

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2-LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH LŨY THỪA BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

-Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a...a$ (n thừa số a với $n \in \mathbb{N}$)

-Qui ước: $a^0 = 1(a \neq 0)$

-Các phép tính lũy thừa:

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m . a^n = a^{m+n}$

- Chia hai lũy thừa cùng cơ số : $a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0; m \geq n)$

- Lũy thừa một tích: $(a.b)^n = a^n . b^n$

- Lũy thừa một thương: $(a : b)^n = a^n : b^n (b \neq 0)$

- Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$

- Lũy thừa tăng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

- Lũy thừa với số mũ nguyên âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI LŨY THỪA.

So sánh trực tiếp:

Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

- Nếu hai lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n, a > 1 \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu hai lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn

$$a^n > b^n, n > 0 \Leftrightarrow a > b$$

So sánh gián tiếp:

Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$$A > B, B > C \Rightarrow A > C$$

$$A.C < B.C, C > 0 \Rightarrow A < B$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: So sánh hai lũy thừa

I. Phương pháp giải

- Để so sánh hai lũy thừa A và B ta tìm một lũy thừa M sao cho $A < M < B$ hoặc $A > M > B$

Trong đó A và M ; M và B có thể so sánh trực tiếp được.

- Để so sánh 2 lũy thừa A và B ta tìm hai lũy thừa M và N sao cho $A < M < N < B$ hoặc $A > M > N > B$

Trong đó A và M ; M và B ; M và N có thể so sánh trực tiếp được.

II. Bài toán

Bài 1: So sánh các số sau:

a) 199^{20} và 2003^{15}

b) 3^{39} và 11^{21}

Lời giải:

a) Ta có: $199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

$$\text{Vì } 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 200^{15} > 199^{20}$$

$$\text{Vậy } 200^{15} > 199^{20}$$

b) $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\text{Do } 121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

$$\text{Vậy } 11^{21} > 3^{39}$$

Bài 2: So sánh các số sau:

$$2^{30} + 3^{30} + 4^{30} \text{ và } 3.24^{10}$$

Lời giải:

Ta có:

$$4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} > 8^{10} \cdot 3^{15} > 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = (8.3)^{10} \cdot 3 = 24^{10} \cdot 3$$

$$\text{Vậy } 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$$

Bài 3: So sánh các số sau:

a) 2^{225} và 3^{151}

b) 1990^{20} và 2003^{15}

c) 2^{91} và 5^{36}

Lời giải

a) Ta có $2^{225} = (2^3)^{75} = 8^{75} < 9^{75} = (3^2)^{75} = 3^{150} < 3^{151}$

$$\text{Vậy } 2^{225} < 3^{151}$$

b) Ta có:

$$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$$

$$\text{Vì } 2^{60} \cdot 5^{45} > 2^{60} \cdot 5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$$

$$\text{Vậy } 2003^{15} > 199^{20}$$

c) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18} > 25^{18} = 5^{36}$

$$\text{Vậy } 2^{91} > 5^{36}$$

Bài 4: So sánh các số sau:

a) 99^{20} và $9^{10} \cdot 11^{30}$

b) 961^{42} và 100.23^{93}

Lời giải:

a) Ta có

$$99^{20} = [(99)^2]^{10} = 9801^{10} < (22^3)^{10} = 22^{30}; 22^{30} = (2.11)^{30} = 2^{30} \cdot 11^{30} = 8^{10} \cdot 11^{30} < 9^{10} \cdot 11^{30}$$

$$\text{Vậy } 99^{20} < 9^{10} \cdot 11^{30}$$

b) Ta có:

$$961^{42} < 1000^{42} = 10^{126} = 100 \cdot 10^{124}$$

$$100 \cdot 23^{93} = 100 \cdot (23^3)^{31} > 100 \cdot (10^4)^{31} = 100 \cdot 10^{124}$$

$$\Rightarrow 961^{42} < 100 \cdot 23^{93}$$

Vậy $961^{42} < 100 \cdot 23^{93}$

Bài 5: So sánh các số sau:

a) 107^{50} và 73^{75}

b) 37^{75} và 71^{50}

Lời giải:

a) Ta có

$$107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8 \cdot 9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$$

$$\text{Vì } 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$$

Vậy $107^{50} < 73^{75}$

b) Ta có: $71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$

$$37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Vì } 2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow 37^{75} > 71^{50}$$

Vậy $37^{75} > 71^{50}$

Bài 6: Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 2^{63} = (2^7)^9 = 128^9; \quad 5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

$$2^{63} = (2^7)^9 = 128^9; \quad 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$$

Bài 7: So sánh các số sau:

a) 50^{20} và 2550^{10}

b) 999^{10} và 999999^5

Lời giải:

a) Ta có: $50^{20} = \left[(50)^2\right]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 50^{20} < 2550^{10}$

b) Ta có: $999^{10} = \left[(999)^2\right]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$

Bài 8: So sánh : $A = 1234^{56789}$ và $B = 56789^{1234}$

Lời giải:

Ta có: $A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = 10^{150000}$; $B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = 10^{10000}$

Vì: $10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$

Bài 9: So sánh các số sau:

a) 17^{20} và 31^{15}

b) 199^{20} và 100^{24}

c) 31^{11} và 17^{14}

Lời giải:

$$17^{20} > 16^{20} = 2^{80} > 2^{75} = (2^5)^{15} = 32^{15} > 31^{15}$$

a) Ta có:

b) $199^{20} > 200^{20} = 2^{20} \cdot 100^{20} < (2^3)^7 \cdot 100^{20} < 10^7 \cdot 100^{20} < 100^{24}$

c) $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$; $17^{14} > 16^{14} = 2^{56} \Rightarrow 31^{11} < 17^{14}$

Bài 10: So sánh các số sau:

a) 11^{1979} và 37^{1321}

b) 107^{50} và 51^{75}

c) 3^{201} và 6^{119}

Lời giải:

a) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}; 37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} > 1331^{660} = 11^{1979}$$

b) Ta có: $107^{50} < 150^{50} = (3 \cdot 50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$

c) Ta có: $3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}; 6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$

Bài 11: So sánh các số sau:

a) $2^{1995} < 5^{863}$

b) $2^{1999} < 7^{714}$

Lời giải:

$$2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5; 5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$$

Ta có:

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860}

$$2^{10} = 1024; 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

Ta có:

Lại có $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$, cần so sánh $2^{1720} \cdot 2^{270}$ với số $2^{1720} \cdot 3^{172}$ như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11} \quad 3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11}) \cdot 2^4 > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}$$

$$2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$$

Do đó

$$2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$$

Mà

b) Ta có:

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714}; \begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

$$\begin{cases} 3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \\ 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \end{cases}$$

Mà

$$\Rightarrow 2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

Bài 12: So sánh 2 hiệu sau

$$72^{45} - 72^{44} \text{ và } 72^{44} - 72^{43}$$

Lời giải:

Ta có

$$+ 72^{45} - 72^{44} = 72^{44}(72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$$

$$+ 72^{44} - 72^{43} = 72^{43}(72 - 1) = 72^{43} \cdot 71$$

$$\text{Vì } 72^{44} \cdot 71 < 72^{43} \cdot 71 \text{ nên } 72^{45} - 72^{44} < 72^{44} - 72^{43}$$

Bài 13: So sánh

a) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

b) 107^{50} và 37^{75}

c) 33^{39} và 11^{21}

Lời giải:

a) $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9(1990 + 1) = 1991 \cdot 1990^9 < 1991 \cdot 1991^9 = 1991^{10}$

Vậy $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$

b) Ta có

$$+) 107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$$

$$+) 37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$\text{Vì } 2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{100} \cdot 3^{150}$$

$$\text{Do đó } 37^{75} > 107^{50}$$

c) Ta có:

$$+) 3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$+) 11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\text{Vì } 121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

Bài 14: So sánh

a. 99^{20} và 9999^{10}

b. 8^5 và $3 \cdot 4^7$

c. 202^{303} và 303^{202}

d. 10^{10} và 48.50^5

Lời giải:

a. Ta thấy : $99^2 < 99.101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{10} < 9999^{10}$ hay $99^{20} < 9999^{10}$

b. Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

c. Ta có: $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$

d. Ta có : $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

$48.50^5 = (3.2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3.2^9 \cdot 5^{10} (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow 10^{10} < 48.50^5$

Bài 15: Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải

Ta có : $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$

Lại có : $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$

$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 16: So sánh

a. 11^{1979} và 37^{1321}

b. 107^{50} và 51^{75}

c. 3^{201} và 6^{119}

Lời giải:

$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$

$$a. \quad 37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} > 1331^{660} = 11^{1979}$$

$$b. \quad 107^{50} < 150^{50} = (3 \cdot 50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$$

$$c. \quad 3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}; 6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$$

Bài 17: Chứng minh rằng : $2^{1995} < 5^{863}$

Lời giải

$$\text{Có } 2^{10} = 1024, 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

$$\text{Có } 3^7 = 2187; 2^{10} = 1024 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$$

$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})^{24} > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270} \Rightarrow 2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

$$\text{Vậy } 2^{1990} < 5^{860} \text{ và } 2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$$

Bài 18: Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0 .
Hãy so sánh m

$$\text{với } 10 \cdot 9^8 .$$

Lời giải:

Có 9 cách chọn chữ số hàng trăm triệu.

Có 9 cách chọn chữ số hàng chục triệu....

$$\Rightarrow m = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^9$$

$$\text{Mà } 9^9 = 9 \cdot 9^8 < 10 \cdot 9^8 .$$

$$\text{Vậy: } m < 10 \cdot 9^8 .$$

Dạng 2: So sánh hai biểu thức chứa lũy thừa.

I. Phương pháp giải

- Phương pháp so sánh phần bù:

Với $a, n, m, k \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$+ \text{ Nếu } m > n \text{ thì } k - \frac{a}{m} > k - \frac{a}{n} \text{ và } k + \frac{a}{m} < k + \frac{a}{n}$$

$$+ \text{ Nếu } m < n \text{ thì } k - \frac{a}{m} < k - \frac{a}{n} \text{ và } k + \frac{a}{m} > k + \frac{a}{n}$$

- Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2} (a \in N^*)$ ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

- Sử dụng kết quả của bài toán:

Cho phân số $\frac{a}{b} (a, b \in N, b \neq 0)$

+ Nếu $\frac{a}{b} < 1$ và $m \in N, m \neq 0$ thì: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$

+ Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $m \in N, m \neq 0$ thì: $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$

II. Bài toán

Bài 1: So sánh:

a) $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

b) $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$ và $D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$

Lời giải:

a) Ta có $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \Rightarrow 10A = 10 \cdot \left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10B = 10 \cdot \left(\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}$$

Vì $10^{16} + 1 < 10^{17} + 1 \Rightarrow \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10A > 10B$ hay $A > B$

b) Ta có $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

Vì

$$2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2 \Rightarrow \frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2} \Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \Rightarrow C > D$$

Bài 2: So sánh:

$$A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} \quad B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$$

a) và

$$C = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \quad D = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008}$$

a)

$$= \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

$$A < B$$

Vậy

$$D = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} > 1 \Rightarrow D > \frac{100^{101} + 1 + 99}{100^{100} + 1 + 99} = \frac{100^{101} + 100}{100^{100} + 100} = \frac{100(100^{100} + 1)}{100(100^{99} + 1)} = C$$

b) Ta có :

$$C < D$$

Vậy

Bài 3: So sánh:

$$A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1} \quad B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$$

a) và

$$A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1} \quad B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{17} + 1 + 12} = \frac{13^{16} + 13}{13^{17} + 13} = \frac{13(13^{15} + 1)}{13(13^{16} + 1)} = A$$

a)

$$A > B$$

Vậy

$$B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{1999^{2000} + 1 + 1998}{1999^{1999} + 1 + 1998} = \frac{1999^{2000} + 1999}{1999^{1999} + 1999} = \frac{1999(1999^{1999} + 1)}{1999(1999^{1998} + 1)}$$

b)

=A

$$A < B$$

Vậy

Bài 4: So sánh:

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \quad B = \frac{100^{98} + 1}{100^{97} + 1}$$

a) và

$$A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} \quad B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} > 1 \Rightarrow A > \frac{100^{100} + 1 + 9999}{100^{99} + 1 + 9999} = \frac{100^{100} + 10^2}{100^{99} + 10^2} = \frac{100^2 (100^{98} + 1)}{100^2 (100^{97} + 1)} = B$$

a)

$$A > B$$

Vậy

$$A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{10^{11} - 1 + 11}{10^{12} - 1 + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10(10^{10} + 1)}{10(10^{11} + 1)} = B$$

b)

$$A < B$$

Vậy

Bài 5: So sánh:

$$A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} \quad B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7}$$

a) và

$$A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1} \quad B = \frac{10^8}{10^8 - 3}$$

b) và

Lời giải:

$$A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} = \frac{10^7 - 8 + 13}{10^7 - 8} = 1 + \frac{13}{10^7 - 8}$$

a)

$$B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7} = \frac{10^8 - 7 + 13}{10^8 - 7} = 1 + \frac{13}{10^8 - 7}$$

$$\frac{13}{10^7 - 8} > \frac{13}{10^8 - 7} \Rightarrow 1 + \frac{13}{10^7 - 8} > 1 + \frac{13}{10^8 - 7} \Rightarrow A > B$$

Mà:

$$A > B$$

Vậy

$$A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1} = \frac{10^8 - 1 + 3}{10^8 - 1} = 1 + \frac{3}{10^8 - 1}$$

b)

$$B = \frac{10^8}{10^8 - 3} = \frac{10^8 - 3 + 3}{10^8 - 3} = 1 + \frac{3}{10^8 - 3}$$

$$\frac{3}{10^8 - 1} < \frac{3}{10^8 - 3} \Rightarrow 1 + \frac{3}{10^8 - 1} < 1 + \frac{3}{10^8 - 3} \Rightarrow A < B$$

Mà:

$$A < B$$

Vậy

Bài 6: So sánh:

$$A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8} \quad B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7}$$

a) và

$$A = \frac{100^{2009} + 1}{100^{2008} + 1} \quad B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8} = \frac{19^{20} - 8 + 13}{19^{20} - 8} = 1 + \frac{13}{19^{20} - 8}$$

a)

$$B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7} = \frac{19^{21} - 7 + 13}{19^{21} - 7} = 1 + \frac{13}{19^{21} - 7}$$

$$\frac{13}{19^{20} - 8} > \frac{13}{19^{21} - 7} \Rightarrow 1 + \frac{13}{19^{20} - 8} > 1 + \frac{13}{19^{21} - 7} \Rightarrow A > B$$

Mà:

$$A > B$$

Vậy

$$B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{100^{2010} + 1 + 99}{100^{2009} + 1 + 99} = \frac{100(100^{2009} + 1)}{100(100^{2008} + 1)} = A$$

b)

$$A < B$$

Vậy

Bài 7: So sánh:

$$A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \quad B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$$

a) và

$$A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1} \quad B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{17} + 1 + 9} = \frac{10(10^{15} + 1)}{10(10^{16} + 1)} = A$$

a)

$$A > B$$

Vậy:

$$B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{2005} + 1 + 9}{10^{2006} + 1 + 9} = \frac{10(10^{2004} + 1)}{10(10^{2005} + 1)} = A$$

b)

$$A > B$$

Vậy

Bài 8: So sánh:

$$A = \frac{10^{1992} + 1}{10^{1991} + 1} \quad B = \frac{10^{1993} + 3}{10^{1992} + 3}$$

a) và

$$A = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} - 1} \quad B = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 3}$$

b) và

Lời giải:

$$B = \frac{10^{1993} + 3}{10^{1992} + 3} > 1 \Rightarrow B > \frac{10^{1993} + 3 + 7}{10^{1992} + 3 + 7} = \frac{10(10^{1992} + 1)}{10(10^{1991} + 1)} = A$$

a)

$$B > A$$

Vậy

$$A = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} - 1} = \frac{10^{10} - 1 + 2}{10^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{10^{10} - 1}$$

b)

$$B = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 3} = \frac{10^{10} - 3 + 2}{10^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{10^{10} - 3}$$

$$\frac{2}{10^{10} - 1} < \frac{2}{10^{10} - 3} \Rightarrow 1 + \frac{2}{10^{10} - 1} < 1 + \frac{2}{10^{10} - 3} \Rightarrow A < B$$

Mà:

$$A < B$$

Vậy

Bài 9: So sánh:

$$A = \frac{10^{20} + 6}{10^{21} + 6} \quad B = \frac{10^{21} + 6}{10^{22} + 6}$$

a) và

$$A = \frac{15^{2016} + 5}{15^{2017} + 5} \quad B = \frac{15^{2017} + 1}{15^{2018} + 1}$$

b) và

Lời giải:

$$B = \frac{10^{21} + 6}{10^{22} + 6} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21} + 6 + 54}{10^{22} + 6 + 54} = \frac{10^{21} + 60}{10^{22} + 60} = \frac{10(10^{21} + 6)}{10(10^{21} + 6)} = A$$

a)

$$A > B$$

Vậy

$$B = \frac{15^{2017} + 1}{15^{2018} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{15^{2017} + 1 + 74}{15^{2018} + 1 + 74} = \frac{15^{2017} + 75}{15^{2018} + 75} = \frac{15(15^{2016} + 5)}{15(15^{2017} + 5)} = A$$

b)

$$A > B$$

Vậy

Bài 10: So sánh:

$$A = \frac{10^{20} + 3}{10^{21} + 3} \quad B = \frac{10^{21} + 4}{10^{22} + 4}$$

a) và

$$A = \frac{20^{21} + 3}{20^{22} + 4} \quad B = \frac{20^{22} + 8}{20^{23} + 28}$$

b) và

Lời giải:

$$B = \frac{10^{21} + 4}{10^{22} + 4} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21} + 4 + 26}{10^{22} + 4 + 26} = \frac{10^{21} + 30}{10^{22} + 30} = \frac{10(10^{20} + 3)}{10(10^{21} + 3)} = A$$

a)

$$A > B$$

Vậy

$$B = \frac{20^{22} + 8}{20^{23} + 28} < 1 \Rightarrow B < \frac{20^{22} + 8 + 52}{20^{23} + 28 + 52} = \frac{20^{22} + 60}{20^{23} + 80} = \frac{20(20^{21} + 3)}{20(20^{22} + 4)} = A$$

b)

$$A > B$$

Vậy

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \quad B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$$

Bài 11: So sánh: Và

Lời giải:

Quy đồng mẫu ta có:

$$A = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)} \quad B = \frac{(100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{68} + 1)(100^{99} + 1)}$$

, và

Xét hiệu

$$A - B = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1) - (100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68}}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{100 \cdot 100^{99} - 100^{99} - 100 \cdot 100^{68} + 100^{68}}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{99(100^{99} - 100^{68})}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)} > 0$$

Vậy $A > B$.

Bài 12: So sánh:

$$A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3} \quad B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3}$$

a) và

$$A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138} \quad B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$$

b) và

Lời giải:

a) Chú ý trong trường hợp ta trừ cả tử và mẫu với cùng 1 số thì ta đảo chiều của bất

$$B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3} < 1 \Rightarrow B > \frac{2^{20} - 3 - 9}{2^{22} - 3 - 9} = \frac{2^{20} - 12}{2^{22} - 12} = \frac{2^2(2^{18} - 3)}{2^2(2^{20} - 3)} = A$$

đẳng thức

Vậy $B > A$

$$A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138} > 1 \Rightarrow A > \frac{15^{23} - 3 + 63}{15^{22} - 138 + 63} = \frac{15^{23} + 60}{15^{22} - 75} = \frac{15(15^{22} + 4)}{15(15^{21} - 5)} = B$$

b)

Vậy $A > B$

Bài 13: So sánh: $A = \frac{10^{14} - 1}{10^{15} - 11}$ và $B = \frac{10^{14} + 1}{10^{15} + 9}$

Lời giải:

Ta có

$$+) \quad 10A = \frac{10^{15} - 10}{10^{15} - 11} = \frac{(10^{15} - 11) + 1}{10^{15} - 11} = 1 + \frac{1}{10^{15} - 11}$$

$$+) \quad 10B = \frac{10^{15} + 10}{10^{15} + 9} = \frac{(10^{15} + 9) + 1}{10^{15} + 9} = 1 + \frac{1}{10^{15} + 9}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{10^{15} - 11} > \frac{1}{10^{15} + 9} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vậy $A > B$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: (Lương Tài 2017 – 2018)

So sánh A và B biết

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}; B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có

$$+) \quad 17A = \frac{17^{19} + 17}{17^{19} + 1} = 1 + \frac{16}{17^{19} + 1}$$

$$+) \quad 17B = \frac{17^{18} + 17}{17^{18} + 1} = 1 + \frac{16}{17^{18} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{16}{17^{19} + 1} < \frac{16}{17^{18} + 1} \Rightarrow 17A < 17B$$

Vậy $A < B$

Cách 2:

$$\text{Vì } A < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

Bài 2:

So sánh A và B biết

$$A = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} \quad \text{và} \quad B = \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có

$$+) \quad 10A = \frac{10^{2015} + 2016 + 9 \cdot 2016}{10^{2015} + 2016} = 1 + \frac{9 \cdot 2016}{10^{2015} + 2016}$$

$$+) \quad 10B = \frac{10^{2016} + 2016 + 9.2016}{10^{2016} + 2016} = 1 + \frac{9.2016}{10^{2016} + 2016}$$

$$\text{Vì } \frac{9.2016}{10^{2015} + 2016} > \frac{9.2016}{10^{2016} + 2016} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vậy $A > B$

Cách 2:

$$\text{Vì } B < 1 \Rightarrow B < \frac{(10^{2015} + 2016) + 9.2016}{(10^{2016} + 2016) + 9.2016} = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} = A$$

Vậy $A > B$

Bài 3: (Hoài Nhơn 2015 – 2016)

So sánh M và N biết

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \quad \text{và} \quad N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có

$$+) \quad 19M = \frac{19^{31} + 5 + 18.5}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{18.5}{19^{31} + 5}$$

$$+) \quad 19N = \frac{19^{32} + 5 + 18.5}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{18.5}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Vì } \frac{18.5}{19^{31} + 5} > \frac{18.5}{19^{32} + 5} \Rightarrow 19M > 19N$$

Vậy $M > N$

Cách 2:

$$\text{Vì } N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} < 1 \Rightarrow N < \frac{(19^{31} + 5) + 18.5}{(19^{32} + 5) + 18.5} = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} = M$$

Vậy $M > N$

Bài 4: (Hậu Lộc 2015 – 2016)

So sánh A và B biết

$$A = \frac{2009^{2008} + 1}{2009^{2009} + 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$$

Lời giải:

Giải tương tự như bài 3.

Bài 5: (Lương Tài 2015 – 2016)

So sánh A và B biết

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải:

Giải tương tự như bài 3.

Bài 6: (Hoa Lư 2020 – 2021)

So sánh M và N biết

$$M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1} \quad \text{và} \quad N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$$

Lời giải:

Giải tương tự như bài 3.

Bài 7: (Quận Hà Đông 2020 – 2011)

So sánh A và B biết

$$A = \frac{2021^{2020} + 2}{2021^{2020} - 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{2021^{2020}}{2021^{2020} - 3}$$

Lời giải:

$$A = \frac{2021^{2020} + 2}{2021^{2020} - 1} > 1 \Rightarrow A < \frac{(2021^{2020} + 2) - 2}{(2021^{2020} - 1) - 2} = B$$

Vì

Vậy $A < B$

Bài 8: (Lạng Giang 2020 – 2011)

So sánh x và y biết

$$x = 2021^{2021} - 2021^{2020}; \quad y = 2021^{2019} - 2021^{2018}$$

Lời giải:

Ta có

$$+) \quad x = 2021^{2021} - 2021^{2020} = 2021^{2020}(2021 - 1) = 2020 \cdot 2021^{2020} \quad (1)$$

$$+) \quad y = 2021^{2019} - 2021^{2018} = 2021^{2018}(2021 - 1) = 2020 \cdot 2021^{2018} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x > y$

Bài 9: (Nông Công 2020 – 2011)

So sánh: $A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$ và $B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1} \quad 10A = \frac{10^{2020} + 10}{10^{2020} + 1} = \frac{10^{2020} + 1 + 9}{10^{2020} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2020} + 1}$$
$$\Rightarrow$$

$$B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1} \quad 10B = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = \frac{10^{2021} + 1 + 9}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}$$
$$\Rightarrow$$

$$\text{Mà } 10^{2021} + 1 > 10^{2020} + 1 \text{ nên } \frac{9}{10^{2020} + 1} > \frac{9}{10^{2021} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{2020} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}$$

$$\text{Hay } 10A > 10B \Rightarrow A > B$$

Bài 10: (Phù Cát 2020 – 2011)

So sánh M và N , biết: $M = \frac{20^{21} + 5}{20^{22} + 5}$; $N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5}$

Lời giải:

$$N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < 1 \Rightarrow N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{22} + 5 + 95}{20^{23} + 5 + 95}$$

Vì

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{22} + 20.5}{20^{23} + 20.5}$$

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20(20^{21} + 5)}{20(20^{22} + 5)}$$

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{21} + 5}{20^{22} + 5} = M$$

$$M > N$$

Vậy:

Bài 11: (Ngọc Lạc 2020 – 2011)

So sánh: $A = \frac{10^{2019} - 1}{10^{2020} + 1}$ và $B = \frac{10^{2020} - 1}{10^{2021} + 1}$

Lời giải:

Ta có:

$$10A = \frac{10^{2020} - 10}{10^{2020} + 1} = 1 - \frac{11}{10^{2020} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2021} - 10}{10^{2021} + 1} = 1 - \frac{11}{10^{2021} + 1}$$

$$\frac{11}{10^{2020} + 1} > \frac{11}{10^{2021} + 1} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vì

Vậy $A > B$

Bài 12: (Chư Sê 2020 – 2011)

So sánh hai phân số $A = \frac{25^{2019} + 1}{25^{2020} + 1}$ và $B = \frac{25^{2020} + 1}{25^{2021} + 1}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{25^{2019} + 1}{25^{2020} + 1} \Rightarrow 25A = \frac{25^{2020} + 25}{25^{2020} + 1} = 1 + \frac{24}{25^{2020} + 1}$$

+))

$$B = \frac{25^{2020} + 1}{25^{2021} + 1} \Rightarrow 25B = \frac{25^{2021} + 25}{25^{2021} + 1} = 1 + \frac{24}{25^{2021} + 1}$$

+))

$$1 + \frac{24}{25^{2020} + 1} > 1 + \frac{24}{25^{2021} + 1} \Rightarrow 25A > 25B \Rightarrow A > B$$

Vì

Bài 13: (Gia Bình 2020 – 2011)

$$A = \frac{2019^{2020} + 1}{2019^{2019} + 1} \quad B = \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2018} + 1}$$

So sánh 2 phân số sau: và

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2019^{2020} + 1}{2019^{2019} + 1} = \frac{2019^{2020} + 2019 - 2018}{2019^{2019} + 1} \\ &= \frac{2019(2019^{2019} + 1) - 2018}{2019^{2019} + 1} = 2019 - \frac{2018}{2019^{2019} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2018} + 1} = \frac{2019^{2019} + 2019 - 2018}{2019^{2018} + 1} \\ &= \frac{2019(2019^{2018} + 1) - 2018}{2019^{2018} + 1} = 2019 - \frac{2018}{2019^{2018} + 1} \end{aligned}$$

$$2019^{2019} + 1 > 2019^{2018} + 1 \Rightarrow \frac{2018}{2019^{2019} + 1} < \frac{2018}{2019^{2018} + 1}$$

Vì

$$\Rightarrow -\frac{2018}{2019^{2019} + 1} > -\frac{2018}{2019^{2018} + 1} \Rightarrow 2019 - \frac{2018}{2019^{2019} + 1} > 2019 - \frac{2018}{2019^{2018} + 1}$$

$$A > B$$

Vậy

Bài 14: (? 2020 – 2011)

$$\text{So sánh } A = \frac{2020^{2018} - 1}{2020^{2019} - 2019} \text{ với } B = \frac{2020^{2019} + 1}{2020^{2020} + 2019}.$$

Lời giải:

Ta có

$$B = \frac{2020^{2019} + 1}{2020^{2020} + 2019} < 1 \Rightarrow B > \frac{(2020^{2019} + 1) - 2021}{(2020^{2020} + 2019) - 2021}$$

$$= \frac{2020(2020^{2018} - 1)}{2020^{2020} - 2} > \frac{2020(2020^{2018} - 1)}{2020^{2020} + 2020 \cdot 2019} = \frac{2020^{2018} - 1}{2020^{2019} + 2019} = A$$

Vậy $B > A$

Bài 15: (???)

So sánh : $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

+)

$$B = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

Do $\frac{8}{10^{2006}} < \frac{8}{10^{2005}} \Rightarrow \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $A > B$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>