

CĐ3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

Dạng 1: So sánh hai lũy thừa
Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa với nhau)
Dạng 3: Một số bài toán khác

Dạng 1. So sánh hai lũy thừa

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021-2022)

Cho hai số $a = 2^{333}$ và $b = 3^{222}$. Khẳng định nào đúng

A. $a = b$

B. $a > b$

C. $a < b$

D. $3a = 2b$

Lời giải

Chọn A

Ta có : $a = 2^{333} = 2^{3 \cdot 111} = (2^3)^{111} = 8^{111}$

$b = 3^{222} = 3^{2 \cdot 111} = (3^2)^{111} = 9^{111}$

Vì $8^{111} < 9^{111}$ nên $a < b$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần $2^{100}; 3^{75}; 5^{50}$

Lời giải

Ta có $2^{100} = 16^{25}; 3^{75} = 27^{25}; 5^{50} = 25^{25}$

Mà: $0 < 16 < 25 < 27 \Rightarrow 16^{25} < 25^{25} < 27^{25}$

$2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$

Vậy:

Câu 2. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải

Ta có: $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9$

$\Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$

Lại có: $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$

$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7$

$$\Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

$$\text{Từ } (1) \text{ và } (2) \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

So sánh: 222^{333} và 333^{222}

Lời giải

$$\text{Ta có: } 222^{333} = (222^3)^{111}; \quad 333^{222} = (333^2)^{111}$$

$$222^3 = (2.111)^3 = 8.111^3 = 8.111.111^2 = 888.111^2$$

$$333^2 = (3.111)^2 = 9.111^2$$

$$\text{Vì } 888 > 9 \Rightarrow 888.111^2 > 9.111^2 \Rightarrow 222^3 > 333^2 \Rightarrow (222^3)^{111} > (333^2)^{111} \Rightarrow 222^{333} > 333^{222}$$

$$\text{Vậy } 222^{333} > 333^{222}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện, trường 2022 - 2023)

So sánh hai số: 3^{30} và 5^{20}

Lời giải

$$3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}; \quad 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} < 27^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{30} > 5^{20}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện, 2017 - 2018)

So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Lời giải

$$\text{Biến đổi } 16^{20} = 2^{4.20} = 2^{80}$$

$$\text{Có } 2^{80} < 2^{100}$$

$$\Rightarrow 16^{20} < 2^{100}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện)

So sánh hai A và B, biết: $A = 3^{21}$; $B = 2^{31}$

Lời giải

$$A = 3^{21} = 3.(3^2)^{10} = 3.9^{10}$$

$$B = 2^{31} = 2.(2^3)^{10} = 2.8^{10}$$

$$\text{Vì } 3.9^{10} > 2.8^{10} \text{ nên } A > B$$

Câu 7. (HSG 7 huyện)

So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$

Lời giải

$$(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$$

Ta thấy:

$$125^{13} < 128^{13}$$

$$\Rightarrow -125^{13} > -128^{13}$$

$$\Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$$

Câu 8. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018)

So sánh hai số 3^{50} và 5^{20} .

Lời giải

$$3^{30} = ((3^3)^{10}) = 27^{10};$$

Ta có :

$$5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} < 27^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{30} > 5^{20}$$

Câu 9. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018; trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

So sánh hợp lý:

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{200}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) $(-32)^{27}$ và $(-18)^{39}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{16}\right)^{200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{800} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) Ta có: $32^{27} = (2^5)^{27} = 2^{135} < 2^{156} = 2^{4 \cdot 39} = 16^{39} < 18^{39}$

b) Ta có:

$$\Rightarrow -32^{27} > -18^{39}$$

$$\Rightarrow (-32)^{27} > (-18)^{39}$$

Câu 10. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

$$x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

Xét

Với $0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0$

$$\Rightarrow x^n - x < 0$$

$$\Rightarrow x^n < x$$

Vậy $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là

A. $N < \frac{3}{16}$ **B.** $N > \frac{3}{16}$ **C.** $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$ **D.** $N > \frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\Rightarrow 3N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \quad (1)$$

Đặt

$$M = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3M = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$4M = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow M < \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4N < M < \frac{3}{4} \Rightarrow N < \frac{3}{16}$

Câu 2. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3 2022 - 2023)

Cho biểu thức $a = (-2)^{2020}$; $b = -3 \cdot (-2)^{2021}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $a > b$ **B.** $a < b$ **C.** $a < -b$ **D.** $-a > b$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$a = (-2)^{2020} = 2^{2020}$$

$$b = -3 \cdot (-2)^{2021} = -3 \cdot (-2) \cdot (-2)^{2020} = 6 \cdot 2^{2020} > 2^{2020}$$

Do đó: $a < b$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có:

$$A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$$

Ta có:

$$\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}$$

$$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4.5.6} = \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}$$

.....

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1).n(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12}$$

$$A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12} \quad (\text{với } n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Ninh Giang (Đợt 1), tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}.$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$3A = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$$

Ta có

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$$

Đặt

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}, k > 1)$$

Ta có

Thay $k=10; k=11; \dots, k=2025$, ta có

$$S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$$

Vậy $S < 1$.

Câu 4. (HSG 7 thành phố Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1.$$

Chứng minh rằng

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2024^2} \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

Do vậy $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$

Câu 5. (HSG 7 thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$$

Nên ta có

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3A < 4$$

$$\Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

$$S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 6. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

Cho . Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

Ta có:

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

$$B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

Đặt

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3$$

$$\Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

$$A < \frac{3}{16}$$

Do đó

Câu 7. (HSG 7 thị xã Điện Bàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$. Hãy so sánh P với 1.

Lời giải

$$P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$$

Ta có

$$P = \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100}$$

$$P = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}$$

$$P = 1 - \frac{1}{100}$$

Suy ra $P < 1$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Lời giải

Ta có

$$VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$$

$$3.VT = 3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được: $2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}} \right) < \frac{1}{3}$

Vậy: $VT < \frac{1}{6}$ (3)

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta thấy $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$

$$VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (4)$$

Nên

Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, trường TH và THCS Kỳ Đồng 2022 - 2023)

Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$. So sánh B với 50

Lời giải

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) \quad (\text{Có } 98 \text{ nhóm trong } B)$$

$$B > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) \quad (\text{Có } 98 \text{ nhóm trong ngoặc})$$

$$B > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{99}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{99}{2} = \frac{101}{2} > \frac{100}{2} = 50$$

Vậy $B > 50$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Hưng 2022 - 2023)

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$$

Cho

$$\text{So sánh } D \text{ với } -\frac{1}{2}.$$

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$-D = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{16} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2} \right)$$

$$-D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-D = \frac{1.2.3.4.5 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-D = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200} \quad \text{hay} \quad -D > \frac{1}{2}.$$

$$D < -\frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 11. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}. \text{ So sánh } A \text{ và } \frac{3}{4}.$$

Lời giải

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2018}{3^{2017}}$$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2018}{3^{2017}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}\right)$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$2A < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} \quad (1)$$

$$B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

Đặt

$$3B = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

Suy ra:

$$3B - B = \left(3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}\right)$$

$$2B = 3 - \frac{1}{3^{2017}} \Rightarrow B = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2017}} < \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } 2A < \frac{3}{2} \quad \text{Hay} \quad A < \frac{3}{4}.$$

$$A < \frac{3}{4}$$

Vậy

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thái Tông 2022 - 2023)

$$M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}; N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}. \text{ Hãy so sánh } M \text{ và } N$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2022 > 2021 \Rightarrow \frac{2022}{2021} > 1$$

$$\text{Mà } 2024 > 2023 \Rightarrow \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024}} < \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}} \\
 &\Rightarrow \frac{2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} < \frac{2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\
 &\Rightarrow \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} < \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\
 &\Rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} > 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\
 &\Rightarrow \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} > \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}
 \end{aligned}$$

Vậy $M > N$

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

Lời giải

$$B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$$

$$11B = 1 + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11^{99}}$$

$$11B - B = 1 - \frac{1}{11^{100}}$$

$$\Rightarrow 10B = 1 - \frac{1}{11^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow 10B < 1$$

$$B < \frac{1}{10}$$

Vậy

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bình Lăng 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1.2} > \frac{1}{2.2},$$

$$\frac{1}{2.3} > \frac{1}{3.3} ;$$

$$\frac{1}{3.4} > \frac{1}{4.4} ;$$

...

$$\frac{1}{2018.2019} > \frac{1}{2019.2019} ;$$

$$\frac{1}{2019.2020} > \frac{1}{2020.2020} ;$$

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020}$$

$$0 < \frac{2019}{2020} < 1 \quad \text{nên} \quad 1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$$

Vậy suy ra: $1 < A < 2$

Chứng tỏ A không phải là một số nguyên.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Thai Hưng 2022 - 2023)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$\Rightarrow B = \left(1 - \frac{1}{3^{2019}}\right) : 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2019} \cdot 2} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy} \quad B < \frac{1}{2}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}} \quad \text{. Chứng minh:} \quad B < \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$$

Ta có:

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2017}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2017}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Diệp Nông 2022 - 2023)

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3}$$

$$A = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2020 \cdot 2020}$$

$$A < \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020 \cdot 2021}$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} - \frac{1}{2020 \cdot 2021} \right)$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{2020 \cdot 2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020 \cdot 2021} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2020 \cdot 2021} > 0 \text{ nên } \frac{1}{20} - \frac{1}{2020 \cdot 2021} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020 \cdot 2021} \right) < \frac{1}{40}$$

$$\text{hay } A < \frac{1}{40}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Diệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots;$

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

$$\text{Với mọi } k \geq 2 \text{ ta có: } \frac{1}{ka_k^2} < \frac{1}{ka_{k-1}a_k} \text{ (vì } a_k > a_{k-1})$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

Với $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; \dots; n\}$ ta có:

$$\frac{1}{2 \cdot a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{3 \cdot a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

...

$$\frac{1}{n \cdot a_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng từng vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}. \quad \text{Chứng minh } \frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < \frac{8}{9} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } A > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}A = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022} \right]$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5}$$

Vì $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0$ mà $\frac{3}{5} > 0$ nên $A > 0$ (1)

Vì $0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên.

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Ninh, trường 2021 - 2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}.$$

Từ đó suy ra

$$C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2}$$

$$C < \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$$

$$\Rightarrow C < 2 \quad (1)$$

Ta có: $\frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

Từ đó suy ra

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow C > 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 22. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Đặt:

$$49.A = 49 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-6}} - \frac{1}{7^{4n-4}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

Ta có:

$$49.A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50.A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Câu 23. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

$$B < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 25. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 26. (HSG 7 Huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$

Lời giải

$$2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$$

Ta có:

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 27. (HSG 7 trường Hương Điền 2017 - 2018)

$$\text{Chứng minh: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Lời giải

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2017 - 2018)

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$$

Lời giải

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Đặt

$$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

Ta có:

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Câu 29. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

$$A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \quad B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$$

So sánh các số sau:

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \Rightarrow 10A = \frac{10^{2012} + 10}{10^{2012} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2012} + 1}$$

$$B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1} \Rightarrow 10B = \frac{10^{2013} + 10}{10^{2013} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2013} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2012} + 1} > \frac{9}{10^{2013} + 1} \text{ nên } 10A > 10B$$

$$\Rightarrow A > B$$

Câu 30. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

...

$$\frac{1}{2023.2023} < \frac{1}{2022.2023}$$

Suy ra

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Vậy $C < \frac{3}{4}$.

Câu 31. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} \quad (1)$$

Ta thấy tổng A có 2022 số hạng

$$A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$$

$$A = (1 + \frac{1}{2^2}) + (1 + \frac{1}{3^2}) + (1 + \frac{1}{4^2}) + \dots + (1 + \frac{1}{2022^2}) + (1 + \frac{1}{2023^2})$$

$$A = \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{2022 \text{ s/h}} + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2})$$

$$A = 2022 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2} + \frac{1}{2023^2}) \quad (2)$$

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 1$$

$$A = 2022 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}) < 2022 + 1 = 2023 \quad (3)$$

Do đó

(1), (2), (3)

Từ

$$\text{Chứng tỏ: } \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

b) Ta đi chứng minh bài toán phụ sau:

Thật vậy: với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 + n < n^2 + n + n + 1$

$$(n+1) < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

$$n(n+2) < (n+1)(n+1)$$

(Nhân chéo chứng minh)

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{99}{100} \right)^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

$$P < \frac{1}{10}$$

Vậy

Câu 32. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2023}{2025} = \frac{1}{2025} \quad (1)$$

Với mọi $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \dots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$ (đpcm)

Câu 33. (HSG 7 huyện Tri Thức, tỉnh Đồng Nai, 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) \\ &< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Câu 34. (HSG 7 huyện Tiêu Du, tỉnh Bắc Ninh, 2022 - 2023)

1. Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

2. Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Lời giải

1) Ta có $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

$$7^2 A = 7^2 \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}} \right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Vậy $A < \frac{1}{50}$.

2) Ta có $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$

$$7A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} \right)$$

$$6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7$$

$$\Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} \right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} \right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2023}} = 1 + 2022 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2023}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}} \right) > \frac{2023}{2}$$

Vậy $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

a) Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

b) Chứng minh rằng $\frac{2n \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot (n + 1)}{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Ta có: $A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

b) Chứng minh rằng $\frac{2n \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot (n + 1)}{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$, ta có: $2 \leq 2$ nên đúng.

Giả sử đúng với $n = k$, tức là $\frac{4^k}{k + 1} \leq \frac{2k \cdot (2k - 1) \cdot \dots \cdot (k + 1)}{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$

Ta đi chứng minh đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} \leq \frac{(2k+2).(2k+1).2k.....(k+2)}{(k+1).k.(k-1)....2.1}$$

Thật vậy:

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} \leq \frac{2k.(2k-1).....(k+1)}{k.(k-1)....2.1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} \leq \frac{2k.(2k-1).....(k+1)}{k.(k-1)....2.1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

Ta có thể chứng minh:

$$VT \leq \frac{2k.(2k-1).....(k+1)}{k.(k-1)....2.1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = VP.$$

$$\frac{2n.(2n-1).....(n+1)}{n.(n-1)....2.1} \geq \frac{4^n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

Cho (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh $B < 1$

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

Cho (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$

Vậy $B > 1$

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lê Nam Đế 2022 - 2023)

$$A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Phương 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; S_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

+) Ta có

$$S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1$$

$$A < \frac{1}{4}$$

Vậy

Câu 40. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

$$\text{Đặt: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 41. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}. \text{ Chứng minh rằng } A < \frac{25}{36}.$$

Lời giải

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$$

Ta có:

$$\frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{1}{5.5} < \frac{1}{4.5}$$

...

$$\frac{1}{1000.1000} < \frac{1}{999.1000}$$

$$\text{Do đó: } A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1000} = \frac{25}{36} - \frac{1}{1000} < \frac{25}{36}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{25}{36}.$$

Dạng 3: Một số bài toán khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 21x^2y + xy^2$ với x, y thỏa mãn điều kiện:
 $(x - 2)^2 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$

Lời giải

Ta có: $(x - 2)^2 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$B = 21 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$$

Thay vào biểu thức ta được

$$B = \frac{85}{2}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng $2C + 3 = 3^n$

Lời giải

Ta có: $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$ (1) $3C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{2023} + 3^{2024}$ (2)

Trừ (2) cho (1) về theo về ta được:

$$2C = 3^{2024} - 3$$

$$2C + 3 = 3^{2024}$$

Mà $2C + 3 = 3^n$.

$$3^{2024} = 3^n$$

Vậy $n = 2024$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Cho a, b, x, y thỏa mãn $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ ($a \neq 0; b \neq 0; a + b \neq 0$)

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$

Lời giải

Ta có: $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} bx^2 - ay^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Với } bx^2 - ay^2 = 0 &\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} \quad (\text{do } x^2 + y^2 - 1 = 0) \\ &\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1011} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1011} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1011} \Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} = \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}} \\ &\Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}} \\ \text{Vậy } &\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}} \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x+y+z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Khi đó ta có: $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023}$$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0$$

$$= 2023$$

Vậy với x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Thì giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023} = 2023$

Câu 5. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a biết $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2.

Lời giải

Vì a là số tự nhiên nên $6a+4 > a+2$.

Mặt khác có $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 nên $6a+4$ chia hết cho $a+2$
 $\Rightarrow 6a(a+2) - 8$ chia hết cho $a+2 \Rightarrow a+2 \in U^{(8)}$, mà a là số tự nhiên nên
 $\Rightarrow a+2 \in \{0; 4; 8\} \Rightarrow a \in \{0; 2; 6\}$

Thay vào các giá trị của a vừa tìm được vào đề bài $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 thì $a=0; a=2$ (thỏa mãn).

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)

Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$

Lời giải

Ta có đẳng thức: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101})(a+b) - ab(a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b

Kết hợp với: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Suy ra: $1 = (a+b) - ab \Rightarrow (a-1)(b-1) = 0$

TH1: $a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow 1+b^{100} = 1+b^{101} = 1+b^{102} \Rightarrow b=1$

TH2: $b-1=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow 1+a^{100} = 1+a^{101} = 1+a^{102} \Rightarrow a=1$

TH1: $a=1 \Rightarrow 1+b^{100} = 1+b^{101} = 1+b^{102} \Rightarrow b=1$

TH2: $b=1 \Rightarrow 1+a^{100} = 1+a^{101} = 1+a^{102} \Rightarrow a=1$

Do đó: $P = a^{2014} + b^{2014} = 1^{2004} + 1^{2005} = 2$

Câu 7. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

Ta có:

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3A + A = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}\right)$$

$$\Rightarrow 4A = \frac{1}{3^{100}} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right)$$

$$\text{Do } 3^{100} > 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} - 1 < 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) < 0 \Rightarrow |A| = -A$$

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = -4A + \frac{1}{3^{100}} = -4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = -\left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = -\frac{1}{3^{100}} + 1 + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Vậy $B = 1$.

Câu 8. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Tìm số tự nhiên n để: $2C + 1 = 3^{2023}$

Lời giải

Ta có: $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

$$\Rightarrow 3C = 3(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C = 3C - C = (3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{n+1} - 1 + 1 = 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow n + 1 = 2023$$

$$\Rightarrow n = 2022$$

Vậy $n = 2022$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>