

Người làm: Trần Thị Minh Thu

Zalo: Tranthiminhthu

- số đt zalo: 0396661036

Email: tranthiminhthu86@gmail.com

CD10: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT**Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất****A. Trắc nghiệm (nếu có)****Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định, Trường THCS Đào Duy Từ, 2018 - 2019)**Cho $(a - b)^2 + 6ab = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a.b$ là

- A.** 6 **B.** -6 **C.** 7 **D.** 5

Lời giảiVì $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi $a; b$ nên $(a - b)^2 + 6ab \geq 6ab \Leftrightarrow 36 \geq 6ab \Leftrightarrow ab \leq 6$ Do đó giá trị lớn nhất của $x = a.b$ là 6 khi $a = b$ **B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)**Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^4 + z^6$.**Lời giải**Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.Giả sử $x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x \leq 0, y \leq 0$ * Nếu $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$ Mà $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$ Do đó: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 0$ Khi đó: $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$ Mà $|x| + |y| + |z| = x + y - z$ (vì $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 0$)Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$ Mà $x + y = -z$ (vì $x + y + z = 0$)Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$ Mặt khác: $-1 \leq z \leq 0$

$$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1\} \\ y \in \{0; 1\} \\ z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1)\}$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$* \text{ Nếu } x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow z = -x - y \geq 0$$

$$\text{Mà } -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; -1 \leq z \leq 1$$

$$\text{Do đó: } -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1$$

$$P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

Khi đó

$$\text{Mà } |x| + |y| + |z| = (-x) + (-y) + z \quad (\text{vì } -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1)$$

$$P = x^2 + y^4 + z^6 \leq (-x) + (-y) + z$$

Do đó

$$\text{Mà } -x - y = z \quad (\text{vì } x + y + z = 0)$$

$$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2z$$

$$\text{Mặt khác: } 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -1 \leq x \leq 0 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra khi không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn.

Tương tự với trường hợp x và y cùng dấu hoặc y và z cùng dấu ta cũng có:

$$(x; y; z) = \{(0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2 khi

$$(x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1), (0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Câu 2. (HSG 7 thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương, 2021 - 2022)

$$T = |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$\begin{aligned} T &= |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014 \\ &= |2x - y| - 6|2x - y| - 2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 2014 \\ &= -5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \end{aligned}$$

Ta có $|2x - y| \geq 0, \forall x, y; (x - 2)^2 \geq 0, \forall x$

Suy ra $-5|2x - y| \leq 0, \forall x, y; -2(x - 2)^2 \leq 0, \forall x$

$$-5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \leq 2022, \forall x, y$$

Suy ra $T \leq 2022, \forall x, y$

Dấu “=” xảy ra
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là 2022 khi $x = 2; y = 4$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình, 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{40 - 3x}{13 - x}$ với x là số nguyên khác 13.

Lời giải

Ta có $P = \frac{40 - 3x}{13 - x} = 3 + \frac{1}{13 - x}$ với $x \neq 13$

Suy ra P lớn nhất khi $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất

* Nếu $x > 13$ thì $13 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} < 0$.

* Nếu $x < 13$ thì $13 - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} > 0$.

Từ 2 trường hợp trên suy ra $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất khi $x < 13$

Vì phân số $\frac{1}{13 - x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất.

Hay $13 - x = 1 \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn $x < 13$)

Suy ra P có giá trị lớn nhất là 4 khi $x = 12$

Câu 4. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$. Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x

Câu 5. (HSG 7 huyện Tân Bình, thành phố Hồ Chí Minh, trường Nguyễn Trung Trực, 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{2(7x-8)}{2(2x-3)} = \frac{7(2x-3)+5}{2(2x-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

Đặt

$$B = \frac{5}{2(2x-3)}$$

Đặt $x \in \mathbb{N}$, B thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất

Với $x \in \mathbb{N}$, B đạt giá trị lớn nhất khi $2x-3$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 $\Leftrightarrow 2x-3=1$
 $\Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

GTLN của A là $A=6 \Leftrightarrow x=2$

Câu 6. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương, 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó $M = \frac{x-14}{4-x}$

Lời giải

$$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

Xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x} < 0$;

$x > 4$ thì $\frac{-10}{4-x} > 0$

Ta chỉ xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất $\Rightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất
 $\Rightarrow 4-x=1$ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)

Vậy $x=3$ khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là -11

Câu 7. (HSG 7 trường THCS Trần Thiện, 2018 - 2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2008| + |x-2009| + |y-2010| + |x-2011| + 2011$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$ và $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a=0$.

Ta có: $|x-2008| + |x-2011| = |x-2008| + |2011-x| \geq |x-2008+2011-x| = 3$

Dấu "=" xảy ra khi $(x-2008)(2011-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2008 \leq x \leq 2011$

Ta có: $|x-2009| \geq 0$, với mọi x . Dấu "=" xảy ra khi $x=2009$

Ta có: $|y-2010| \geq 0$, với mọi y . Dấu "=" xảy ra khi $y=2010$

Do đó: $A \geq 3 + 2011 = 2014$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2009$, $y=2010$;

Vậy $A_{\min} = 2014 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2009 \\ y=2010 \end{cases}$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Oai, thành phố Hà Nội, trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$P = -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 8x - 16 + 21 = -(x^2 + 8x + 16) + 21 = -(x+4)^2 + 21$$

Ta có:

$$-(x+4)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x+4)^2 + 21 \leq 21$$

Do với mọi x với mọi x

Do đó biểu thức P đạt giá trị lớn nhất là 21 khi $x = -4$

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Hồng Liên, 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x-2| + |2x-2013| = |2x-2| + |2013-2x| \geq |2x-2+2013-2x| = 2011$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x-2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Phương Trung, 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-2001| + |x-1|$

Lời giải

$$A = |x - 2001| + |x - 1| = |x - 2001| + |1 - x| \geq |x - 2001 + 1 - x| = 2000$$

Vậy biểu thức đạt GTNN là $2000 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2001$

Câu 11. (HSG 7 huyện Phũ Lý, tỉnh Hà Nam, trường THCS Hoàng Quyên, 2018 - 2019)

Cho $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0$

Vậy $\min A = 2011 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1006,5$

Câu 12. (HSG 7 huyện Rạch Giá, tỉnh Kiên Giang, 2018 - 2019)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c + d - a - b$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra
 $\Rightarrow (x - a)(d - x) \geq 0$ và $(x - b)(c - x) \geq 0 \Rightarrow a \leq x \leq d, b \leq x \leq c$

Do đó $\min A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Câu 13. (HSG 7 Đ164 huyện 2018 - 2019)

Cho $A = |x| - |x - 2|$
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$

Trường hợp 2: $0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$

Trường hợp 3: $x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$

Do đó với mọi giá trị của x thì $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Câu 14. (HSG 7 huyện Thái Thụy, tỉnh Thái Bình, 2018 - 2019)

Cho $Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$$

$$Q = (|x - 2017| + |x - 2019|) + |x - 2018|, \text{ vì } |x - 2019| = |2019 - x|$$

$$\Rightarrow Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) + |x - 2018|$$

$$\text{Mà } |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$Q = \left(|x - 2017| + |2019 - x| \geq 2 + |x - 2018| \right) \left. \begin{array}{l} \\ |x - 2018| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x - 2017)(2019 - x) \geq 0 \\ x - 2018 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2017 \leq x \leq 2019 \\ x = 2018 \end{cases} \Rightarrow x = 2018$$

Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2018$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thường Tín, thành phố Hà Nội, 2018 - 2019)

$$\text{Tìm GTLN của: } A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$$

Lời giải

$$A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021} = \frac{|x - 2019| + 2021 - 1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$\text{Vì } |x - 2019| + 2021 \geq 2021 \text{ với mọi } x \Rightarrow \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \leq \frac{1}{2021}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2019$

$$\text{Do đó } A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \geq 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

$$\text{GTNN của } A = \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow x = 2019$$

Câu 16. (HSG 7 trường THCS Cù Chính Lan, 2018 - 2019)

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: } A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

$$\text{Vì } |x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

$$\text{Mà } |x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$$

Do đó:

$$A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2 + |x - 2014| \left. \begin{array}{l} \\ |x - 2014| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2013)(2015 - x) \geq 0 \\ x - 2014 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 2 $\Leftrightarrow x = 2014$

Câu 17. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí, 2018 - 2019)

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức } g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$$

Lời giải

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có:

$$(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

$$g(x)_{\min} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định, Trường THCS Đào Duy Từ, 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} \\ \frac{x}{10} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k$, khi đó $x = 10k; y = 14k; z = 15k$

Suy ra $xy + yz + zx = 2000$

$$\Rightarrow 10k \cdot 14k + 14k \cdot 15k + 15k \cdot 10k = 2000$$

$$140k^2 + 210k^2 + 150k^2 = 2000$$

$$500k^2 = 2000$$

$$k^2 = 4$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ hoặc } k = -2$$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được:
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 0. Dấu "=" xảy ra khi $(x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$

Câu 19. (HSG 7 Trường THCS Quang Trung, 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi: $B = |x - 2| + |3 - x|$

Lời giải

Ta xét các trường hợp: $x < 2$, $2 \leq x \leq 3$, $x > 3$.

Nếu $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$; $3 - x > 0$

$$\text{Do đó: } |x - 2| = -(x - 2); |3 - x| = 3 - x \Rightarrow B = -(x - 2) + 3 - x = -2x + 5$$

Vì $x < 2 \Rightarrow -x > -2$. Do đó $B = -2x + 5 > (-2).2 + 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B$ nhỏ nhất $= 2$
 Nếu $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 2 \geq 0; 3 - x \geq 0 \Rightarrow B = x - 2 + 3 - x = 1 \Rightarrow B = 1$
 Nếu $x > 3 \Rightarrow x - 2 > 0; 3 - x < 0 \Rightarrow B = x - 2 - (3 - x) = 2x - 5$
 Vì $x > 3 \Rightarrow B = 2x - 5 > 2.3 - 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B = 2$
 Từ 3 trường hợp trên ta được giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là 1 khi $2 \leq x \leq 3$

Dạng 2.1. Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thái Thụy, tỉnh Thái Bình, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

$$S \text{ có } (n-1) \text{ số hạng}$$

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Mặt khác

$$S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $n - 2 < S < n - 1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Câu 2. (HSG 7 huyện Cát Tiên, tỉnh Lâm Đồng, 2018 - 2018)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau không phải là một số nguyên:

$$A = \frac{a}{2016 - c} + \frac{b}{2016 - a} + \frac{c}{2016 - b}$$

Lời giải

$$A = \frac{a}{2016 - c} + \frac{b}{2016 - a} + \frac{c}{2016 - b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow A > 1$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c} \Rightarrow A < 2$$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Dạng 2.2. Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương, 2018 - 2019)

Cho $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$
 Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} \\ 3B &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} \\ 3B - B &= 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \\ \Rightarrow B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2} \\ \text{Vậy } B &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Oai, thành phố Hà Nội, trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{6} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$
 Chứng minh:

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}, \text{ ta có:} \\ A &< \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \\ A &> \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thường Tín, thành phố Hà Nội, 2018 - 2019)

Cho $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3}$
 Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2^3 &> 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3} \\ \text{Tương tự: } \frac{1}{3^3} &< \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019} \\ \Rightarrow A &< \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right) \\ \Rightarrow A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right) \\ \Rightarrow A &< \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Lục Nam, tỉnh Bắc Giang, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2003.2004.2005} \\ A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.5} - \dots + \frac{1}{2003.2004} - \frac{1}{2004.2005} \right) \\ A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2004.2005} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Dạng 2.3. Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Không có

Dạng 2.4. Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Phú Lý, tỉnh Hà Nam, trường THCS Hoàng Quyền, 2018 - 2019)

Cho ba số dương $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Chứng minh: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0; y-1 \leq 0$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy+1 \geq x+y \Rightarrow \frac{1}{xy+1} \leq \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{xy+1} \leq \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} \leq \frac{x}{y+z} \quad (2); \frac{y}{xz+1} \leq \frac{y}{x+z} \quad (3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

Mà $\frac{x}{y+z} \leq \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{2x}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y}{x+z} \leq \frac{2y}{x+y+z}; \frac{z}{x+y} \leq \frac{2z}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \leq 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, tỉnh Hưng Yên, trường THCS Lê Hồng Phong 2022 - 2023)

$$\text{Chứng minh rằng: Nếu } 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9 \text{ thì } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được: $a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$

$$\text{Vì } a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0 \text{ nên ta được: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Sơn Trà, tỉnh Đà Nẵng 2018 - 2019)

$$\text{Tìm } x, y \text{ biết } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$$

Lời giải

$$\text{Vì } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \quad \text{với mọi } x; \quad |3y + 12| \geq 0 \quad \text{với mọi } y, \text{ do đó:}$$

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \quad \text{với mọi } x, y. \text{ Theo đề bài thì:}$$

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \quad \text{Từ đó suy ra } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$$

$$\text{Khi đó } 2x - \frac{1}{6} = 0 \quad \text{và} \quad 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \quad \text{và} \quad y = -4. \text{ Vậy } x = \frac{1}{12}; y = -4$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>