

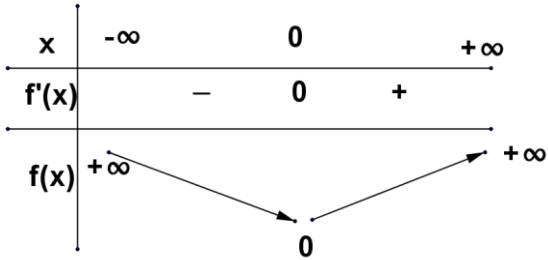
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN THI : TOÁN

| Bài | Hướng dẫn chấm | Điểm |
|-----|----------------|------|
|-----|----------------|------|

**Bài I** (4 điểm)

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | Điều kiện $x \neq -\frac{1}{2}$ . $y' = -\frac{1}{(2x+1)^2}$ .                                                                                                                                                                                                                            | 0,5 |
|  | Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x}{2x+1} = x+m \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ .                                                                                                                                                                                          | 0,5 |
|  | Ta có $\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m + 1 - 2m = m^2 + 1 > 0 \forall m \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2(m+1)\left(-\frac{1}{2}\right) + m \neq 0 \forall m \end{cases}$<br>nên đường thẳng $y = x+m$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B \forall m$ .                             | 1,0 |
|  | Gọi $x_1, x_2$ lần lượt là hoành độ của $A, B$ .<br>Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A, B$ là $-\frac{1}{(2x_1+1)^2}; -\frac{1}{(2x_2+1)^2}$                                                                                                                                                 | 0,5 |
|  | Tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với $(C)$ tại $A, B$ là<br>$K = -\frac{1}{(2x_1+1)^2} - \frac{1}{(2x_2+1)^2} = -\frac{[(2x_1+1)^2 + (2x_2+1)^2]}{[4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1]^2}$<br>$= -\frac{[4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 + 4(x_1+x_2) + 2]}{[4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1]^2} = -4m^2 - 2.$ | 1,0 |
|  | Suy ra $K \leq -2$ dấu bằng xảy ra khi $m = 0$ .<br>Vậy khi $m = 0$ thì tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến tại $A, B$ là lớn nhất.                                                                                                                                                         | 0,5 |

**Bài II** (5 điểm)

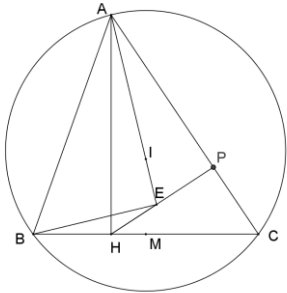
|     |                                                                                                                                                   |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ý 1 | Xét $f(x) = \cos x + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -\sin x + 2x \Rightarrow f''(x) = -\cos x + 2$                                                   | 0,5 |
|     | Vì $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbf{R}$<br>Mà $f'(0) = 0$ suy ra $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ | 0,5 |
|     | Bảng biến thiên<br>                                            | 0,5 |

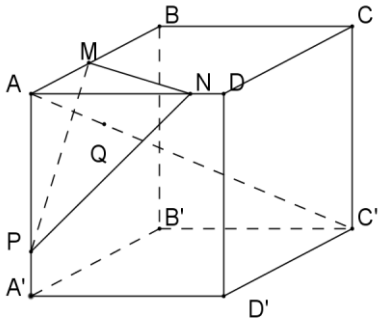
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|     | Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow \cos x \geq 1 - x^2 \forall x \in R$<br>Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$<br>Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,5 |
| Ý 2 | $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + 3y + 1 = 2x\sqrt{y+3} & (2) \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2(y-3)x + (y-3)^2 + 2y^2 + 4y - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (x+y-3)^2 + 2y^2 + 4y - 6 = 0$ $\Rightarrow 2y^2 + 4y - 6 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3 (*)$ $(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{y+3} + (y+3) + 2y - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{y+3})^2 + 2y - 2 = 0$ $\Rightarrow 2y - 2 \leq 0 \Rightarrow y \leq 1 (**)$ Từ $(*)$ ; $(**)$ $\Rightarrow y = 1$ thay vào hệ ta được $x = 2$<br>Vậy hệ có nghiệm là $(2;1)$ . | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |

### Bài III (3 điểm)

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ý 1 | Xét hiệu $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - a_n = \frac{-a_n(a_n - 1)^2}{a_n^2 - a_n + 1}$                                                                                                                                                                                                                    | 0,5 |
|     | Vì $a_n^2 - a_n + 1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0$<br>Vậy $(a_n)$ là dãy giảm.                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5 |
| Ý 2 | Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5 |
|     | Ta có $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1 + a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} = 1 + \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}$<br>$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n - 1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1}$<br>$\Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}$ | 0,5 |
|     | Suy ra $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_1 - 1}$                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5 |
|     | Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |

### Bài IV (5 điểm)

|     |                        |                                                                                       |     |
|-----|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ý 1 | Chứng minh $BAE = HAC$ |  | 0,5 |
|-----|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|     |                                                                                                                                                                                             |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|     | Vì tứ giác $ABHE$ nội tiếp nên $BAE = PHC \Rightarrow HAC = PHC$<br>$\Rightarrow HP \perp AC$                                                                                               | 0,5 |
|     | Phương trình $AC: x + y - 12 = 0$<br>Phương trình $BC: y + 4 = 0$<br>Tọa độ $C(16; -4); B(4; -4)$                                                                                           | 0,5 |
|     | Phương trình $AH: x - 6 = 0$<br>Tọa độ $A(6; 6)$<br>Kết luận                                                                                                                                | 0,5 |
| Ý 2 | 1) Ta có $AC' = AB + AD + AA'$<br>$\frac{AC'}{AQ} AQ = \frac{AB}{AM} AM + \frac{AD}{AN} AN + \frac{AA'}{AP} AP$                                                                             | 0,5 |
|     |                                                                                                           |     |
|     | Vì $M, N, P, Q$ đồng phẳng nên<br>$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} + \frac{AA'}{AP} = \frac{AC'}{AQ} \Leftrightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{AQ}$        | 0,5 |
|     | Chứng minh bổ đề<br>4 điểm $M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \begin{cases} OM = xON + yOP + zOQ \\ x + y + z = 1 \end{cases}$                                                        | 1,0 |
|     | 2) Chứng minh $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AH^2}$                                                                                                           | 1,0 |
|     | Ta có $\frac{3}{AQ^2} = \left( \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} \right)^2 > \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AH^2}$<br>$\Rightarrow AQ < \sqrt{3}AH$ . | 0,5 |
|     |                                                                                                                                                                                             | 0,5 |

### Bài VI(3 điểm)

|         |                                                                                                                                                                 |     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tìm max | Chứng minh $abc \leq 27; ab + bc + ca \leq 27; a + b + c \leq 9$ .                                                                                              | 0,5 |
|         | suy ra<br>$P = (a + 6)(b + 6)(c + 6)$<br>$= abc + 6(ab + bc + ca) + 36(a + b + c) + 216 \leq 729$<br>Vậy $\max P = 729$ . Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 3$ . | 0,5 |
| Tìm min | Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 27 \Rightarrow a, b, c \in [-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$<br>$\Rightarrow a + 6 > 0, b + 6 > 0, c + 6 > 0$ .                                    | 0,5 |
|         | Ta có                                                                                                                                                           | 0,5 |

|  |                                                                                                                                                |     |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | $(a+6)(b+6) = ab + 6a + 6b + 36$ $= \frac{1}{2}(2ab + 12a + 12b + 36 + 36 + a^2 + b^2 - a^2 - b^2)$ $= \frac{1}{2}((a+b+6)^2 + 36 - 27 + c^2)$ |     |
|  | $\Rightarrow P \geq \frac{(9+c^2)(6+c)}{2}$                                                                                                    | 0,5 |
|  | Chứng minh $P \geq 25$<br>Vậy $\min P = 25$ . Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = -5; b = -1; c = -1$                                           | 0,5 |

**Chú ý :**

- Học sinh làm theo cách khác nhưng đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Giám khảo không được làm tròn tổng điểm.