CHƯƠNG

**III**

**GIỚI HẠN**

**HÀM SỐ LIÊN TỤC**

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

**LÝ THUYẾT.**

**I ===I**

**1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ**

**1. Định nghĩa**

Ta nói rằng dãy số  ***có giới hạn là 0*** khi n dần tới dương vô cực, nếu  có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:  hay  hay  khi .

Ta nói dãy số  có giới hạn hữu hạn là  (hay  dần tới ) khi nếu 

Kí hiệu:  hay  hay  khi 

**2. Một số giới hạn cơ bản:**

**a) **; ;

**a) **; ;  là hằng số;

**c) ** nếu ;

**d)** Dãy số  với  có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là , ****

.

**II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ**

**a)** Nếu  và và  là hằng số thì :

  

  

 .  và 

**b)**  Nếu  với mọi  và  thì  và .

**Kỹ năng sử dụng máy tính**

Tính  thì nhập và ấn phím CALC .

**III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN**

Cấp số nhân vô hạn  có công bội , với  được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: 

**IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC**

 Ta nói dãy số  có giới hạn là  khi, nếu  có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:  hay  khi 

 Dãy số  có giới hạn là  khi , nếu .

Kí hiệu:  hay  khi 

Nhận xét: 

**Nhận xét**

a)  với  nguyên dương;

b) nếu .

c) Nếu  và  thì.

d) Nếu ,  và  thì 

e) 

e) Nếu  và  thì 

**CHÚ Ý:**

**Quy tắc tìm giới hạn tích** 

Nếu . Khi đó

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Quy tắc tìm giới hạn thương** 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Dấu của  |  |
|   |  | Tùy ý |   |
|   |   |   |  |
|   |   |  |
|   |   |   |  |
|   |   |  |

**Nhận xét: Ta thường dùng quy tắc giới hạn tích trong bài toán giới hạn vô cực của dãy số.**

***TÓM TẮT CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT***

|  |  |
| --- | --- |
| **Giới hạn hữu hạn** | **Giới hạn vô cực** |
| ***1.******Giới hạn đặc biệt****:**;* *;* ***2.******Định lí****:**a) Nếu lim un = a, lim vn = b thì**• lim = a + b**• lim = a – b**• lim = a.b**•* *b) Nếu un ≥ 0, ∀n và lim un= a**thì a ≥ 0 và lim* *c) Nếu* *,∀n và lim vn = 0**thì lim un = 0**d) Nếu lim un = a thì* ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn****S = u1 + u1q + u1q2 + … =*  | ***1. Giới hạn đặc biệt****:**;* ***2. Định lí****:**a) Nếu*  *thì* *b) Nếu lim un = a, lim vn = ±∞ thì lim**= 0**c) Nếu lim un = a ≠ 0, lim vn = 0**thì lim*  *=* *d) Nếu lim un = +∞, lim vn = a**thì lim =* *\* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* *,* *, ∞ – ∞, 0.∞ thì phải tìm cách khử dạng vô định.* |

**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**II ===I**

**DẠNG 1: CHỨNG MINH DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN **

***Phương pháp giải:*** Để chứng minh  ta chứng minh với mỗi số  nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số  sao cho .

1. Chứng minh rằng 

1. Chứng minh rằng 

1. Chứng minh rằng 

**DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN BẰNG  CỦA DÃY SỐ**

***Phương pháp giải:*** Sử dụng *định nghĩa* *giới hạn *và *các giới hạn đặc biệt* để giải quyết bài toán.

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Cho dãy số  với . Tính 

1. Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm  với .

1. Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm  với .

1. Cho dãy số  với. Tính 

1. Cho dãy số  với. Tính 

1. Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm  với .

1. Cho dãy số  với. Tính 

1. Cho dãy số  với. Tính 

1. Cho dãy số  được xác định bởi: . Tính 

**DẠNG 3.** **TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**  có  (trong đó  là các đa thức của n)

***Phương pháp giải:*** Chia tử và mẫu cho  với  là lũy thừa có số mũ cao nhất của , sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn

1. , với  bằng:

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

**DẠNG 4.** **TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**  có  (trong đó  và  là các biểu thức chứa căn của .

***Phương pháp giải***

 Đánh giá bậc của tử và và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫy cho  với  là số mũ lớn nhất của  và  (hoặc rút  là lũy thừa lớn nhất của  và  ra làm nhân tử. Áp dụng các định lí về giới hạn để tìm giới hạn

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

**DẠNG 5. NHÂN VỚI MỘT LƯỢNG LIÊN HỢP**

***Phương pháp giải***

 Sử dụng các công thức nhân liên hợp.

 

   .

 .

 

 

 

 .

 

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

**DẠNG 6**  (trong đó  và  là các biểu thức chứa hàm mũ 

***Phương pháp giải:*** Chia cả tử và mẫu cho  trong đó  là cơ số lớn nhất.

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tìm .

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

1. Tính giới hạn 

1.  bằng

1.  bằng

**Lời giải**

**DẠNG 8.  cho bằng công thức truy hồi**

***Phương pháp giải:*** Tìm công thức số hạng tổng quát của  rồi sử dụng các phương pháp tính giới hạn dãy số.

1. Tìm  biết .

1. Tìm  biết .

1. Tìm  biết .

1. Tìm  biết .

1. Tìm  biết  có giới hạn hữu hạn và .

1. Tìm  biết  có giới hạn hữu hạn và .

1. Cho dãy số  được xác định bởi  với mọi . Biết dãy số có giới hạn hữu hạn,  bằng:

1. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn  (chu kỳ ),  được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó  là các số nguyên dương. Tìm tổng .

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản , trong đó  là các số nguyên dương. Tính .

**DẠNG 9: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA ĐA THỨC HOẶC CĂN THEO **

**Phương pháp:** Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. **( Tử riêng, mẫu riêng)**.

1. Gía trị của  là.

1. Giá trị của  là.

1. Giá trị của  là.

1. Giá trị của  là.

1. Giá trị của là.

1. Giá trị của  là.

1. Giá trị của  là.

1.  bằng.

1. Cho dãy số  xác định , ,  với mọi . Tìm giới hạn của dãy số .

**DẠNG 10: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA LŨY THỪA BẬC **

**Phương pháp:** Rút cơ số lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. ( Tử riêng, mẫu riêng ).

1. bằng.

1. bằng.

1. Giá trị của  là.

1. Giá trị của  là.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.**

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Tìmgiới hạn sau

1. Tìmgiới hạn sau

1. Tìmgiới hạn sau

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Giá trị của  bằng

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để 

1. Kết quả của giới hạn  bằng:

1. Biết rằng  với  là các tham số. Tính giá trị của biểu thức 

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Tìmgiới hạn sau

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Tìmgiới hạn sau 

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

1. Giá trị của giới hạn  là:

1. Giá trị của giới hạn  là:

1. Có bao nhiêu giá trị của  để 

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  thỏa .

1. Cho dãy số  với , trong đó  là tham số thực. Tìm  để 

1. Tính 

1. Tính giới hạn của dãy số **.**:

1. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn  có kết quả bằng:

1. Tính giới hạn

1. Cho hình vuông  có độ dài là. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ , có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế ta nội tiếp theo hình vẽ. Tính tổng chu vi của các hình vuông đó

