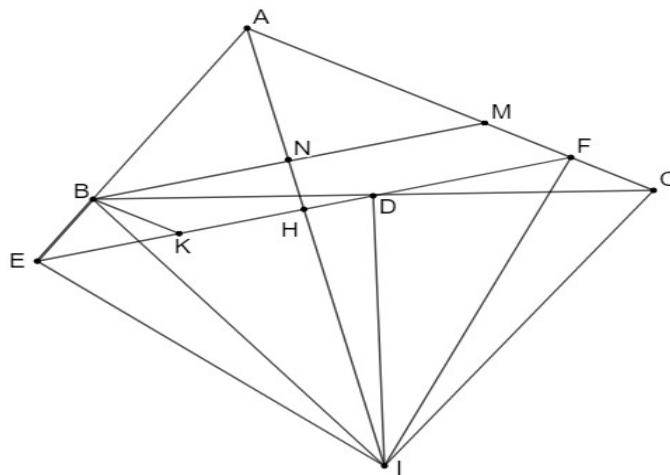
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và tia AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF (M thuộc AC).

a) Chứng minh: $\triangle ABM$ cân.

b) Chứng minh: $BE = CF = MF$

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AH và BM là N

Ta có $BM \parallel EF$ (gt), $HA \perp EF$ (gt)

$\Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AMN$ có:

$\angle BAN = \angle MAN$ (do AH là tia phân giác của góc A)

AN : cạnh chung

$\angle BNA = \angle MNA = 90^\circ$

Suy ra $\triangle ABN = \triangle AMN$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AM$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A

b) Chứng minh tương tự như với $\triangle ABN$ và $\triangle AMN$ ta có $\triangle AEH = \triangle AFH$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$

Mà $AB = AM \Rightarrow AE - AB = AF - AM \Rightarrow BE = MF$ (1)

Vẽ $BK \parallel AC$ ($K \in EF$)

Xét $\triangle BDK$ và $\triangle CDF$ có: $\angle BDK = \angle CDF$ (so le trong), $DB = DC$ (gt), $\angle BDK = \angle CDF$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle BDK = \triangle CDF$ (g.c.g) $\Rightarrow BK = FC$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Ta có $\angle BKE = \angle FCE$ (hai góc đồng vị $BK \parallel AC$) và $\angle AEF = \angle AFE$ ($\triangle AEF$ cân tại A)

$\Rightarrow \angle BEK = \angle BKE \Rightarrow \triangle BEK$ cân tại $B \Rightarrow BE = BK$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MF = FC = BE$

c) Nối IB, IC

Xét $\triangle IBD$ và $\triangle ICD$ có: $DB = DC$ (gt), $\angle BDI = \angle CDI = 90^\circ$, ID chung

Suy ra $\triangle IBD = \triangle ICD$ (c.g.c) suy ra $IB = IC$

Xét $\triangle IAE$ và $\triangle IAF$ có: $AE = AF$ (cmt), $\angle EAI = \angle FAI$ (cmt), AI chung

Suy ra $\triangle IAE = \triangle IAF$ (c.g.c) $\Rightarrow IE = IF$, $\angle AEI = \angle AFI$ (4)

Xét $\triangle IEB$ và $\triangle IFC$ có: $IB = IC$ (cmt), $BE = CF$ (cmt), $IE = IF$ (cmt)

Vậy $\triangle IEB = \triangle IFC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BEI = \angle FCI$ hay $\angle AEI = \angle AFI$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\angle FCI = \angle AFI$ mà $\angle FCI + \angle AFI = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

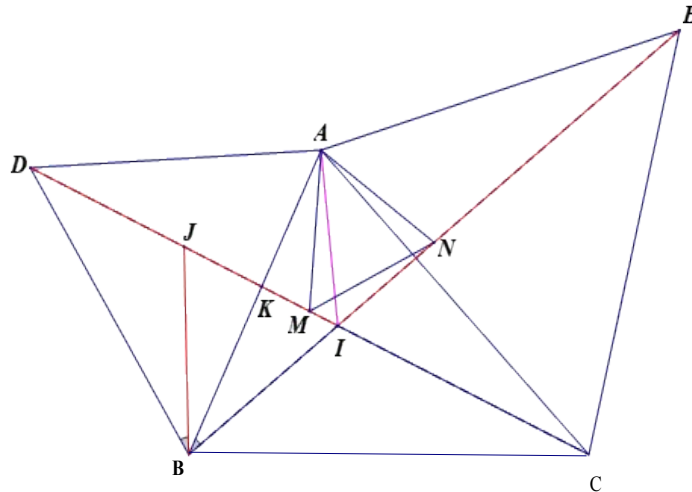
$\Rightarrow \angle FCI = \angle AFI = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$

Câu 2. (HSG 7 Hậu Lộc - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

- Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$ và $\angle DIB = 60^\circ$.
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh: $\triangle AMN$ đều.
- Chứng minh rằng: IA là phân giác của góc $\angle DIE$.

Lời giải



a) Ta có: $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$; $\angle BAE = \angle EAC + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC \Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có: $AD = AB$, $\angle DAC = \angle BAE$, $AC = AE \Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$

Xét $\triangle DKA$ có: $\angle ADK + \angle KAD + \angle KDA = 180^\circ$; $\triangle BKI$ có: $\angle KBI + \angle BIK + \angle KIB = 180^\circ$

Mà $\angle KDA = \angle KIB$ (đối đỉnh), $\angle ADK = \angle KBI$ (hai góc tương ứng do $\triangle ADC = \triangle ABE$)
 $\Rightarrow \angle KAD = \angle KBI = 60^\circ$ hay $\angle DIB = 60^\circ$ (điều phải chứng minh).

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CD = BE \Rightarrow CM = EN$ (M, N là trung điểm của DC, BE)

Từ $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ACD = \angle AEB$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AEN$ có: $AC = AE$, $\angle ACD = \angle AEB$, $CM = EN \Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$, mà $\angle EAN + \angle NAC = \angle EAC = 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle CAM + \angle NAC = \angle NAM = 60^\circ$

Do đó $\triangle AMN$ đều.

c) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB$, mà $\angle DIB = 60^\circ \Rightarrow \triangle BIJ$ đều.

$\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra $\angle JBA = \angle IBD$, kết hợp $BA = BD$
 $\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c)

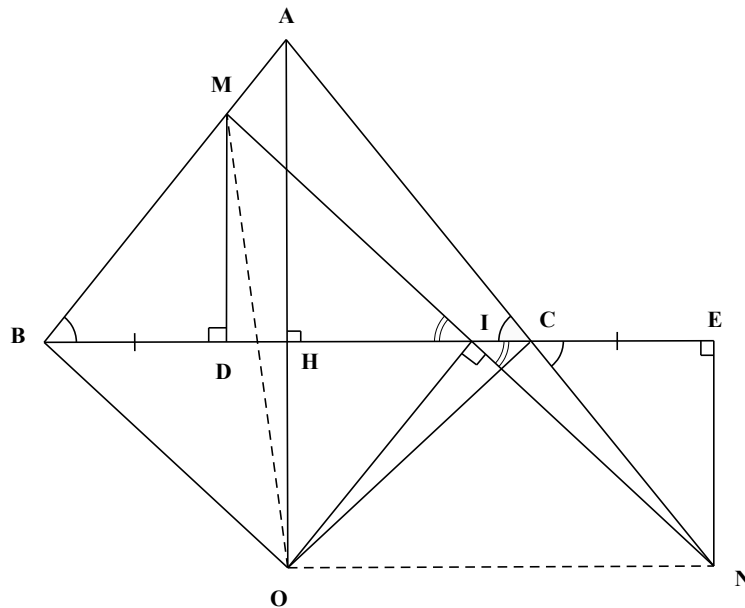
$\Rightarrow \angle AIB = \angle JIB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của $\angle DIE$.

Câu 3. (HSG 7 Diễn Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh rằng:

- $BM = CN$.
- $BC < MN$.
- Đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\angle MDB = \angle NEC (= 90^\circ)$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\angle MBD = \angle NCE (= \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \triangle MDB = \triangle NEC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BM = CN \text{ (hai cạnh tương ứng) (*)}$$

b) Ta có $BC = BD + DC$; $DE = DC + CE$, mà $BD = CE$ (gt) $\Rightarrow BC = DE$

Gọi I là giao điểm của MN và BC ta có: $DE = DI + IE < MI + IN = MN$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$$\Rightarrow BC < MN \quad (3)$$

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\Rightarrow AH$ vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác cân ABC .

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có: $AB = AC$ (gt), $\angle OAB = \angle OAC$ (cmt), AO là cạnh chung

Suy ra $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \text{ (cặp góc tương ứng) } \quad (**)$$

$$\Rightarrow OC = OB \text{ (cặp cạnh tương ứng) } \quad (1)$$

Ta có $MD \perp BC$ (gt), $ME \perp BC$ (gt) suy ra $MD \parallel NE$ suy ra $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (so le trong)
 Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có: $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (cmt), $MD = NE$ ($\triangle MDB = \triangle NEC$), $\widehat{IDM} = \widehat{IEN}$ (gt)
 Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng) (2)
 Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OIN$ có: $IM = IN$ (cmt), $\widehat{MIO} = \widehat{NIO} = 90^\circ$, OI chung
 Suy ra $\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng) (3)
 Từ (1), (*) và (3) $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN}$ (cặp góc tương ứng) (***)

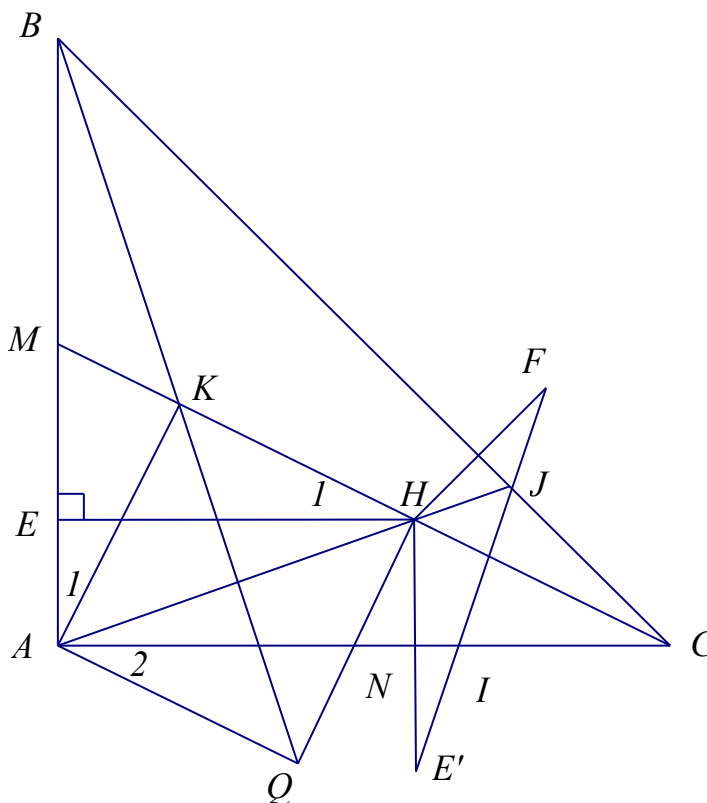
Từ (**) và (***) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$
 $\Rightarrow$ Điểm O cố định. Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 4. (HSG 7 (Thọ Xuân - năm học 2022 - 2023))

Cho tam giác ABC vuông cân có đáy BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

1. Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .
2. Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE .
3. Gọi I là điểm di động trên tia CA , J là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.

Lời giải



1. Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .
 Ta có: tam giác ABC vuông cân có đáy BC nên $AB = AC$

Mà M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC nên $AM = \frac{1}{2}AB; AN = CN = \frac{1}{2}AC$.
 $\Rightarrow AM = AN = CN$

Xét $\triangle AKM$ và $\triangle CHN$, có:

$\angle AKM = \angle CHN = 90^\circ$ (Vì AK vuông góc với CM tại K , NH vuông góc với CM tại H)

$AM = CN$ (cmt), $\angle A_1 = \angle C_1$ (cùng phụ với $\angle AC$)

Do đó $\triangle AKM = \triangle CHN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra: $AK = CH$ (2 cạnh tương ứng).

Xét $\triangle ANQ$ và $\triangle CNH$ có: $\angle QN = \angle HN = 90^\circ$, $AN = CN$ (gt), $\angle ANQ = \angle CNH$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle ANQ = \triangle CNH$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra: $AQ = CH$ (2 cạnh tương ứng).

Do đó suy ra: $AK = HC = AQ$

Ta có: $AK \parallel HN$ (vì cùng vuông góc với CM)

Mà $AQ \perp HN$ nên $AQ \perp AK$ tại A

Suy ra: $\angle KAQ = 90^\circ$ hay $\triangle AKQ$ vuông tại A

$$AK = AQ$$

Ta lại có

Suy ra $\triangle AKQ$ vuông cân tại A

Suy ra: $\angle AKQ = 45^\circ$

Vì $\angle BKA$ và $\angle AKQ$ kề bù nên $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

2. Vì $AK \parallel HN$ hay $AK \parallel HQ$ nên $\angle HOK = \angle AKQ = 45^\circ$ (Hai góc so le trong)

Xét $\triangle AKQ$ có: $\angle KAQ = 90^\circ$, $\angle AKQ = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ$ vuông cân tại A , suy ra $\angle AOK = 45^\circ$

Xét $\triangle AKQ$ và $\triangle HKQ$ có: $\angle KAQ = \angle HKQ = 90^\circ$, KQ (cạnh chung), $\angle AOK = \angle HOK = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ = \triangle HKQ$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow AK = HK$ và $\angle AKQ = \angle HKQ = 45^\circ$

Ta có: Vì $\angle BKH$ và $\angle HKQ$ kề bù nên $\angle BKH = 180^\circ - \angle HKQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Xét $\triangle BKA$ và $\triangle BKH$ có: $AK = KH$, $\angle BKA = \angle BKH = 135^\circ$ (cmt), BK là cạnh chung

Suy ra: $\triangle BKA = \triangle BKH$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó tam giác ABH cân tại B .

Vì $\angle BKA = \angle BKH$ nên $\angle A_1 = \angle H_1$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle A_1 = \angle C_1$ (chứng minh trên);

Ta lại có $AC \parallel HE$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \angle HEM = \angle C_1$ (2 góc đồng vị)

Suy ra: $\angle H_1 = \angle HEM$ hay HM là tia phân giác của góc BHE .

3. Lấy điểm E' sao cho AC là đường trung trực của HE' , mà I thuộc AC nên $IE' = IH$.

Lấy điểm F sao cho BC là đường trung trực của HF , mà J thuộc BC nên $JF = JH$.

Chu vi tam giác HJI là $HI + IJ + HJ = E'I + IJ + JF \geq E'F$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các điểm E', I, J, F thẳng hàng hay I, J lần lượt là giao điểm của $E'F$ với AC, BC .

Vậy : Chu vi tam giác HJI khi I, J lần lượt là giao điểm của EF với AC, BC .

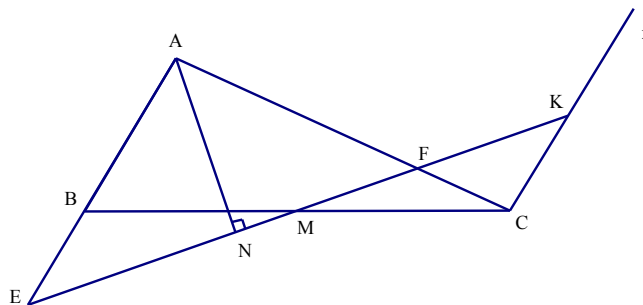
Câu 5. (HSG 7 (Triệu Sơn - năm học 2022 - 2023))

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của $\angle BAC$ tại N và cắt tia AB tại E , cắt AC tại F .

a) Chứng minh rằng $\triangle ANE = \triangle ANF$.

b) Chứng minh rằng $AE = \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ANE$ và $\triangle ANF$, ta có:

$\angle EAN = \angle FAN$ (do AN là tia phân giác của $\angle BAC$)

AN chung

$\angle ANE = \angle ANF = 90^\circ$ ($MN \perp AN$)

$\Rightarrow \triangle ANE = \triangle ANF$ (g.c.g)

b) Từ C kẻ tia $Cx \parallel AB$ và cắt EF tại K hay $BE \parallel CK$ suy ra $\angle BEM = \angle CKM$ (so le trong)

Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMK$, ta có:

$\angle BME = \angle CMK$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

$\angle BEM = \angle CKM$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle BME = \triangle CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CK$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Ta có: $\triangle ANE = \triangle ANF$ (cmt) $\Rightarrow AE = AF \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow \angle AEF = \angle AFE$

Mà $\angle AFE = \angle KFC$ (đối đỉnh) và $\angle AEF = \angle PKC$ (so le trong) $\Rightarrow \angle KFC = \angle PKC$

$\Rightarrow \triangle CFK$ cân tại $C \Rightarrow CF = CK$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BE = CF$

Ta có: $AE = AB + BE$, $AF = AC - FC$

$\Rightarrow AE + AF = AB + BE + AC - FC$

$\Rightarrow 2AE = AB + AC$ (vì $AE = AF$ và $BE = CF$)

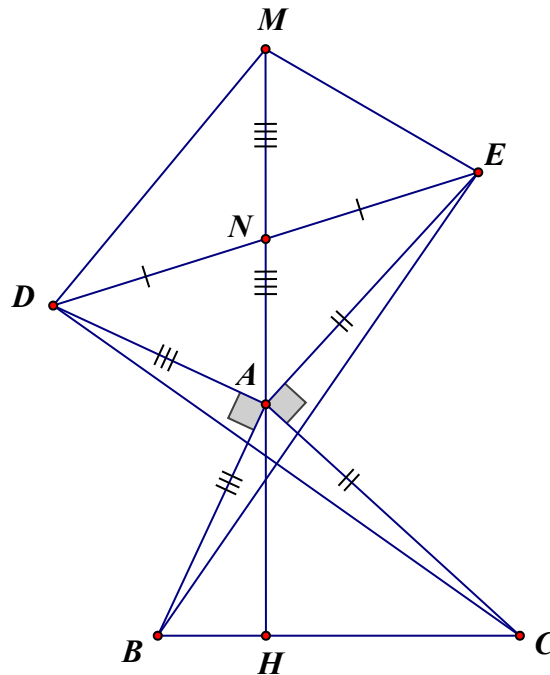
$\Rightarrow AE = \frac{AB + AC}{2}$ (đpcm)

Câu 6. (HSG 7 Võ Thị Sáu- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC đoạn AD vuông góc và bằng AB , đoạn AE vuông góc và bằng AC (D và C nằm khác phía với AB ; B và E khác phía với AC). Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy điểm M sao cho $NA = NM$. Chứng minh rằng:

- $DC = BE$
- $\triangle ABC = \triangle EMA$
- $MA \perp BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có: $DA = BA$ (gt), $\angle BAE = \angle DAC (= \angle BAC + 90^\circ)$, $AE = AC$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$ (Hai cạnh tương ứng)

b) Xét $\triangle NDA$ và $\triangle NEM$ có: $ND = NE$, $\angle DNA = \angle ENM$ (đối đỉnh), $NA = NM$

Suy ra $\triangle NDA = \triangle NEM \Rightarrow ME = AD$ và $\angle MEA = 180^\circ - \angle BAE$

Mặt khác, ta cũng có: $AB = AD$; $\angle BAC = 180^\circ - \angle BAE$

Do đó: $ME = AB$; $\angle MEA = \angle BAC$

Lại có: $AE = AC$

Suy ra: $\triangle ABC = \triangle EMA$ (c.g.c)

c) Kéo dài AM cắt BC tại H

Vì $\triangle ABC = \triangle EMA$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ACB = \angle EAM$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle EAM + \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB + \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHC$ vuông tại H .

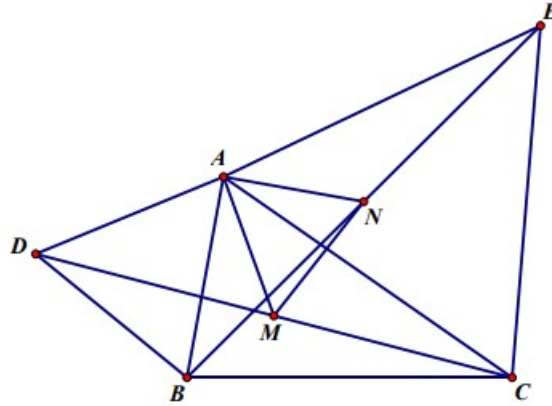
Hay $MA \perp BC$ (đpcm).

Câu 7. (HSG 7 Vĩnh Phúc- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB \neq AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE .

- Chứng minh rằng $DC = BE$
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

Lời giải



a) Có $\triangle ADB$ đều suy ra $\angle DAB = 60^\circ$ tương tự $\angle EAC = 60^\circ$

Ta có: $AB = AD$ (gt), $\angle DAC = \angle BAE (= \angle BAC + 60^\circ)$ và $AC = AE$ (gt)

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c) suy ra $DC = BE$

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AEN$ có: $CM = EN$ (cmt), $\angle ACM = \angle AEN$ (cmt), $CA = EA$ (gt)

Và $\angle CAM = \angle EAN \Rightarrow \angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \angle EAN + \angle CAN = \angle EAC = 60^\circ$ (2)

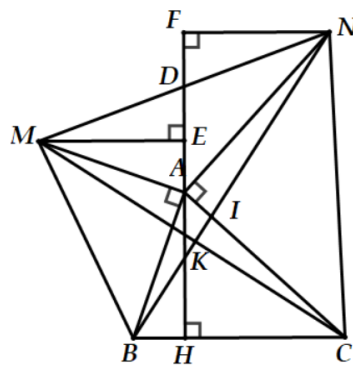
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AMN$ đều

Câu 8. (HSG 7 Hà Đông- năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

- Chứng minh rằng: $\triangle AMC = \triangle ABN$;
- Chứng minh: $BN \perp CM$;
- Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



- Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:
 $AM = AB$ ($\triangle ABM$ vuông cân)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$$\angle MAC = \angle NAC (=90^\circ + \angle BAC)$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có:

$$\angle ANI = \angle KCI (\triangle AMC = \triangle ABN)$$

$$\angle AIN = \angle KIC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle KIC = \angle AIN = 90^\circ, \text{ do đó: } MC \perp BN$$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ (vì $\angle MAB = 90^\circ$)

Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$, nên $\angle AME = \angle BAH$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$, vuông tại E và H , có: $\angle AME = \angle BAH$ (cmt), $MA = AB$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA \Rightarrow FN = AH$

Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$, vuông tại E và F , có:

$$ME = NF (=AH)$$

$$\angle EMD = \angle FND \text{ (phụ với } \angle MDE \text{ và } \angle FDN, \text{ mà } \angle MDE = \angle FDN)$$

$$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD \Rightarrow MD = ND. \text{ Vậy } AH \text{ đi qua trung điểm của } MN.$$

Câu 9. (HSG 7 Hoàng Hóa- năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O

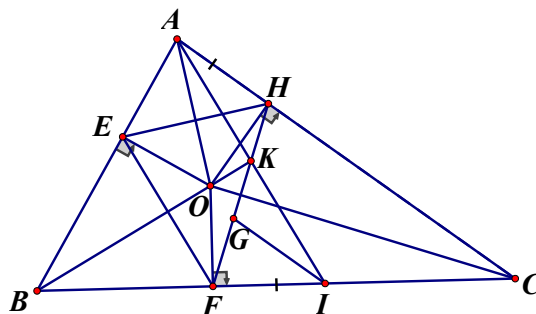
Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = FH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh: $\triangle FCH$ cân.

b) Qua I vẽ $IG \parallel AC$, ($G \in FH$). Chứng minh: $GI = AH$ và $AK = KI$.

c) Chứng minh: ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\angle HO = \angle FO = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC, OF \perp BC$)

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có: OC chung; $\angle HCO = \angle FCO$ (OC là phân giác $\angle C$)

Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

b) Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{HFG} = \widehat{IGF}$.

Vậy $\triangle IFG$ cân tại $I \Rightarrow FI = GI$, mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$; $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cmt); $GI = AH$ (cmt); $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = KI$ (đpcm)

c) Vẽ $OE \perp AB$ tại E ,

Xét $\triangle ABC$ có O là giao điểm ba đường phân giác suy ra BO là tia phân giác của $\angle ABC$ (*)

Có O là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$ và vì $OH \perp AC, OF \perp BC \Rightarrow OH = OF$

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle AHO$ có: $\widehat{AEO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$, $OH = OE$ (cmt), AO là cạnh chung

Suy ra $\triangle AEO = \triangle AHO$ (cạnh huyền cạnh góc vuông) suy ra $AE = AH$ mà $AH = FI$ suy ra $AE = AH = FI$, ($\triangle AEO = \triangle AHO$ (ch - gn)) $\Rightarrow AB = BI$

Chứng minh tương tự câu a ta có $\triangle BEF$ cân tại B hay $BE = BF$ mà $AE = FI$ (cmt) suy ra $BE + AE = BF + FI$ suy ra $BA = BI$

Xét $\triangle BAK$ và $\triangle BIK$ có: $BA = BI$ (cmt), $AK = IK$ (cmt), BK là cạnh chung

Suy ra $\triangle ABK = \triangle IBK$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle ABK = \angle IBK$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của $\angle ABC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau. Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 10. (HSG 7 Bắc Ninh - năm học 2022 - 2023)

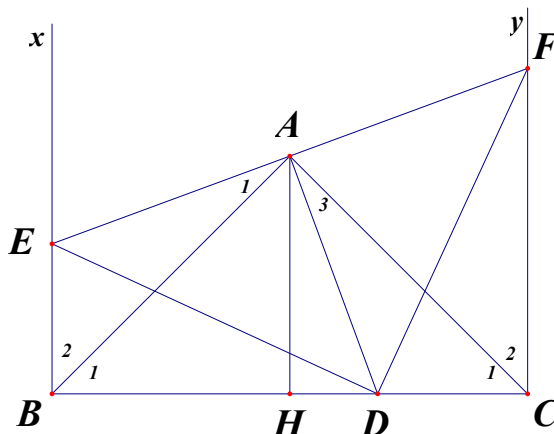
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ các tia Bx, Cy vuông góc với BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A . Gọi D là một điểm nằm giữa B và C . Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự tại E và F .

1) Chứng minh $\triangle AEB = \triangle ADC$;

2) Chứng minh tam giác EDF vuông cân;

3) Xác định vị trí điểm D trên BC để EF có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



1) Ta có $\angle EAB + \angle BAD = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle DAB = 90^\circ \Rightarrow \angle EAB = \angle DAC$

ΔABC vuông cân $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$; $\angle EBA = \angle ACD = 45^\circ$

Xét ΔAEB và ΔADC có

$\angle EAB = \angle DAC$ (theo chứng minh trên)

$AB = AC$ (ΔABC vuông cân)

$\angle EBA = \angle ACD = 45^\circ$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\Delta AEB = \Delta ADC$ (g. c. g)

2) Theo chứng minh phần a ta có $\Delta AEB = \Delta ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta AED$ vuông cân $\Rightarrow \angle AED = \angle ADE = 45^\circ$ (1)

Chứng minh tương tự $\Delta ABD = \Delta ACF \Rightarrow AF = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta ADF$ vuông cân $\Rightarrow \angle ADF = \angle AFD = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔEDF vuông cân.

3) Ta có:

$\Delta AEB = \Delta ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Delta ABD = \Delta ACF \Rightarrow AD = AF$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó $AE = AD = AF \Rightarrow EF = 2AD$

Để EF nhỏ nhất thì AD nhỏ nhất. Mà A cố định nên AD nhỏ nhất khi $AD \perp BC$

Mặt khác ΔABC vuông cân nên suy ra AD là trung trực của BC

$\Rightarrow D$ là trung điểm của BC hay $D \equiv H$. Vậy D là trung điểm của BC thì EF nhỏ nhất.

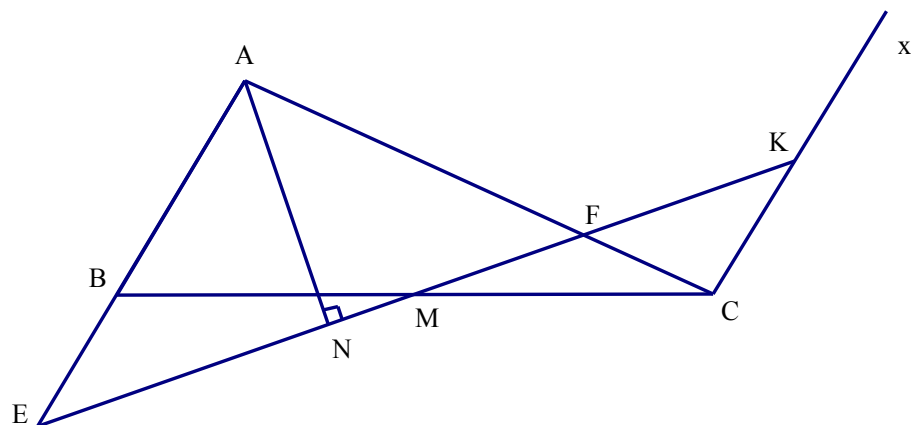
Câu 11. (HSG 7 Lai Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N và cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

1) $AE = AF$

2) $BE = CF$

Lời giải



1) Xét ΔANE và ΔANF có: $\angle ANE = \angle ANF = 90^\circ$, AN chung, $\angle EAN = \angle FAN$ (gt)

Suy ra: $\Delta ANE = \Delta ANF$ (g - c - g). Vậy $AE = AF$ (2 cạnh tương ứng)

2) Từ C kẻ tia $Cx \parallel AB$, cắt tia EF tại K

Xét ΔBME và ΔCMK có: $MB = MC$ (gt), $\angle BME = \angle CMK$ (đối đỉnh), $\angle EBM = \angle KCM$ (so le trong)

Suy ra: $\Delta BME = \Delta CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CK$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Vì $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A , suy ra: $\widehat{E} = \widehat{F_1}$

Mà: $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (đối đỉnh) và $\widehat{E} = \widehat{K}$ (so le trong)

Suy ra: $\widehat{F_2} = \widehat{K} \Rightarrow$ tam giác CFK cân tại $C \Rightarrow CF = CK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = CF$ (đpcm)

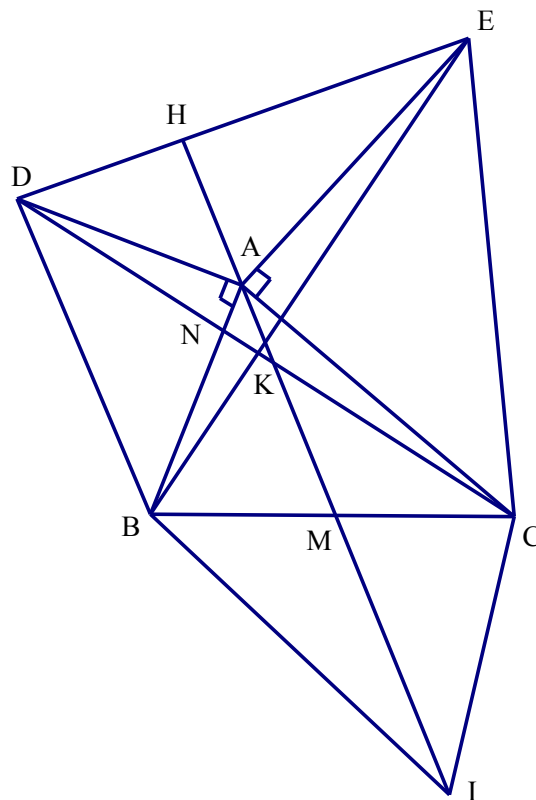
Câu 12. (HSG 7 Bá Thước - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE .

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a)* Chứng minh $DC = BE$?

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$

Tương tự $\widehat{BAE} = 90^\circ + \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có: $AD = AB$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A), $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (cmt) và $AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A) $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ ((c-g-c))

Suy ra $DC = BE$.

* Chứng minh $DC \perp BE$?

Gọi K, N lần lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$\triangle AND$ và $\triangle KNB$ có: $\widehat{AND} = \widehat{KNB}$ (đối đỉnh); $\widehat{ADN} = \widehat{KBN}$ ($\triangle DAC = \triangle BAE$)

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{BKN}$ (định lý tổng 3 góc trong tam giác)

Mà $\widehat{BAN} = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{BKN} = 90^\circ \Rightarrow DC \perp BE$ tại K

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng?

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle IMC$ có: $MI = MA$ (vẽ thêm), $\widehat{AMB} = \widehat{IMC}$ (đối đỉnh); $MB = MC$ (cmt)

Suy ra $\triangle AMB = \triangle IMC$ (c.g.c) $\Rightarrow CI = AB$ và $CI \parallel AB$

Có $CI = AB$ (cmt) mà $AD = AB \Rightarrow CI = AD$

Có $\widehat{DAE} + \widehat{EAC} + \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 360^\circ$ mà $\widehat{DAB} = 90^\circ$ và $\widehat{EAC} = 90^\circ$ suy ra

Có $CI \parallel AB$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ICB}$

Có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ICB}$ suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ICB} = 180^\circ$ hay

$\widehat{BAC} + \widehat{ACI} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{DAE}$ (cùng bù $\widehat{BAC}$)

Xét $\triangle ACI$ và $\triangle EAD$ có: $CI = AD$ (cmt), $\widehat{ACI} = \widehat{DAE}$ (cmt), $CA = AE$ (cmt)

Suy ra $\triangle ACI = \triangle EAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{AED}$ mà $\widehat{AED} + \widehat{EAH} = 90^\circ$ ($\triangle AHE$ vuông tại H)

$\Rightarrow \widehat{CAI} + \widehat{EAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAH} = 180^\circ \Rightarrow M, A, H$ thẳng hàng.

Câu 13. (HSG 7 Thanh Hóa - năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm M ; trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ MH và NK cùng vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Gọi I là giao điểm của MN và BC .

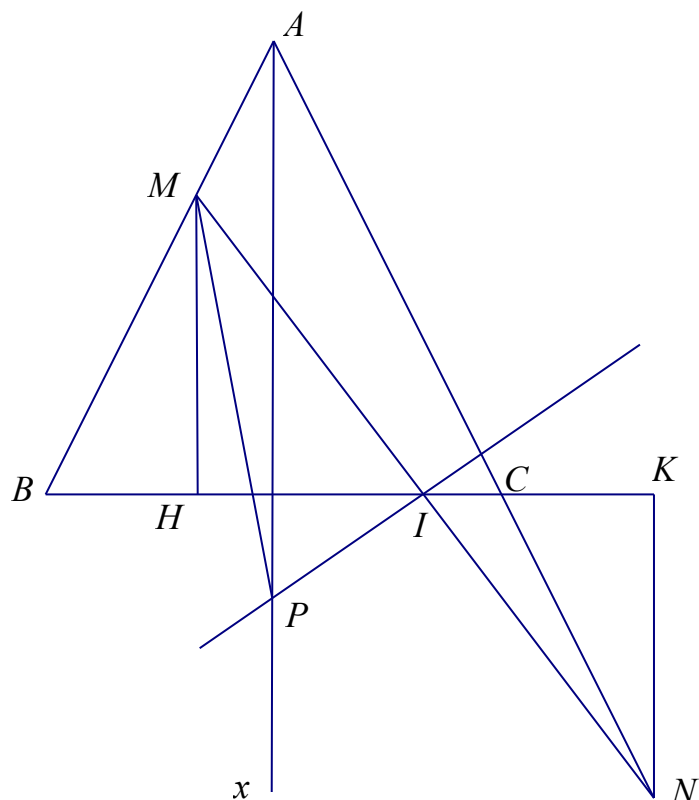
a) Chứng minh $\triangle HBM = \triangle KCN$ và I là trung điểm của MN .

b) Đường trung trực của MN cắt tia phân giác Ax của góc BAC tại P . Chứng minh rằng:

$\widehat{PMB} = \widehat{PNC}$.

c) Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB và N di động trên tia đối của CA đồng thời thỏa mãn $BM = CN$ thì P là một điểm cố định.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông: $\triangle HBM$ và $\triangle KCN$ có:

$BM = CN$ (gt); $\angle HBM = \angle KCN$ (vì cùng bằng $\angle CB$)

Suy ra: $\triangle HBM = \triangle KCN$ (cách huyền- góc nhọn) suy ra: $MH = NK$

Xét tam giác vuông: $\triangle HMI$ và $\triangle KNI$ có:

$MH = NK$ (Chứng minh trên); $\angle HIM = \angle KIN$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\triangle HMI = \triangle KNI$ (Cạnh góc vuông- góc nhọn)

Suy ra $MI = NI$ hay I là trung điểm của MN

b) Theo CM trên I là trung điểm của MN nên PI là trung trực của MN suy ra: $MP = NP$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A mà Ax là phân giác nên AP là trung trực.

Suy ra $BP = CP$. Suy ra: $\triangle BMP = \triangle CNP$ (c.c.c) Suy ra $\angle BMP = \angle CNP$ (đpcm)

c) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABP = \triangle ACP$ (c.c.c)

Suy ra: $\angle ABP = \angle ACP$ hay $\angle MBP = \angle NCP$

Lại có: $\angle MBP = \angle NCP$ nên: $\angle NCP = \angle ACP = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ (Hai góc kề bù bằng nhau)

Vậy $\angle MBP = 90^\circ$ suy ra: BP vuông góc với AB hay P luôn là điểm cố định.

Câu 14. (HSG 7 Ứng Hòa – Hà Tây- năm học 2022 - 2023)

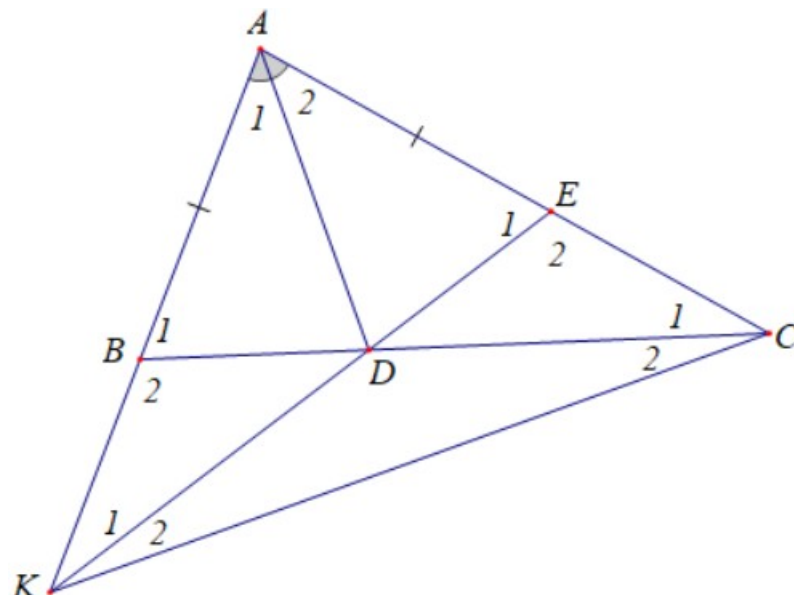
Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, vẽ đường phân giác AD . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

1) Chứng minh: $BD = DE$

2) Gọi K là giao điểm của AB và ED . Chứng minh rằng: $\triangle DBK = \triangle DEC$.

3) $\triangle ABC$ cần có thêm điều kiện gì để D cách đều ba cạnh của $\triangle AKC$.

Lời giải



1) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADE$ có: $AB = AE$ (gt), $\angle A_1 = \angle A_2$ (gt), AD là cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE$ (c.g.c) suy ra $BD = ED$ (hai cạnh tương ứng)

2) Vì $\triangle ADB = \triangle ADE$ (cmt) $\Rightarrow \angle B_1 = \angle E_1$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle B_2 + \angle B_1 = 180^\circ$, $\angle E_2 + \angle E_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle B_2 = \angle E_2$

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle DEC$ có: $\angle B_2 = \angle E_2$ (cmt), $BD = ED$ (theo ý 1), $\angle BDK = \angle EDC$ (hai góc đối đỉnh)
 $\Rightarrow \triangle DBK = \triangle DEC$ (g.c.g)

3) Để D cách đều ba cạnh của tam giác AKC thì D là giao điểm ba đường phân giác $\triangle AKC \Rightarrow CB$ là đường phân giác $\triangle AKC$.

Ta có $AB = AE$ (gt) và $BK = EC$ (vì $\triangle DBK = \triangle DEC$ (cmt)) $\Rightarrow AK = AC$ hay $\triangle AKC$ cân tại A

$\Rightarrow \angle AKC = \angle ACK$. Từ đó suy ra $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle K_1 = \angle K_2$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle AKC + \angle C_2 = 2\angle C_1 + \angle C_1 = 3\angle C_1$

Vậy nếu $\triangle ABC$ có thêm điều kiện $\angle ABC = 3\angle ACB$ thì điểm D cách đều ba cạnh của $\triangle AKC$.

Câu 15. (HSG 7 Liên Trường- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $AB = CD$. Gọi P, Q

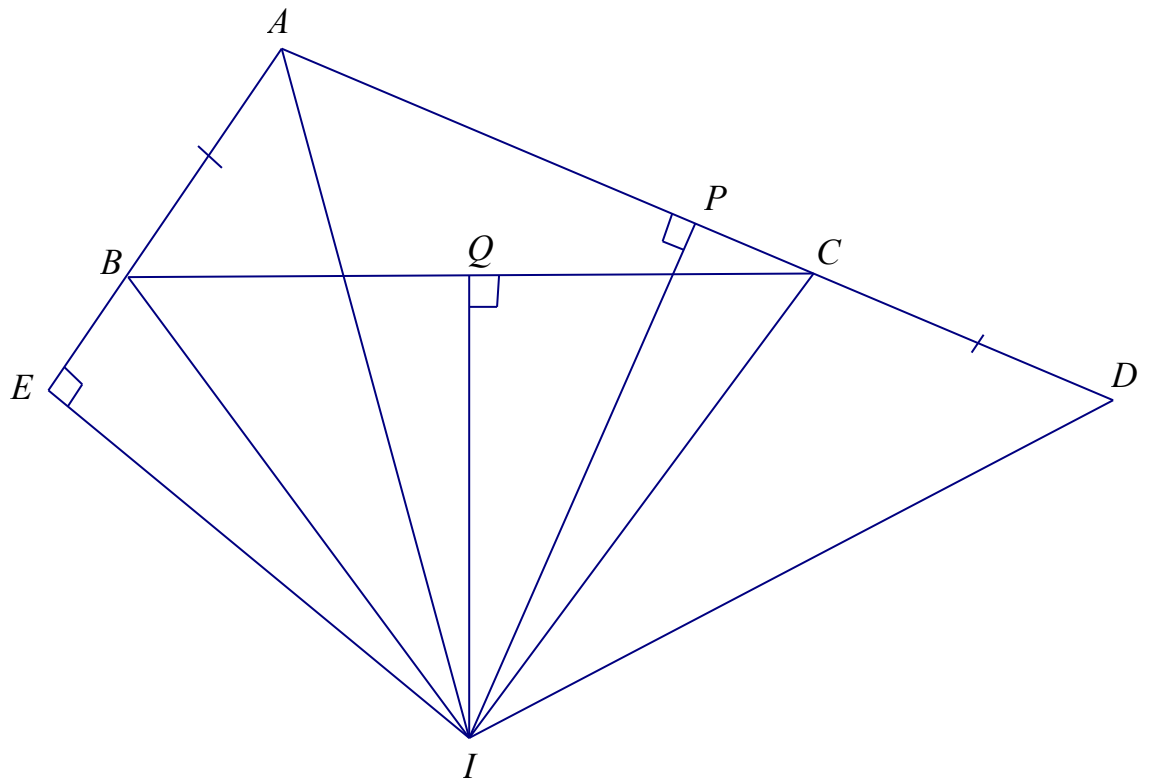
là trung điểm của AD, BC và I là giao điểm các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q .

a) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$

b) Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC .

c) Kẻ IE vuông góc với AB chứng minh $AE = \frac{1}{2} AD$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AIB$ và $\triangle DIC$ có $AB = CD$ (gt)

Vì IQ là đường trung trực của BC nên $IB = IC$

Vì IP là đường trung trực của AD nên $IA = ID$

Vậy $\triangle AIB = \triangle DIC$ (c.c.c)

b) $\triangle AIB = \triangle DIC \Rightarrow \angle BAI = \angle CDI$

Lại có tam giác $\triangle AID$ cân tại $I \Rightarrow \angle IAD = \angle IDA \Rightarrow \angle IAD = \angle BAI$

Vậy AI là tia phân giác của góc $\angle BAC$

P là trung điểm của AD nên $AP = \frac{1}{2}AD$.

c) Do

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle AIP$ có: $\angle IAE = \angle IAP$ (cmt), Chung cạnh AI , $\angle AEI = \angle API = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AIE = \triangle AIP$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AE = AP$

$$AE = \frac{1}{2}AD.$$

Vậy

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>