ĐOÀN TRÍ DŨNG
(THÁM TỬ CASIO - CASIO MAN)

KÍNH LÚP TABLE

TẬP 1: ĐÁNH GIÁ HÀM ĐƠN ĐIỆU

Tài liệu tham khảo cho các em học sinh

Tài liệu tham khảo cho các thầy cô giáo

Tài liệu ôn thi Trung học phổ thông Quốc gia

TỦ SÁCH CASIO
GROUP VIDEO BÀI GIẢNG CASIO MEN
HTTPS://WWW.FACEBOOK.COM/GROUPS/CASIOMEN/

TƯ DUY CASIO TRONG PT – BPT – HPT VÔ TỶ
KÍNH LÚP TABLE VÀ PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG GIẢI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

TẬP 1: ĐÁNH GIÁ HÀM ĐƠN ĐIỆU

I. Nguyên lý cơ bản

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa một nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa $n+1$ nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước và n là số điểm gián đoạn của đồ thị hàm số).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\ge b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a>b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\le b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a<b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Việc dự đoán hình dáng của đồ thị hàm số có thể được phân tích bằng chức năng TABLE trong máy tính CASIO.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ và $k(x)=f(x)+g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên D còn $k(x)=f(x)+g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.
- Nếu $f(x)$ đồng biến, dương và $g(x)$ nghịch biến, dương trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Giải phương trình: $x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}=3$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=X^3+X^2+X+3\sqrt[4]{X+1}-3$$

- START = -1
- END = 3
- STEP = 0.5

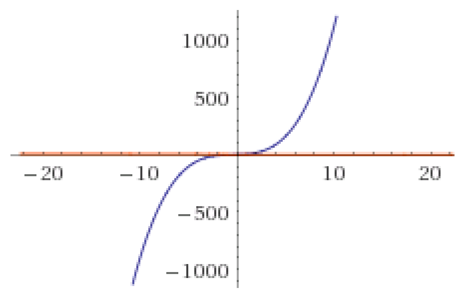
Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số đồng biến trên $\left[-1;+\infty\right)$. Do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

X	$F(X)$
-1	-4
-0.5	-0.852
0	0
0.5	1.195
1	3.5676
1.5	7.8973
2	14.498
2.5	25.478
3	40.242

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x\geq -1$.

Nhận xét: $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Do đó xét $f(x)=x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}-3$ trên $(-1;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=3x^2+2x+1+\dfrac{3}{4\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}>0\forall x\in(-1;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(-1;+\infty)$.

Vậy $f(x)$ có tối đa một nghiệm. Mà $x=0$ là một nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{5X^3-1}+\sqrt[3]{2X-1}+X-4$$

- START = 0.5
- END = 4.5
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
0.5	ERROR
1	0
1.5	2.7442
2	5.6872

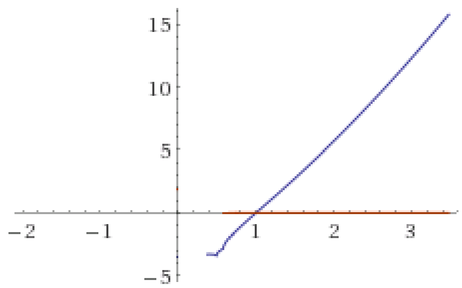
Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=1$ và hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

2.5	8.8694
3	12.285
3.5	15.924
4	19.773
4.5	23.821

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x \ge \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Ta có: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4=0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4$ trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}+1>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right).$$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=3\left(\sqrt{2X^2+1}-1\right)-X\left(1+3X+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

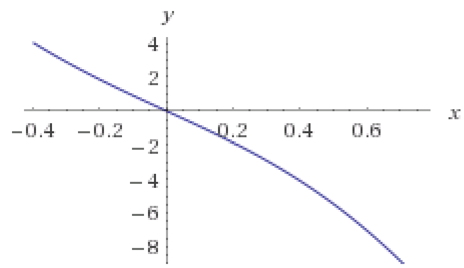
Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số nghịch biến.

X	$F(X)$
-2	44
-1.5	26.928
-1	14.052
-0.5	5.3232
0	0
0.5	-5.474
1	-15.66
1.5	-32.35
2	-56

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Nghịch biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: Ta có: $\sqrt{2x^2+1}-1=\dfrac{2x^2+1-1}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}\geq 0$

Do đó: $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\geq 0$.

Để đánh giá sát sao điều kiện của phương trình, ta sử dụng TABLE để khảo sát nhóm biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=1+3X+8\sqrt{2X^2+1}$$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy rõ ràng rằng biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$ luôn nhận giá trị dương. Vậy để dễ dàng tìm điều kiện của x hơn, ta sẽ chứng minh:

$$1+3x+8\sqrt{2x^2+1}>0$$

X	$F(X)$
-2	19
-1.5	15.261
-1	11.856
-0.5	9.2979
0	9
0.5	12.297
1	17.856
1.5	24.261
2	31

Ta có: $8\sqrt{2x^2+1}+3x>8\sqrt{x^2}+3x=8|x|+3x\geq 3|x|+3x\geq 0$

Do đó $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$

Ta có: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3=0$

Xét hàm số $f(x)=3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3$ trên $[0;+\infty)$ ta có:

$$f'(x)=6x+1+8\left(\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}\right)-\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=6x+1+\frac{32x^2-6x+8}{\sqrt{2x^2+1}}>0\forall x\geq 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt[3]{(X-1)^2}-2\sqrt[3]{X-1}$$
$$-(X-5)\sqrt{X-8}-3X+31$$

- START = 8
- END = 12
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
8	6.8334
8.5	2.9418
9	0
9.5	– 2.928
10	– 5.904
10.5	– 8.946
11	– 12.05
11.5	– 15.24
12	– 18.5

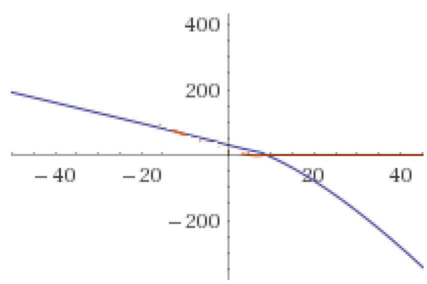
Từ bảng giá trị này ta thấy nhìn thấy phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x=9$ đồng thời hàm số nghịch biến, do đó đây chính là nghiệm duy nhất.

Tuy nhiên vấn đề là bài toán có chứa rất nhiều căn thức và khác loại với nhau. Chính vì vậy ta có thể đặt một ẩn phụ để giảm thiểu số căn thức một cách tối đa. Do đó ta định hướng đặt $t=\sqrt[3]{x-1}$.

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Nghịch biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x\ge 8$. Đặt $t=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow x=t^3+1\ge 8\Rightarrow t\ge\sqrt[3]{7}$.

Khi đó ta có: $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0$

$\Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0$

Nhận xét: $t=\sqrt[3]{7}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét hàm số $f(t)=3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}$ trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$ ta có:

$$f'(t)=\underbrace{(9t^2-2t+2)}_{>0,\ \forall t}+3t^2\sqrt[3]{t^3-7}+\frac{t^2(t^3-4)}{\sqrt[3]{(t^3-7)^2}}>0,\ \forall t\in\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right).$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f\left(t\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(2)=0 \Rightarrow t=2 \Leftrightarrow x=9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=9$.

Bài 5: Giải phương trình: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6$

(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Thái Bình năm 2010)

Điều kiện: $x \geq 1$.

Do $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên chỉ xét $x \in (1;+\infty)$.

Ta có: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=\dfrac{x+6}{x-1}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f\left(X\right)=2\sqrt{X-1}+3\sqrt[3]{X+6}-\frac{X+6}{X-1}$$

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0.5

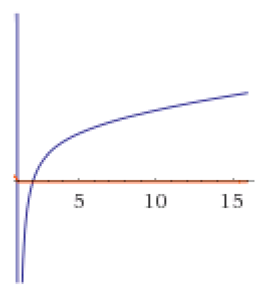
Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=2$.

X	$F\left(X\right)$
1	ERROR
1.5	-7.713
2	0
2.5	2.9053
3	4.5686
3.5	5.716
4	6.594
4.5	7.3109
5	7.9219

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Xét hàm số $f\left(x\right)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}-\dfrac{x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x+6}}+\frac{7}{\left(x-1\right)^2}>0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Do đó đây là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Bài 6: Giải phương trình: $2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{x^2+3}+1$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=2\sqrt[3]{X}+X-\sqrt{X^2+3}-1$$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

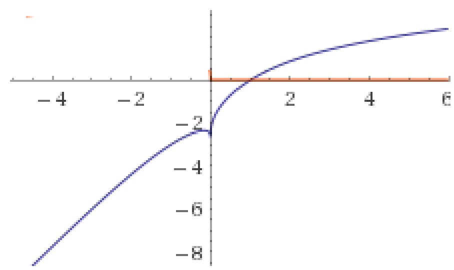
Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

X	$F(X)$
-2	-8.165
-1.5	-7.08
-1	-6
-0.5	-4.89
0	-2.732
0.5	-0.715
1	0
1.5	0.4981
2	0.874

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{x^2+3}+1>0\Rightarrow\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\right)>0\Leftrightarrow x>0$

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt[3]{x}+x-\sqrt{x^2+3}-1$ với $x>0$. Ta có:

$$f(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}>0\forall x>0.$$

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên tập xác định. Vậy phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mặt khác $f(1)=0$ do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chú ý: Việc thực hiện phép quy đồng: $1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$ để chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến không phải là một công việc được thực hiện một cách ngẫu nhiên dựa trên cảm tính. Nếu học sinh đã làm nhiều dạng bài tập trên thì việc phát hiện được cách quy đồng là không khó khăn. Tuy nhiên nếu muốn đưa ra cách thức tổng quát, ta cũng có thể làm như sau:

Xét $F(X)=\dfrac{X}{\sqrt{X^2+3}}$ với:

- START: -2 (Vì $x>2$).
- END: 2
- STEP: 0,5.

Dựa vào bảng giá trị, ta thấy:

$$Max\frac{X}{\sqrt{X^2+3}}<1$$

Do đó nếu sử dụng phép quy đồng đã nêu trên, ta chắc chắn chứng minh được $f(x)$ đồng biến.

X	$F(X)$
-2	-0.755
-1.5	-0.654
-1	-0.5
-0.5	-0.277
0	0
0.5	0.2773
1	0.5
1.5	0.6546
2	0.7559

Ghi nhớ:

- Nếu tìm được $MinG(x)=a$ ta sẽ có $G(x)-a>0$.
- Nếu tìm được $MaxG(x)=a$ ta sẽ có $a-G(x)>0$.

Bài 7: Giải phương trình: $x(x-1)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$F(X)=X(X-1)^2-\left(\sqrt{X+4}+1\right)(X+4)$

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(3.5;4)$.

SHIFT CALC với $x=3.8$ ta thu được nghiệm $x\approx 3.791287847$.

X	$F(X)$
1	-16.18
1.5	-18.02
2	-18.69
2.5	-17.44
3	-13.52
3.5	-6.164
4	5.3725
4.5	21.843
5	44

Thay nghiệm $x\approx 3.791287847$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{x+4}\approx 2.791287847\approx x-1.$$

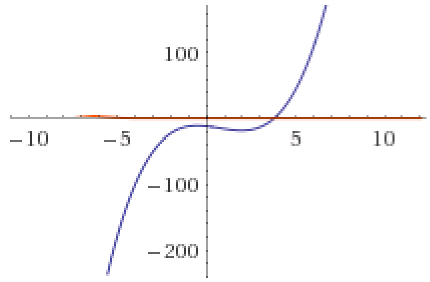
Do đó nhân tử cần xác định là $x-1-\sqrt{x+4}$ và phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x-1=\sqrt{x+4}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Do trong $(2;+\infty)$ hàm số có dấu hiệu của tính đồng biến nên nếu chỉ ra được điều kiện $x>2$ ta có khả năng chứng minh được hàm số đơn điệu và hàm số cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên $(2;+\infty)$.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x(x-1)^2=(\sqrt{x+4}+1)(x+4)\Leftrightarrow x^3-2x^2=(x+4)\sqrt{x+4}+4$

$\Rightarrow (x-2)x^2=(x+4)\sqrt{x+4}+4>0\Rightarrow x>2$

Xét hàm số sau: $f(x)=x^3-2x^2-4-(x+4)\sqrt{x+4}$ với $x\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-4x-\frac{3}{2}\sqrt{x+4}$. Để chứng minh $f'(x)>0$ hay hàm số $f(x)$ đồng biến không phải là một điều đơn giản.

Vì vậy để chắc chắn định hướng của bài toán ta sử dụng công cụ TABLE để khảo sát hàm $f'(x)=3x^2-4x-\frac{3}{2}\sqrt{x+4}$:

Xét $F(X)=3X^2-4X-\frac{3}{2}\sqrt{X+4}$ với:

- START: 2 (Vì $x>2$).
- END: 6.
- STEP: 0,5.

Dựa vào bảng giá trị, ta thấy:

- Hàm số $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng trên $(2;+\infty)$ mặc dù hàm số không hề đơn điệu trên tập xác định.
- $f'(x)>0$ khi $x>2$

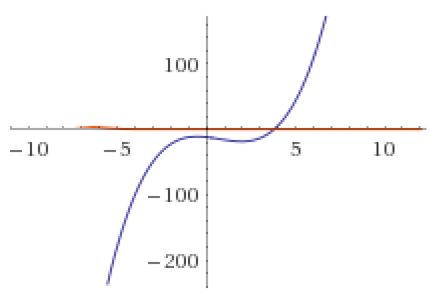
Vậy ta sẽ tiến hành xét $f''(x)$.

X	$F(X)$
2	0,3257
2,5	4,9257
3	11,031
3,5	18,642
4	27,757
4,5	38,376
5	50,5
5,5	64,126
6	79,257

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên $(2;+\infty)$.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Xét $f''(x)=6x-4-\frac{3}{4\sqrt{x+4}}\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+4x-\frac{3}{4\sqrt{x+4}}$

$$\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+\frac{16x\sqrt{x+4}-3}{4\sqrt{x+4}}=2(x-2)+\frac{256x^3+1024x^2-9}{4\sqrt{x+4}\left(16x\sqrt{x+4}+3\right)}$$

Vì $x>2$ nên $256x^3>9\Rightarrow 256x^3+1024x^2-9>0$ do đó $f''(x)>0\forall x>2$.

Khi đó $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$.

Do vậy $f'(x)>f'(2)=4-\frac{3\sqrt{6}}{2}>0$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$. Mặt khác ta có $f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)=0$ cho nên $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{2x^2+18}$

(Trích đề thi thử Đại học Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2013)

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{X+1}-2\sqrt{4-X}-\frac{5(X-3)}{2X^2+18}$$

- START = -1
- END = 4
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

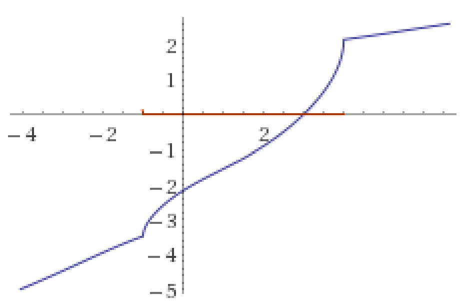
Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

X	$F(X)$
-1	-3.472
-0.5	-2.589
0	-2.166
0.5	-1.841
1	-1.549
1.5	-1.247
2	-0.904
2.5	-0.496
3	0
3.5	0.6482
4	2.136

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $-1\le x\le 4$.

Nhận xét: $x=-1, x=4$ không phải nghiệm của phương trình do đó ta có điều kiện $x\in(-1;4)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}-\dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$ với $x\in\left(-1;4\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}$

Đến đây, để chứng minh chắc chắn hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến ta cần sử dụng chức năng TABLE để kiểm tra từng nhóm hàm số:

$F\left(X\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{X+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-X}}$

X	$F\left(X\right)$
-1	ERROR
-0.5	1.1785
0	1
0.5	0.9427
1	0.9309
1.5	0.9486
2	0.9957
2.5	1.0837
3	1.25
3.5	ERROR

$G\left(X\right)=\dfrac{10\left(X^2-6X-9\right)}{\left(2X^2+18\right)^2}$

X	$G\left(X\right)$
-1	-0.05
-0.5	-0.168
0	-0.277
0.5	-0.343
1	-0.35
1.5	-0.311
2	-0.251
2.5	-0.19
3	-0.138
3.5	-0.098

Ta nhận thấy rằng $Min\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\right)>\dfrac{1}{2}, Min\dfrac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>-\dfrac{1}{2}$

Do đó ta đánh giá: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}>\dfrac{1}{2}(*), \dfrac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>-\dfrac{1}{2}(**)$

Chứng minh đánh giá (*):

Cách 1: Sử dụng khảo sát hàm số:

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\Rightarrow g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3}+\dfrac{1}{2\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$

$$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}-\sqrt{4-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{4}-1\right)x+5+\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}\sqrt{4-x}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{\left(\left(\sqrt[3]{4}+1\right)x-3\right)\left(\left(\sqrt[3]{4}-1\right)x+5+\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}\sqrt{4-x}\right)}{4\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}+\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$$

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{4}}$. Lập bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)\geq g\left(\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{4}}\right)>\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá bất đẳng thức AM – GM:

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}$

Cũng theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}\leq 1+x+4-x=5$

Do đó: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét: Đánh giá bằng bất đẳng thức rất ngắn và đơn giản, tuy nhiên với những học sinh yếu bất đẳng thức vẫn có thể giải quyết được bằng phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số và lập bảng biến thiên.

Chứng minh đánh giá (**):

Xét $\dfrac{1}{2}+\dfrac{10(x^2-6x-9)}{(2x^2+18)^2}=\dfrac{2x^4+46x^2-60x+72}{(2x^2+18)^2}=\dfrac{2x^4+46\left(x-\dfrac{15}{23}\right)^2+\dfrac{1206}{23}}{(2x^2+18)^2}>0$

Vậy $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{10(x^2-6x-9)}{(2x^2+18)^2}>0$.

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $x\in(-1;4)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $f(3)=0$ do vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=\sqrt{X^2+15}-3X+2-\sqrt{X^2+8}$

- START = −1
- END = 3.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

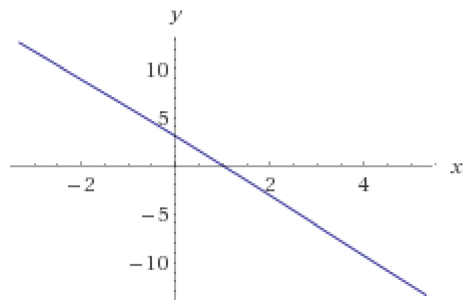
Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu giảm.

X	$F(X)$
−1	6
−0.5	4.5328
0	3.0445
0.5	1.5328
1	0
1.5	−1.548
2	−3.105
2.5	−4.665
3	−6.224
3.5	−7.775

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}<3x-2+\sqrt{x^2+15} \Rightarrow x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(x)=3x-2+\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}$ với $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \Rightarrow f'(x)=3+x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=3+x\left(\frac{\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=3+\frac{7x}{\left(\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2+8}\right)\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}}>0\forall x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

ĐOÀN TRÍ DŨNG - HÀ HỮU HẢI
(TEAM CASIO MEN)

SỐ MỘT VỀ TÀI LIỆU CASIO

KÍNH LÚP TABLE

TẬP 2: CHIA ĐA THỨC CHỨA NHIỀU CĂN

Tài liệu tham khảo cho các em học sinh 10, 11, 12
Tài liệu ôn thi Trung học phổ thông Quốc gia
Tài liệu tham khảo cho các thầy, cô giáo

CASIO
BOOKSTORE

HTTPS://WWW.FACEBOOK.COM/GROUPS/CASIOMEN/

LỜI NÓI ĐẦU

Những năm gần đây, với sự phát triển của máy tính CASIO, các bài toán phương trình vô tỷ, bất phương trình, hệ phương trình đã được biến tấu rất nhiều nảy sinh các dạng toán khó và vô cùng đa dạng, phong phú, trong đó nổi hơn cả là phương pháp ép căn đưa về nhân tử.

Với các kỹ thuật đã và đang có hiện nay, kỹ thuật ép một căn đã không còn quá xa lạ, tuy nhiên kỹ thuật chia đa thức chứa nhiều căn vẫn là một ẩn số, thách thức với không ít các bạn trẻ.

Trong tác phẩm này, TEAM CASIO MEN chúng tôi xin giới thiệu với các bạn đọc một tuyệt phẩm về chia đa thức chứa nhiều căn, hy vọng tác phẩm này sẽ giúp bạn đọc có được những cái nhìn mới sâu sắc về CASIO và uy lực của nó.

CASIO MEN là Team Mạnh Nhất hiện nay của Việt Nam trong lĩnh vực tài liệu về CASIO, thay mặt Team, kính chúc các thầy cô, các em học sinh có được những giây phút thư giãn, vui vẻ và đặt một bước chân lớn hơn trong thế giới về CASIO.

Xin chân thành cảm ơn.

TRƯỞNG NHÓM CASIO MEN

THÁM TỬ CASIO – CASIO MAN – ĐOÀN TRÍ DŨNG

CHỦ ĐỀ 1: 2 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

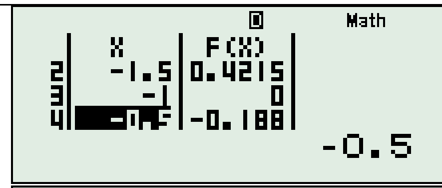
$$3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$$

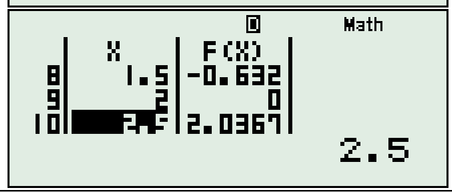
<u>KÍNH LÚP TABLE:</u>

Sử dụng TABLE với:

$$F\left(x\right)=3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}$$
$$-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}$$

Ta thu được 2 nghiệm đơn $x=-1, x=2$





Giả sử nhân tử có dạng $\sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0$. Khi đó ta giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0, x=-1\\ \sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0, x=2\end{cases}\Rightarrow a=1, b=-3$$

Vậy nhân tử của phương trình có dạng: $\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)$.

Xét $A=\dfrac{3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}}{3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}}$ CALC 3 được kết quả là $13+\sqrt{5}$. Vậy A chứa $\sqrt{x+2}$.

Xét $A-\sqrt{x+2}$ CALC 1000 được kết quả 1001001 = x^2+x+1. Vậy:

$$A-\sqrt{x+2}=x^2+x+1 \Leftrightarrow A=\sqrt{x+2}+x^2+x+1$$

<u>BÀI GIẢI:</u>

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 3$.

Ta có: $3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$

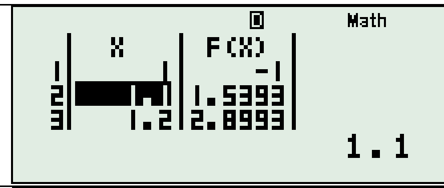
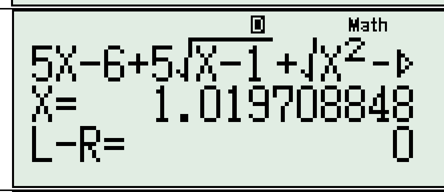
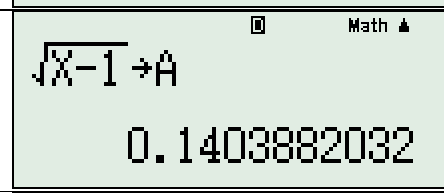
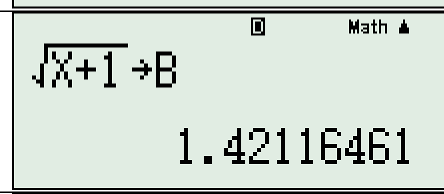
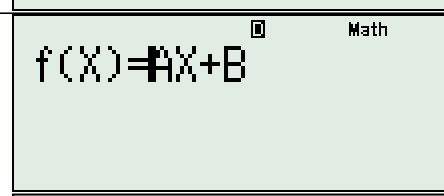
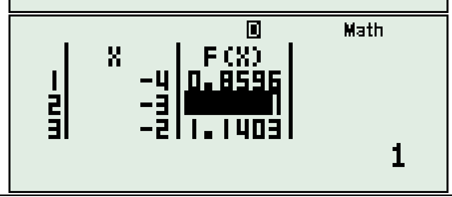
$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+x^2+x+1\right)$.

CHỦ ĐỀ 2: NGHIỆM VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

$$5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với: $$F(x)=5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}$$ Nhận xét: Có nghiệm nằm trong $(1;1.1)$.	
SHIFT CALC với $x=1.05$ ta được nghiệm vô tỷ.	
Tính $\sqrt{x-1}$ và gán giá trị vào biến A.	
Tính $\sqrt{x+1}$ và gán giá trị vào biến B.	
Sử dụng TABLE với $F(x)=AX+B$ và tìm giá trị nguyên ta được $X=-3$. Như vậy: $-3A+B=1\Leftrightarrow 3A-B+1=0$. Nhận xét: Nhân tử của phương trình là: $$\left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)$$	 

Xét $A=\dfrac{5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}}{3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1}$ CALC 1 được kết quả $1+\sqrt{2}$. Như vậy A chứa $\sqrt{1+x}$

Xét $A-\sqrt{1+x}$ CALC 3 được $1+2\sqrt{2}$ như vậy $A-\sqrt{1+x}$ chứa $2\sqrt{x-1}$.

Xét $A-\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-1}$ CALC 1000 được kết quả là 1. Như vậy $A-\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-1}=1$.

Hay nói cách khác: $A = \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x-1} + 1$.

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Ta có: $5x - 6 + 5\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} + 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 2\sqrt{x-1} + 1\right) = 0$

CHỦ ĐỀ 3: NGHIỆM KÉP HỮU TỶ THAY VÀO CĂN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

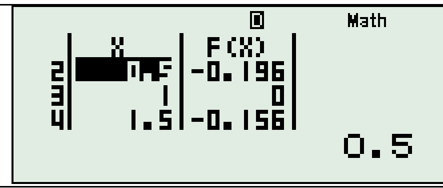
$$3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$F\left(x\right)=3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}$

Nhận xét: Nghiệm kép $x=1$



Giả sử nhân tử có dạng: $\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b=0$. Khi đó giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b=0, x=1\\ \left(\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b\right)'=0, x=1\end{cases}\Rightarrow a=-2, b=3$$

Vậy nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)$.

Xét $A=\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}$ CALC 0 ta thu được kết quả là $1+2\sqrt{3}$, như vậy A có chứa $2\sqrt{x+3}$.

Xét $A-2\sqrt{x+3}$ CALC 2 ta thu được kết quả $5+\sqrt{2}$, như vậy $A-2\sqrt{x+3}$ có chứa $\sqrt{x}$

Xét $A-2\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ CALC 1000 được kết quả 1000001 = x^2+1. Vậy:

$$A-2\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=x^2+1\Leftrightarrow A=x^2+1+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$$

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Ta có: $3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)\left(x^2+1+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)=0$

CHỦ ĐỀ 4: NGHIỆM KÉP HỮU TỶ THAY VÀO CĂN VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

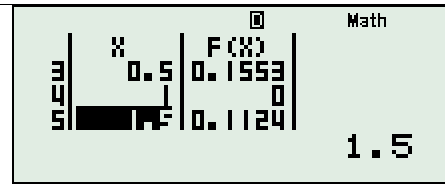
$$3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$$F(x)=3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3$$
$$-(x+5)\sqrt{2x+1}$$

Nhận xét: Nghiệm kép $x=1$



Với $x=1$, ta có $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$. Do đó nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2$.

Xét $A=\dfrac{3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}}{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2}$ CALC 0 được kết quả là $2+2\sqrt{2}$, vậy A có chứa $2\sqrt{x+2}$.

Xét $A-2\sqrt{x+2}$ CALC 1 được $1+\sqrt{3}$ do đó $A-2\sqrt{x+2}$ chứa $\sqrt{2x+1}$.

Xét $A-2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}$ CALC 1000 được kết quả là 1. Vậy:

$$A-2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=1 \Leftrightarrow A=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}+1$$

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+2}+1\right)=0$$

CHỦ ĐỀ 5: 1 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ THAY VÀO CĂN VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

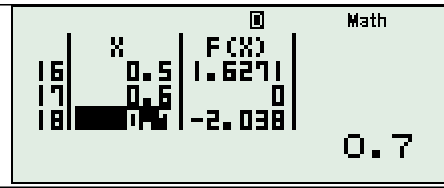
$$5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$$

<u>KÍNH LÚP TABLE:</u>

Sử dụng TABLE với:

$$F(x)=5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}$$

Ta nhận thấy có nghiệm đơn $x=0.6=\dfrac{3}{5}$



Khi đó $\sqrt{1+x}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\sqrt{1-x}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Như vậy nhân tử có dạng $\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)$.

Xét $A=\dfrac{5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}}$ CALC 1 được kết quả $-6-5\sqrt{2}$. Vậy A chứa $-5\sqrt{1+x}$.

Xét $A+5\sqrt{1+x}$ CALC -1 được $-6+5\sqrt{2}$ vậy $A+5\sqrt{1+x}$ chứa $5\sqrt{1-x}$.

Xét $A+5\sqrt{1+x}-5\sqrt{1-x}$ CALC 1000 được kết quả -6.

Vậy $A+5\sqrt{1+x}-5\sqrt{1-x}=-6 \Leftrightarrow A=5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6$.

<u>BÀI GIẢI:</u>

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Ta có: $5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6\right)=0$

CHỦ ĐỀ 6: 1 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ THAY VÀO CĂN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

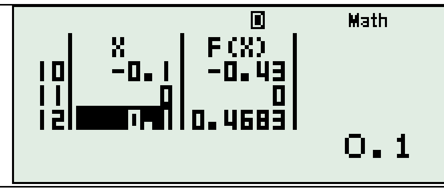
$$2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$F(x)=2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}$

Nhận xét: Nghiệm đơn duy nhất: $x=0$.



Với $x=0$, ta có $\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}=1$. Do đó nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)$.

Ta tìm số nguyên a, sao cho $F(x)$ chia hết cho $\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)$ với mọi x.

Như vậy $F(1)=3+2\sqrt{2}$ sẽ chia hết cho $\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)\Big|_{x=1}=\sqrt{2}-(a+1)$.

Khi đó $\left([3]^2-\left[2\sqrt{2}\right]^2\right)$ sẽ chia hết cho $\left([a+1]^2-\left[\sqrt{2}\right]^2\right)$.

Vậy 1 sẽ chia hết cho (a^2+2a-1) khi $a^2+2a-1=\pm1$. Vì a là nguyên nên ta tìm được $a=0\vee a=-2$. Chọn $a=-2$, ta có nhân tử $\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1\right)$.

Xét $A=\dfrac{2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1}$ CALC 1 được $1+\sqrt{2}$ do đó A có chứa $\sqrt{1+x}$.

Xét $A-\sqrt{1+x}$ CALC 1 và CALC -1 đều thu được kết quả là 1 nghĩa là A chứa 1.

Xét $A-\sqrt{1+x}-1$ CALC -1 được kết quả là 0, đồng thời không còn chứa $\sqrt{1+x}$, do đó ta hiểu rằng $A-\sqrt{1+x}-1=(x+1)g(x)$.

Xét $\dfrac{A-\sqrt{1+x}-1}{x+1}$ CALC -1 được kết quả $\sqrt{2}$ nghĩa là $\dfrac{A-\sqrt{1+x}-1}{x+1}=\sqrt{1-x}$.

Vậy $A=\sqrt{1+x}+(x+1)\sqrt{1-x}+1$.

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Ta có: $2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+(x+1)\sqrt{1-x}+1\right)=0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

BÀI 1: Giải phương trình: $\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}-\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}-x^2+2=0$

Đáp số: $\left(x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$

BÀI 2: Giải phương trình: $x+3+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x^2}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1\right)=0$

Bài 3: Giải phương trình: $4x+3+2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1+x}=0$

Đáp số: $\left(3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)=0$

BÀI 4: Giải phương trình: $3x-10+3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\right)\left(2\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}+3\right)=0$

BÀI 5: Giải phương trình: $2x^2-2-x^2\sqrt{x+1}+2x\sqrt{x^2-1}-\left(x^2+x\right)\sqrt{x-1}=0$

Đáp số: $\left(2\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$

BÀI 6: Giải phương trình: $x^2-2x-3+(2x+3)\sqrt{1-x^2}+(x-3)\sqrt{1+x}+(2x+3)\sqrt{1-x}=0$

Đáp số: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)=0$

BÀI 7: Giải phương trình: $x\sqrt{x^3-3x}+\sqrt{x^2-3}-x-3-\sqrt{x}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}\right)\left((x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1\right)=0$

BÀI 8: Giải phương trình: $x^2-9x+8+\sqrt{6x^2-x-1}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^2+2\right)\sqrt{3x+1}$

Đáp số: $\left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1\right)\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1\right)=0$

BÀI 9: Giải phương trình: $5x+20+14x\sqrt{x+2}=8\sqrt{4x^2+9x+2}-(4x-10)\sqrt{4x+1}$

Đáp số: $\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}-1\right)^2\left(2\sqrt{4x+1}+3\sqrt{x+2}+3\right)=0$

BÀI 10: Giải phương trình: $8x-24+(x+8)\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x^2+x-6}+8\sqrt{2x-3}$

Đáp số: $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}-1\right)^2\left(3\sqrt{x+2}+2\sqrt{2x-3}+2\right)=0$

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp Ép tích trong thời gian qua đã khiến vô số các em học sinh, các thầy cô giáo và cả những người đam mê toán học đau đầu về phương pháp nhóm nhân tử đặc biệt này. Có rất nhiều thủ thuật Ép tích nhưng hôm nay, nhóm tác giả chúng tôi xin chia sẻ một phần của bí quyết đó.

Đoàn Trí Dũng – Trần Đình Khánh

Cuốn sách này thuộc về Bản Làng Casio Men – Già Làng: Đoàn Trí Dũng

Mọi chi tiết xin vui lòng ngâm cứu Website: casiomen.com

A. ÉP TÍCH BẰNG ĐẶT ẨN PHỤ HOÀN TOÀN

I. Đặt vấn đề:

Phương pháp ép tích bằng đặt ẩn phụ hoàn toàn là phương pháp dùng để nhóm các biểu thức chứa căn thành dạng tích thông qua việc giản ước các căn thức bằng cách đặt ẩn phụ.

Trong mục này, chúng ta sẽ ưu tiên các phương pháp đặt ẩn phụ và biến đổi để rèn luyện tư duy ẩn phụ và biến đổi tương đương.

II. Các phương pháp cơ bản của đặt ẩn phụ hoàn toàn ép tích:

- Đặt một ẩn phụ kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt hai ẩn phụ kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt từ 3 ẩn phụ trở lên kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt một ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình.
- Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình: $2x^2+x+1=7(x-1)\sqrt{x-1}$

Cách 1: Đặt một ẩn phụ và nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1} \Rightarrow x=t^2+1, t \geq 0$.

Khi đó ta có: $2x^2+x+1=7(x-1)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\left(t^2+1\right)^2+t^2+2-7t^3=0$

$\Leftrightarrow 2t^4-7t^3+5t^2+4=0 \Leftrightarrow \left(2t^2+t+1\right)(t-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}^2+\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-2+\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(2x-1+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$

Vì $2x-1+\sqrt{x-1}>0 \forall x \geq 1$ do đó $\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=5$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 2: Đặt một ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình:

Điều kiện: $x \geq 1$.

Xét phương trình $2x^2+x+1=7(x-1)\sqrt{x-1}$

Đặt $y=4\sqrt{x-1}-3$. Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2+x+1=\dfrac{7(x-1)(y+3)}{4} \\ (y+3)^2=16(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-7xy-17x+7y+25=0 \\ y^2-16x+6y+25=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình trong hệ ta có:

$$\begin{cases} 8x^2-7xy-17x+7y+25=0 \\ y^2-16x+6y+25=0 \end{cases} \Rightarrow \left(8x^2-7xy-17x+7y+25\right)-\left(y^2-16x+6y+25\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (8x+y-1)(x-y)=0 \Leftrightarrow \left(8x+4\sqrt{x-1}-3-1\right)\left(x-4\sqrt{x-1}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0$$

Với $x \ge 1$ ta có $\sqrt{x-1}+2x-1 \ge 1 > 0$.

Do đó : $\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}-x-3=0$

$$\Leftrightarrow 16(x-1)=(x+3)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 2: Giải phương trình: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x} \ge 0$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^4-t^2-t-2-\sqrt{3-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)=2t^2-2t-2$$

Bài giải

Đặt một ẩn phụ và nhóm nhân tử:

Điều kiện: $0 \le x \le 3$. Đặt $t=\sqrt{x} \ge 0$.

Khi đó: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x} \Leftrightarrow t^4-t^2-t-2-\sqrt{3-t^2}=0$

$$\Leftrightarrow \left(t^4-t^2-2t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-t-1\right)\left(t^2+t+1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2t^2-2t-2\right)\left(t^2+t+1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^2+t+1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^2+t+1\right)+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3-1+\left(t^2+t+1\right)\sqrt{3-t^2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3+1+\left(t^2+t+1\right)\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}\right)\left(x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}\right)=0$$

Vì $x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}>0\forall 0\le x\le 3$ do đó $\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3-x} \Leftrightarrow x=4-x+2\sqrt{3-x} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left(x-2\right)^2=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $20x^2+14x+9-\left(14x+11\right)\sqrt{2x^2+1}=0$

Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $y=\dfrac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20x^2+14x+9=\left(14x+11\right)\left(\dfrac{4}{3}y+\dfrac{1}{3}\right) \\ \left(4y+1\right)^2=9\left(2x^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x^2-56xy+28x-44y+16=0 \\ 18x^2-16y^2-8y+8=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình cho nhau ta được:

$$24x^2-56xy+32y^2+28x-28y=0 \Leftrightarrow 4\left(x-y\right)\left(6x-8y+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}\right)\left(6x-8\frac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{2x^2+1}-4x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1}-2x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \\ 2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \Rightarrow 9\left(2x^2+1\right)=\left(4x+1\right)^2 \Rightarrow x=2$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \Rightarrow 4\left(2x^2+1\right)=\left(2x+3\right)^2 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=2, x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình: $$2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$$

Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Đặt $a=\sqrt{x-1}$ và $b=\sqrt{x+1}$ ta được:

Ta có: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2=0 \\ 2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$$\left(2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4\right)-\left(a^2-b^2+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-2a^2-\left(2b+1\right)a+\left(2b^3+b-6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(b+a\right)\left(a-3b+4\right)\left(a-3b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

Vì $x\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}>0 \\ 3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}>0 \end{cases}$

Do đó $3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+4$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)=\left(\sqrt{x-1}+4\right)^2 \Leftrightarrow 8x-6=8\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \left(8x-6\right)^2=64\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\sqrt{x-1}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$.

Bài 5: Giải bất phương trình: $x^3+3x^2+x+2\geq 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x+4}>1$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, bất phương trình có dạng:

$$t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-32t-18-\sqrt{2t^2+3}\ge 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)=2t^2-4t-2$$

Bài giải

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -4\\ x^3+3x^2+x\ge -2>-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -4\\ (x+3)\left(x^2+1\right)>0\end{cases}\Rightarrow x>-3$

Đặt $t=\sqrt{x+4}>1$, ta đưa bất phương trình trở thành:

$$\left(t^2-4\right)^3+3\left(t^2-4\right)^2+\left(t^2-4\right)+2\ge 2\left(t^2-4\right)^2t+\sqrt{2\left(t^2-4\right)+11}$$

$$\Leftrightarrow\left(t^6-12t^4+48t^2-64\right)+\left(3t^4-24t^2+48\right)+t^2-2\ge 2t^5-16t^3+32t+\sqrt{2t^2+3}$$

$$\Leftrightarrow t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-32t-18-\sqrt{2t^2+3}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-34t-17\right)+\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t^4-8t^2+17\right)\left(t^2-2t-1\right)+\left(2x-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(t^4-8t^2+17\right)\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)+\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(t^4-8t^2+17\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x+4}-1-\sqrt{2x+11}\right)\left(\frac{\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)}{2}+1\right)\ge 0$$

Vì $\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)>\sqrt{x+4}-1=\dfrac{x+3}{2\left(\sqrt{x+4}+1\right)}>0\forall x>-3$

Do đó $\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)}{2}+1>0\forall x>-3$.

Vậy $\begin{cases}2\sqrt{x+4}>1+\sqrt{2x+11}\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+4)>12+2x+2\sqrt{2x+11}\\ x>-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>\sqrt{2x+11} \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-7>0 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1+2\sqrt{2}.$$

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $x\in\left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bài 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\geq x^2-8x+18$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-3}\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, bất phương trình có dạng:

$$t^4-2t^2-t+3-\sqrt{2-t^2}\leq 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-4t+2$$

Bài giải

Điều kiện: $3\leq x\leq 5$. Đặt $t=\sqrt{x-3}\in\left[0;\sqrt{2}\right]$, ta biến đổi bất phương trình trở thành: $t+\sqrt{2-t^2}\geq\left(t^2+3\right)^2-8\left(t^2+3\right)+18 \Leftrightarrow t^4-2t^2-t+3-\sqrt{2-t^2}\leq 0$

$$\Leftrightarrow\left(t^4-2t^2+1\right)+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+1)^2+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)(t+1)^2+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)(t+1)^2+1\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}\right)\left(\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{2+2\sqrt{-x^2+8x-15}}\right)\left(\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{2+2\sqrt{-x^2+8x-15}}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7-x}{2+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right)\leq 0$$

Vì $\frac{1}{2}\left(\frac{7-x}{2+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1>0\forall 3\leq x\leq 5$.

Do đó: $\begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ 2 \le \sqrt{2+2\sqrt{-x^2+8x-15}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ \sqrt{-x^2+8x-15} \ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ -x^2+8x-15 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ (x-4)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2} = 2x^2+2x-2$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{2+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$(t+1)\sqrt{4-t^2} = 2t^4-6t^2-t+2$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{4-t^2}\right) = 2t^2-2t-3$$

Bài giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$. Đặt $t = \sqrt{2+x} \Rightarrow 0 \le t \le 2$.

Ta có: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2} = 2x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow t+\sqrt{4-t^2}+t\sqrt{4-t^2} = 2(t^2-2)^2+2(t^2-2)-2$

$\Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t^2} = 2t^4-6t^2-t+2$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)(t+1)+\left(2t^4-7t^2-t+3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)(t+1)+\left(2t^4-7t^2-t+3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2t^2-2t-3\right)\left(t^2+t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t-1+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+t-1\right)+t+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^3-t+2+\left(t^2+t-1\right)\sqrt{4-t^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t^3-2t\right)+\left(t^2+t\right)\sqrt{4-t^2}+\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right) = 0$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(2t(t+2)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$$

Chú ý rằng: $2t(t+2)=\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)$. Do đó:

$$\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+4t+4+\left(2t^3+3t\right)\sqrt{4-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+x}-1-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}\right)A=0$$

Trong đó: $A=6+x+4\sqrt{2+x}+(2x+7)\sqrt{4-x^2}>0\forall x\in[-2;2]$. Vậy:

Trường hợp 1: $\sqrt{2+x}=1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 2+x=3-x+2\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 2\\ 4(2-x)=4x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}\text{ (Thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+\left(2-\sqrt{2-x}\right)\left(2+\sqrt{2-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)=0$$

Vì $2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}>0$ do đó $x=-2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=-2,x=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x-8}+1=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$, phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{7\left(\frac{t^2+1}{2}\right)-8}+1=(t-1)^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}=t^2-2t\Leftrightarrow\frac{7t^2-9}{2}=\left(t^2-2t\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^6-12t^5+24t^4+16t^3-7t^2+9=0\Leftrightarrow(t-1)(t-3)\left(2t^2(t-1)^2+4t+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(2(2x-1)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+4\sqrt{2x-1}+3\right)=0$$

Vì $2(2x-1)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+4\sqrt{2x-1}+3>0, \forall x\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=1\vee x=5$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1\vee x=5$.

Bài 9: Giải phương trình: $5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$5t^2-1+5t+t\sqrt{t^2+2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(3t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=\left(8t^2+6t-1\right)$$

Bài giải

Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành: $5t^2-1+5t+t\sqrt{t^2+2}=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+2}\right)t+\left(8t^2+6t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)t+\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(3t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(2t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1>0$ do đó $3\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 9x-8+6\sqrt{x-1}=x+1 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1}=9-8x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le\dfrac{9}{8}\\ 36(x-1)=(9-8x)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{45-3\sqrt{17}}{32}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{45-3\sqrt{17}}{32}$.

Bài 10: Giải phương trình: $4x+3+2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1+x}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$4t^2-4t-1+2t\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-2t-1$$

Bài giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$, phương trình trở thành:

$4t^2-4t-1+2t\sqrt{2-t^2}=0\Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(2t^2-2t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3t-1-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)=0$

Trường hợp 1: $3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=0\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}+1$

$\Leftrightarrow 9x+9=2-x+2\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 10x+7=2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{7}{10}\le x\le 1\\ \left(10x+7\right)^2=4\left(1-x\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=-1$ (Phương trình vô nghiệm).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}$.

Bài 11: Giải phương trình: $5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$5t^2-20-6t+\left(15t+12\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{2-t^2}\right)=5t^2-8$$

Bài giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$, phương trình trở thành:

$5t^2-20-6t+(15t+12)\sqrt{2-t^2}=0$

$\Leftrightarrow 10t^2-40-12t+(15t+12)2\sqrt{2-t^2}=0$

$\Leftrightarrow -(15t+12)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+25t^2-40=0$

$\Leftrightarrow -(15t+12)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+5\left(5t^2-8\right)=0$

$\Leftrightarrow -(15t+12)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+5\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(5t+10\sqrt{2-t^2}-15t-12\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(5\sqrt{2-t^2}-5t-6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6\right)=0$

Trường hợp 1: $\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

Trường hợp 2: $5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6=0\Leftrightarrow 5\sqrt{1-x}=5\sqrt{1+x}+6$

$\Leftrightarrow 25-25x=61+25x+60\sqrt{1+x}\Leftrightarrow -(36+50x)=60\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow -(18+25x)=30\sqrt{1+x}\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le -\frac{18}{25}\\ (18+25x)^2=900(1+x)\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{24}{25}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{3}{5}$ và $x=-\frac{24}{25}$.

Bài 12: Giải phương trình: $\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}-\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}-x^2+2=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$\left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-t^5-t^4-2t^3-2t^2-2t+1=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)\left(\sqrt{t^2+2}+t+1\right)=1-2t$$

Bài giải

Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành:

$\left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-\left(t^4+2t^2+2\right)t-t^4-2t^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-t^5-t^4-2t^3-2t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4+2t^2\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)+\left(1-2t\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4+2t^2\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)+\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)\left(\sqrt{t^2+2}+t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4+2t^2+t+1+\sqrt{t^2+2}\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$

Vì $x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}>0$ do đó $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+1$

$\Leftrightarrow x+1=x+2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$.

Bài 12: Giải phương trình:

$$3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-\left(x+5\right)\sqrt{2x+1}=0$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x+2}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$2t^3+3t^2-3-\left(t^2+2t+3\right)\sqrt{2t^2-3}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t+1+\sqrt{2t^2-3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{2t^2-3}+2t+1\right)\left(2t+1-\sqrt{2t^2-3}\right)=2t^2+4t+4$$

Bài giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{x+2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$2t^3 + 3t^2 - 3 - \left(t^2 + 2t + 3\right)\sqrt{2t^2 - 3} = 0$

$\Leftrightarrow 4t^3 + 8t^2 + 8t - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2t\left(2t^2 + 4t + 4\right) - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2t\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(2t + 1 - \sqrt{2t^2 - 3}\right) - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(2t\left(2t + 1 - \sqrt{2t^2 - 3}\right) - t^2 - 2t - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(3t^2 - 3 - 2t\sqrt{2t^2 - 3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(\left(2t^2 - 3\right) - 2t\sqrt{2t^2 - 3} + t^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} - t\right)^2\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+2} + 1\right) = 0$

Vì $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+2} + 1 > 0$ do đó $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 13: Giải phương trình: $3x^2 - 3x - 9 - 2\left(x^2 - 2\right)\sqrt{x+3} + \left(x^2 + 4\right)\sqrt{x} = 0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^5 + 3t^4 - 3t^2 + 4t - 9 - 2\left(t^4 - 2\right)\sqrt{t^2 + 3} = 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left(t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right) = -3t^2 + 6t - 3$$

Bài giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^5+3t^4-3t^2+4t-9-2\left(t^4-2\right)\sqrt{t^2+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(-3t^2+6t-3\right)+\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t+3+2\sqrt{t^2+3}\right)+\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t^4+t+1+2\sqrt{t^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1>0$ do đó $\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=2\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x+9+6\sqrt{x}=4x+12\Leftrightarrow 3x-6\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 14: Giải phương trình:

$$3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$$

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 3$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$-t^5+3t^4+3t^3-10t^2-9-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\sqrt{5-t^2}=0$

$\Leftrightarrow-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\left(t-3\right)-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\sqrt{5-t^2}=0$

$\Leftrightarrow-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\left(\sqrt{5-t^2}+t-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+x^2+x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=0$

Vì $\sqrt{x+2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ do đó:

$3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=0\Leftrightarrow 3=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow 9=5+2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 2=\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x=-1,x=2$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=-1,x=2$.

Bài 15: Giải phương trình:

$$2x^2-2-x^2\sqrt{x+1}+2x\sqrt{x^2-1}-\left(x^2+x\right)\sqrt{x-1}=0$$

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành:

$$2\left(t^2+1\right)^2-2-\left(t^2+1\right)^2\sqrt{t^2+2}+2t\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+2}-\left(\left(t^2+1\right)^2+\left(t^2+1\right)\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+4t^2-\left(t^4+2t^2+1\right)\sqrt{t^2+2}+\left(2t^3+2t\right)\sqrt{t^2+2}-\left(t^4+3t^2+2\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow -t^5+2t^4-3t^3+4t^2-2t-\left(t^4-2t^3+2t^2-2t+1\right)\sqrt{t^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow -t\left(t^2+2\right)\left(t^2-t+1\right)-\left(t^4-2t^3+2t^2-2t+1\right)\sqrt{t^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{t^2+2}\left(\sqrt{t^2+2}\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)t+\left(t^2+1\right)\left(t-1\right)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}\left(\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x-1}+x\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\right)=0$$

Phương trình vô nghiệm với mọi $x\ge 1$.

Kết luận: Phương trình vô nghiệm.

Bài 16: Giải phương trình: $x+3+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^2+t+2-\left(3t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-2$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t^2+2+t-\sqrt{2-t^2}-3t\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+t+2-\left(3t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t+1\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t+1\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)-\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left((3t+1)-\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+1-\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1\right)=0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Trường hợp 2: $2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1=0\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}+1=\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 4x+5+4\sqrt{1+x}=1-x\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x}=-4-5x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le -\dfrac{4}{5}\\ 16(x+1)=(4+5x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le -\dfrac{4}{5}\\ 16(x+1)=25x^2+40x+16\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{24}{25}.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=-\dfrac{24}{25}$.

Bài 17: Giải phương trình: $3x-10+3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{2+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$3t^2+3t-16+(4t-6)\sqrt{4-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)=5t^2-16$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$3\left(t^2-2\right)-10+3t-6\sqrt{4-t^2}+4t\sqrt{4-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2+3t-16+(4t-6)\sqrt{4-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -(2t-3)\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)+5t^2-16=0$$

$$\Leftrightarrow -(2t-3)\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)+\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)-(2t-3)\right)=0$$

$\Leftrightarrow\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(2\sqrt{4-t^2}-t+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\right)\left(2\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}+3\right)=0$

Trường hợp 1: $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow 2+x=4\left(2-x\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$.

Trường hợp 2: $2\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}+3=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}+3=\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow 8-4x+9+12\sqrt{2-x}=2+x\Leftrightarrow 12\sqrt{2-x}=-15+5x$

$\Leftrightarrow 5\left(3-x\right)+12\sqrt{2-x}=0$ (Phương trình vô nghiệm $\forall -2\le x\le 2$).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{6}{5}$.

Bài 18: Giải phương trình: $3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^5+3t^4-3t^2+4t-9-2\left(t^4-2\right)\sqrt{t^2+3}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t+3+2\sqrt{t^2+3}\right)=-3t^2+6t-3$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$3t^4-3t^2-9-2\left(t^4-2\right)\sqrt{t^2+3}+\left(t^4+4\right)t=0$

$\Leftrightarrow t^5+3t^4-3t^2+4t-9-2\left(t^4-2\right)\sqrt{t^2+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)-3t^2+6t-3=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)+\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t+3+2\sqrt{t^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(\left(t^4-2\right)+\left(t+3+2\sqrt{t^2+3}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t^4+t+1+2\sqrt{t^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1>0,\forall x\geq 0$. Do đó:

$\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3=0\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x+6\sqrt{x}+9=4x+12$

$\Leftrightarrow 3x-6\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 19: Giải phương trình:

$$x^2-2x-3+(2x+3)\sqrt{1-x^2}+(x-3)\sqrt{1+x}+(2x+3)\sqrt{1-x}=0$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+t\right)\sqrt{2-t^2}+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)=5t^2-2$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\leq x\leq 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(t^2-1\right)^2-2\left(t^2-1\right)-3+\left(2\left(t^2-1\right)+3\right)t\sqrt{2-t^2}+\left(\left(t^2-1\right)-3\right)t$$
$$+\left(2\left(t^2-1\right)+3\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4-2t^2+1-2t^2+2-3+\left(2t^2-2+3\right)t\sqrt{2-t^2}+t^3-4t$$
$$+\left(2t^2-2+3\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+t\right)\sqrt{2-t^2}+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+2t^2+t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^3(t+1)-4t(t+1)+\left(2t^2(t+1)+t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^3-4t+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(5t^3-2t-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t\left(5t^2-2\right)-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2+1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t\sqrt{2-t^2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(2-2t\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(t^2-2t\sqrt{2-t^2}+\left(2-t^2\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2=0$$

Chú ý rằng $\sqrt{1+x}+1>0, \forall -1\le x\le 1$. Do đó ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x} \Leftrightarrow 1-x=4+4x \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$.

Trường hợp 2: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=-\frac{3}{5}$.

Bài 20: Giải phương trình: $x\sqrt{x^3-3x}+\sqrt{x^2-3}-x-3-\sqrt{x}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$\left(t^3+1\right)\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(\sqrt{t^4-3}+t\right)=t^4-t^2-3$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\sqrt{3}$.

Đặt $t=\sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2\sqrt{t^6-3t^2}+\sqrt{t^4-3}-t^2-3-t=0$

$\Leftrightarrow t^3\sqrt{t^4-3}+\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$
$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$
$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+t^4-t^2-3=0$
$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(\sqrt{t^4-3}+t\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(t^3+t+1+\sqrt{t^4-3}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}\right)\left((x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1\right)=0$.

Chú ý rằng: $(x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1>0, \forall x\ge\sqrt{3}$.

Do đó: $\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x\ge\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 21: Giải phương trình:

$$x^2-9x+8+\sqrt{6x^2-x-1}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^2+2\right)\sqrt{3x+1}$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{2x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$4t^5-2t^4+8t^3+32t^2-4t-30-\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\sqrt{6t^2+10}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)=10t^2-16t-6$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Đặt ẩn phụ $t=\sqrt{2x-1}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-9\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+8+t\sqrt{3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+1}=$$
$$\left(2\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-1\right)t-\left(\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2+2\right)\sqrt{3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(t^2+1\right)^2-36\left(t^2+1\right)+64+4t\sqrt{6\left(t^2+1\right)+4}$$

$$=4t\left(\left(t^2+1\right)^2-2\right)-\left(\left(t^2+1\right)^2+8\right)\sqrt{6\left(t^2+1\right)+4}$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+4t^2+2-36t^2-36+64+4t\sqrt{6t^2+10}=$$

$$4t\left(t^4+2t^2-1\right)-\left(t^4+2t^2+9\right)\sqrt{6t^2+10}$$

$$\Leftrightarrow 4t^5-2t^4+8t^3+32t^2-4t-30-\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\sqrt{6t^2+10}=0$$

$$\Leftrightarrow 20t^2-32t-12+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(10t^2-16t-6\right)+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)+$$

$$\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)+t^4+2t^2+4t+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\sqrt{6t^2+10}+t^4+2t^2+12t+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{3x+1}-2\right)\left(4\sqrt{3x+1}+12\sqrt{2x-1}+4x^2+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1\right)\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1\right)=0$$

Vì $3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1>0, \forall x\geq\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}+1$

$\Leftrightarrow 4\left(2x-1\right)=3x+1+1+2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 8x-4=3x+2+2\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow 5x-6=2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(5x-6\right)^2=4\left(3x+1\right)\\ x\geq\dfrac{6}{5}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{36+4\sqrt{31}}{25}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{36+4\sqrt{31}}{25}$.

B. ÉP TÍCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN.

I. Đặt vấn đề:

Đây là một dạng phương pháp giải quyết các phương trình có dạng $A\sqrt{B} = C$ bằng cách nhóm về nhân tử mà không cần quan tâm đến nghiệm của phương trình. Các bươc làm như sau:

__Bước 1__: đặt $t = \sqrt{B}$ điều kiện $t \geq 0$.

Xét phương trình tổng quát có dạng $\alpha t^2 - At + C - \alpha B = 0$.

__Bước 2__:

- Đối với phương trình vô tỷ một biến x: Gán cho $x = 100$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.
- Đối với phương trình vô tỷ hai biến x, y: Gán cho $x = 100, y = \dfrac{1}{100}$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.

__Bước 3 :__

- Tính Δ và tìm α sao cho $\sqrt{\Delta} = f(\alpha)$ là số hữu tỷ và $\alpha \neq 0$
- Khi tìm $\sqrt{\Delta} = f(\alpha)$ chúng ta sử dụng TABLE với Start = -9; End = 9; Step = 1 tìm giá trị $\alpha \neq 0$ thỏa mãn điều kiện trên.
- Ta tìm được α và tính được $\sqrt{\Delta}$.

Trong phần này, chúng ta sẽ chỉ đề cập đến việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình, kỹ năng đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình sẽ được đề cập sau.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình sau: $(x^2+1)\sqrt{x^3+x-1} = 2x^2+2x+3$ (1)

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^3+x-1} = t$ với $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^3+x-1$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α vậy phương trình đã cho có dạng như sau :

$\alpha t^2 - (x^2+1)t + 2x^2+2x+3 - \alpha(x^3+x-1) = 0$ (2).

Gán giá trị cho $x = 100$ khi đó phương trình (2)

$\Leftrightarrow \alpha t^2 + 101t + 223 - 1009\alpha = 0$.

Tới đây ta tiến hành giải Δ với tham số α và với ẩn là t .

$\Delta = (101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE để tìm $\alpha \neq 0$ và α nguyên sao cho $f(\alpha) = \sqrt{\Delta}$ có giá trị hữu tỷ:

Xét công cụ TABLE (mode 7) cho:

$F(X) = \sqrt{(101)^2 - 4X(223 - 1009X)}$

Với các giá trị:

- START = -9.
- END = 9.
- STEP = 1.

Khi đó ta tìm giá trị X sao cho F(X) nhận giá trị hữu tỷ và đồng thời X là giá trị khác 0.

Dựa vào bảng giá trị TABLE như trên, ta nhận thấy với X = -1 thì:

$F(X) = 123 = 100 + 20 + 3 = x^2 + 2x + 3$

Vậy nếu lựa chọn $\alpha = 1$ thì:

$$\sqrt{\Delta} = x^2 + 2x + 3$$

X	F(X)
-9	587.4904…
-8	525.0152…
-7	462.8271…
-6	401.0598…
-5	339.9426…
-4	279.9017…
-3	221.8129…
-2	167.7170…
-1	123
0	101
1	115.5205…
2	156.7194…
3	209.4015…
4	266.8501…
5	326.5593…
6	387.4854…
7	449.1336…
8	511.2426…
9	573.6627…

Do đó, nếu ta lựa chọn: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ f(\alpha) = 123 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 123 = x^2 + 2x + 3$.

Vậy với cách đặt ẩn phụ là t và $\alpha = -1$ ta được phương trình có

$\sqrt{\Delta} = 123 = 100 + 20 + 3 = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \Delta = (x^2 + 2x + 3)^2$.

Vậy khi đó phương trình đã cho có dạng như sau:

$-t^2 - (x^2 + 1)t + (2x^2 + 2x + 3) + (x^3 + x - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow -t^2-\left(x^2+1\right)t+\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=0$.

$\Rightarrow \Delta=\left(x^2+1\right)^2-4\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=\left(x^2+2x+3\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+3\right)$.

Khi đó, bằng công thức nghiệm của phương trình bậc 2, ta thu được hai nghiệm sau :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x^2+1+x^2+2x+3}{-2}=-\dfrac{\left(x^2+x+2\right)}{2} \\ t=\dfrac{x^2+1-x^2-2x-3}{-2}=x+1 \end{array}\right.$$

Đến đây phương trình sẽ được viết dưới dạng nhân tử như sau :

$\left(t+\dfrac{x^2+x+2}{2}\right)\left(t-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2t+x^2+x+2\right)\left(t-x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

Bài giải

Điều kiên xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}>0 \forall x \in \mathbb{R}$ do đó:

$\sqrt{x^3+x-1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2=\left(x+1\right)^2 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3+x-1\right)=x^2+2x+1 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2-x-2=0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-2\right)\left(x^2+x+1\right)=0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Bài 2: Giải phương trình sau : $\left(x+1\right)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

Phân tích

Trong bài toán này ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ không hòan toàn .

Đặt $\sqrt{6x^2-6x+25}=t$ với $t\ge 0$ khi đó ta đi tìm $\alpha\ne 0$ theo phương trình tổng quát đã cho có dạng như sau.

$\alpha t^2+(x+1)t-(23x-13)-\alpha(6x^2-6x+25)=0$. (2)

Ta gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình (2)đã cho có dạng.

$\alpha t^2+101t-2287-59425\alpha=0\Rightarrow\Delta=(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE trong Casio tìm $\alpha\ne 0$ và có giá trị nguyên Với Start = -9 , End = 9, Step = 1 ta có :

$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=507\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=507=500+7=5x+7\Rightarrow\Delta=(5x+7)^2$

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$t^2+(x+1)t-(23x-13)-(6x^2-6x+25)=0$.

$\Leftrightarrow t^2+(x+1)t-(6x^2+17x+12)=0$.

Tới đây chúng ta đi giải phương trình trên theo ẩn t

$\Rightarrow\Delta=(x+1)^2+4(6x^2+17x+12)=25x^2+70x+49=(5x+7)^2$

Nghiệm của phương trình là:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}t&=\frac{-(x+1)+(5x+7)}{2}=2x+3\\ t&=\frac{-(x+1)-(5x+7)}{2}=-(3x+4)\end{aligned}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có : $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

$\Leftrightarrow\left(2x+3-\sqrt{6x^2-6x+25}\right)\left(3x+4+\sqrt{6x^2-6x+25}\right)=0$

Trường hợp 1 : $-(3x+4)=\sqrt{6x^2-6x+25} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3} \\ (3x+4)^2 = 6x^2-6x+25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3} \\ 3x^2+30x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-5$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2 : $\sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{6x^2-6x+25}\right)^2 = (2x+3)^2 \\ 2x+3 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+12x+9=6x^2-6x+25 \\ 2x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-18x+16=0 \\ x \ge -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=8 \end{array} \right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình đã cho là : $x \in \left\{1;8;-5-2\sqrt{7}\right\}$.

Bài 3: Giải phương trình : $(x^2-1)\sqrt{2x^2-x+15}=x^3+2x^2+6x-9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+15}=t$ với $t \ge 0$ khi đó ta đi tìm α theo phương trình tổng quát đã cho như sau :

$\alpha t^2+(x^2-1)t-(x^3+2x^2+6x-9)-\alpha(2x^2-x+15)=0$. (2)

Gán giá trị cho $x=100$ khi đó phương trình (2) có dạng :

$\alpha t^2+9999t-1020591-19915\alpha=0$.

Núc này ta coi ẩn là t và α tham số, tính Δ cho phương trình trên

$\Delta=(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$,

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$

Dùng chưc năng TABLE trong Casio tìm $\alpha \ne 0$ và là số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 ta có :

$$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=10205\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=10205=10000+200+5=x^2+2x+5$$

Phương trình đã cho có dạng :

$t^2+\left(x^2-1\right)t-\left(x^3+4x^2+5x+6\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2-1\right)+4\left(x^3+4x^2+5x+6\right)=\left(x^2+2x+5\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+5\right)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-\left(x^2-1\right)+\left(x^2+2x+5\right)}{2}=x+3\\ t=\dfrac{-\left(x^2-1\right)-\left(x^2+2x+5\right)}{2}=-x^2-x-2\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\left(x^2-1\right)\sqrt{2x^2-x+15}=x^3+2x^2+6x-9$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+15}\right)\left(x^2+x+2+\sqrt{2x^2-x+15}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+15}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}+\sqrt{2x^2-x+15}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}+\sqrt{2x^2-x+15}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x+3=\sqrt{2x^2-x+15}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+3\right)^2=\left(\sqrt{2x^2-x+15}\right)^2\\ x+3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x+9=2x^2-x+15\\ x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=6\end{array}\right.$$

Kết Luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $x\in\{1;6\}$.

Bài 4: Giải phương trình : $\left(x^2+8\right)\sqrt{2x^2-12x+14}=x^3-4x^2+14x-29$.

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-12x+14}=t$, $t\geq 0\Rightarrow t^2=2x^2-12x+14$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α và phương trình đã cho có dạng .

$\alpha t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-4x^2+14x-29\right)-\alpha\left(2x^2-12x+14\right)=0$. (2)

Gán $x=100$ cho phương trình (2) ta có

$\alpha t^2+10008t-961371-18814\alpha=0$

Tới đây ta coi t là ẩn của phương trình và α là tham số tính

$\Delta=\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio ta tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên. Với Start = -9, End = 9, Step = 1 ta thu được

$\begin{cases}\alpha=1\\ f\left(\alpha\right)=10202\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=10202=10000+200+2=\left(x^2+2x+2\right)$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-4x^2+14x-29\right)-\left(2x^2-12x+14\right)=0$

$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-2x^2+2x-15\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2+8\right)^2+4\left(x^3-2x^2+2x-15\right)=x^4+4x^3+8x^2+8x+4=\left(x^2+2x+2\right)^2$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+2\right)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-\left(x^2+8\right)+\left(x^2+2x+2\right)}{2}=x-3\\ t=\dfrac{-\left(x^2+8\right)-\left(x^2+2x+2\right)}{2}=-x^2-x-5\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2+8\right)\sqrt{2x^2-12x+14}=x^3-4x^2+14x-29$

$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(x^2+x+5+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-3=\sqrt{2x^2-12x+14}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ (x-3)^2=2x^2-12x+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=4$.

Bài 5: Giải phương trình : $\left(x^2+2x+7\right)\sqrt{2x^2-12x+11}=x^3-x^2+11x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-12x+11}=t$, $t\ge 0$, $t^2=2x^2-12x+11$ theo phương trình tổng quát ta đi tìm α có dạng như sau:

$$\alpha t^2+\left(x^2+2x+7\right)t-\left(x^3-x^2+11x-21\right)-\alpha\left(2x^2-12x+11\right)=0.$$

Gán giá trị cho x = 100 vào phương trình trên

$$\Leftrightarrow \alpha t^2+10207t-991079-18811\alpha=0.$$

$$\Delta=(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}.$$

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha=1 \\ f(\alpha)=10403 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=10403=10000+400+3=\left|x^2+4x+3\right|.$$

Khi đó phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+2x+7\right)t-\left(x^3-x^2+11x-21\right)-\left(2x^2-12x+11\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+2x+7\right)t-\left(x^3-x^2-x-10\right)=0. \ (2)$$

$$\Delta=\left(x^2+2x+7\right)^2+4\left(x^3-x^2-x-10\right)=\left(x^2+4x+3\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left|x^2+4x+3\right|.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2+2x+7\right)+\left(x^2+4x+3\right)}{2}=x-2 \\ t=\dfrac{-\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+4x+3\right)}{2}=-\left(x^2+3x+5\right) \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2+2x+7\right)\sqrt{2x^2-12x+11}=x^3-x^2+11x-21$

$\Leftrightarrow\left(x^2+3x+5+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-2=\sqrt{2x^2-12x+11}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ge 0\\(x-2)^2=2x^2-12x+11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-8x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=7$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=7$.

Bài 6 : Giải phương trình $\left(x^2-x+10\right)\sqrt{10x^2-47x+53}=3x^3-11x^2+42x-74$

Phân tích

Đặt $\sqrt{10x^2-47x+53}=t$, $t\ge 0, t^2=10x^2-47x+53$. Núc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2+\left(x^2-x+10\right)t-\left(3x^3-11x^2+42x-74\right)-\alpha\left(10x^2-47x+53\right)=0$. (2)

ta gán giá trị của $x=100$ vào phương trình (2)

$\alpha t^2+9910t-2894126-95353\alpha=0$

$\Delta=(9910)^2+4\alpha(2894126+95353\alpha)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9910)^2+4\alpha(2894126+95353\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9910)^2+4\alpha(2894126+95353\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=1\\f(\alpha)=10496\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=f(\alpha)=10496=10000+400+90+6=\left|x^2+5x-4\right|$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2-x+10\right)t-\left(3x^3-4x^2-5x-21\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2-x+10\right)^2+4\left(3x^3-4x^2-5x-21\right)=\left(x^2+5x-4\right)^2$.

Nghiệm của phương trình $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-x+10\right)+\left(x^2+5x-4\right)}{2}=3x-7 \\ t=\dfrac{-\left(x^2-x+10\right)-\left(x^2+5x-4\right)}{2}=-x^2-2x-7 \end{array}\right.$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2-x+10\right)\sqrt{10x^2-47x+53}=3x^3-11x^2+42x-74$

$\Leftrightarrow\left(3x-7-\sqrt{10x^2-47x+53}\right)\left(x^2+2x+7+\sqrt{10x^2-47x+53}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3x-7-\sqrt{10x^2-47x+53}\right)\left(\left(x+1\right)^2+6+\sqrt{10x^2-47x+53}\right)=0$

Vì $\left(x+1\right)^2+6+\sqrt{10x^2-47x+53}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $3x-7=\sqrt{10x^2-47x+53}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-7\ge 0\\ \left(3x-7\right)^2=10x^2-47x+53\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{7}{3}\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{7}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

Kết luận : Vậy $x=4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 7: Giải phương trình $x^2+2x-1+\left(x-1\right)\sqrt{x+2}=0$.

Phân tích :

Đặt $\sqrt{x+2}=t$, $t\ge 0$ khi đó $t^2=x+2$ Núc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát $\alpha t^2+\left(x-1\right)t+\left(x^2+2x-1\right)-\alpha\left(x+2\right)=0$. (2)

Gán $x=100$ cho phương trình (2) ta có $\alpha t^2+99t+\left(10199-102\alpha\right)=0$

$\Delta=\left(101\right)^2-4\alpha\left(10199-102\alpha\right)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(99\right)^2-4\alpha\left(10199-102\alpha\right)}$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(99\right)^2-4\alpha\left(10199-102\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ f(\alpha) = 305 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 305 = 300 + 5 = |3x + 5|$$

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$-2t^2 + (x-1)t + (x^2 + 2x - 1) + 2(x+2) = 0$.

$\Leftrightarrow -2t^2 + (x-1)t + (x^2 + 4x + 3) = 0$.

$\Delta = (x-1)^2 + 8(x^2 + 4x + 3) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(x-1) + (3x+5)}{-4} = -\dfrac{(2x+3)}{2} \\ t = \dfrac{-(x-1) - (3x+5)}{-4} = x + 1 \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $x \geq -2$.

Ta có: $x^2 + 2x - 1 + (x-1)\sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x + 3 + 2\sqrt{x+2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$

Trường hợp 1: $x + 1 = \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 2: $2x + 3 = -2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\dfrac{3}{2} \\ (2x+3)^2 = 4(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Kết luận *:* Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8 : Giải phương trình $(x^2 - 5x)\sqrt{5x^2 - 3x + 6} = 2x^3 - 12x^2 + 16x - 15$

Phân tích

Đặt $\sqrt{5x^2-3x+6}=t$, $t\ge 0$, $t^2=5x^2-3x+6$ núc này ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát .

$\alpha t^2+\left(x^2-5x\right)t-\left(2x^3-12x^2+16x-15\right)-\alpha\left(5x^2-3x+6\right)=0$.

Gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình tổng quát đã cho

$\alpha t^2+9500t-1881585-49706\alpha=0$.

$\Delta=\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)}$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)}$

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=3\\ f\left(\alpha\right)=10706\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=10706=10000+700+6=\left|x^2+7x+6\right|$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2+\left(x^2-5x\right)t-\left(2x^3+3x^2+7x+3\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2-5x\right)^2+12\left(2x^3+3x^2+7x+3\right)=\left(x^2+7x+6\right)^2\ \Rightarrow\sqrt{\Delta}=x^2+7x+6$

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-5x\right)+\left(x^2+7x+6\right)}{2}=6x+3\\ t=\dfrac{-\left(x^2-5x\right)-\left(x^2+7x+6\right)}{2}=-x^2-x-6\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$\left(x^2-5x\right)\sqrt{5x^2-3x+6}=2x^3-12x^2+16x-15$

$\Leftrightarrow\left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(x^2+x+6+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $6x+3=\sqrt{5x^2-3x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ (6x+3)^2 = 5x^2-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-39+\sqrt{1149}}{62}$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{-39+\sqrt{1149}}{62}$

Bài 9 Giải phương trình $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3} = x^3+2x^2-x+9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2+8x-3}=t$, $t \ge 0$, $t^2 = 2x^2+8x-3$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát .

$\alpha t^2 + \left(x^2+x+1\right)t - \left(x^3+2x^2-x+9\right) - \alpha\left(2x^2+8x-3\right) = 0$.(3)

Gán $x=10$ vào phương trình (3) $\Leftrightarrow \alpha t^2 + 111t - \left(1199-277\alpha\right) = 0$

$\Delta = (111)^2 + 4\alpha\left(1199+277\alpha\right) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2 + 4\alpha\left(1199+277\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2 + 4\alpha\left(1199+277\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ f(\alpha) = 135 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 135 = 100+30+5 = \left(x^2+3x+5\right)$

Kkhi đó phương trình đã cho có dạng:

$t^2 + \left(x^2+x+1\right)t - \left(x^3+4x^2+7x+6\right) = 0$

$\Delta = \left(x^2+x+1\right)^2 + 4\left(x^3+4x^2+7x+6\right) = \left(x^2+3x+5\right)^2$.

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \left|x^2+3x+5\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+3x+5\right)}{2} = x+2 \\ t = \dfrac{-\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2+3x+5\right)}{2} = -x^2-2x-3 \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \left(-\infty; \dfrac{-4-\sqrt{22}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-4+\sqrt{22}}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3}=x^3+2x^2-x+9$

$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(x^2+2x+3+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$

Vì $\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}>0\forall x\in\left(-\infty;\frac{-4-\sqrt{22}}{2}\right]\cup\left[\frac{-4+\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$

Do đó $x+2=\sqrt{2x^2+8x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ \left(x+2\right)^2=2x^2+8x-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{11}\\ x=-2-\sqrt{11}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{11}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2+\sqrt{11}$

Bài 10: Giải phương trình $\left(x^2-5\right)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+11}=t$, $t\ge 0$, $t^2=2x^2-x+11$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2+\left(x^2-5\right)t-\left(x^3+16x-21\right)-\alpha\left(2x^2-x+11\right)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\alpha t^2+9995t-1001579-19911\alpha=0$.

$\Delta=\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=3\\ f\left(\alpha\right)=10613\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=10613=10000+600+13=\left(x^2+6x+13\right)$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2+\left(x^2-5\right)t-\left(x^3+6x^2+13x+12\right)=0$.

$$\Delta=\left(x^2-5\right)^2+12\left(x^3+6x^2+13x+12\right)=\left(x^2+6x+13\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left(x^2+6x+13\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left(x^2+6x+13\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-5\right)+\left(x^2+6x+13\right)}{6}=x+3 \\ t=\dfrac{-\left(x^2-5\right)-\left(x^2+6x+13\right)}{6}=\dfrac{-2x^2-6x-8}{6} \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2-5\right)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

$$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2x^2+6x+8+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$$

Vì $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $x+3=\sqrt{2x^2-x+11} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \\ \left(x+3\right)^2=2x^2-x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \\ x=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$

Kết luận *:* nghiệm của phương trình $x=\left\{\dfrac{7-\sqrt{37}}{2};\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài 11: Giải phương trình sau:

$$15x^3+x^2-3x+2-\left(15x^2+x-5\right)\sqrt{x^2+x+1}=0$$

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=t$, $t\ge 0$, $t^2=x^2+x+1$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2-\left(15x^2+x-5\right)t+15x^3+x^2-3x+2-\alpha\left(x^2+x+1\right)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\alpha t^2-150095t+15009702-10101\alpha=0$.

$\Delta=\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases}\alpha=2\\ f\left(\alpha\right)=149695\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=149695=140000+9600+95$$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=140000+10000-400+100-5=150000-300-5=\left|15x^2-3x-5\right|$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2t^2-\left(15x^2+x-5\right)t+15x^3-x^2-5x=0$.

$\Delta=\left(15x^2+x-5\right)^2-8\left(15x^3-x^2-5x\right)=\left(15x^2-3x-5\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left|15x^2-3x-5\right|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{15x^2+x-5+\left(15x^2-3x-5\right)}{4}=\dfrac{15x^2-x-5}{2}\\ t=\dfrac{15x^2+x-5-\left(15x^2-3x-5\right)}{4}=x\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $15x^3+x^2-3x+2-\left(15x^2+x-5\right)\sqrt{x^2+x+1}=0$

$\Leftrightarrow\left(15x^2-x-5-2\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0\ \left(^*\right)$

Tiếp tục sử dụng kỹ thuật tách nhân tử bằng đặt ẩn phụ không hoàn toàn ta được:

$\left(^*\right)\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

Trường hợp 1: $2x-\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 3x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Trường hợp 2: $10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+x+1}=-10x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25\left(x^2+x+1\right)=\left(10x+2\right)^2 \\ 10x+2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x^2+15x-21=0 \\ 10x+2\le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 3: $x=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=x^2+x+1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

***Kết luận** :* Nghiệm của phương trình $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \vee x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$.

ĐOÀN TRÍ DŨNG

PHƯƠNG PHÁP

NHÂN LIÊN HỢP

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

TÀI LIỆU ÔN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

PHÂN TÍCH VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

VTED.VN - SÁCH GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN UY TÍN HÀNG ĐẦU

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp nhân liên hợp là một trong các phương pháp quan trọng giúp học sinh giải quyết các bài toán phương trình, bất phương trình vô tỷ nhanh gọn, chính xác. Tuy nhiên, nhân liên hợp như thế nào cho chuẩn lại là điều không phải đơn giản.

Phương pháp nhân liên hợp có bản chất làm xuất hiện các nhân tử của phương trình, bất phương trình. Chính vì vậy để xuất hiện chính xác các nhân tử đòi hỏi học sinh phải nắm chắc được bài toán có bao nhiêu nghiệm và các nghiệm đó có tính chất như thế nào, để từ đó quyết định chỉ ra phương thức liên hợp của phương trình.

Hy vọng qua tác phẩm này, các em học sinh sẽ có được một tài liệu bổ ích để có thể tự tin khi đối mặt với bài toán phương trình, bất phương trình.

Mọi ý kiến đóng góp, xin vui lòng liên hệ:
Facebook: http://facebook.com/toanthaydung
Email: dungdoan.math@gmail.com

Đoàn Trí Dũng – CASIO MAN

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các dạng liên hợp cơ bản.

- Căn bậc 2: $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- Căn bậc 2: $A-\sqrt{B}=\dfrac{A^2-B}{A+\sqrt{B}}$
- Căn bậc 3: $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- Căn bậc 3: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\dfrac{A+B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2-\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- Căn bậc 3: $A-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A^3-B}{A^2+A\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- Căn bậc 3: $A+\sqrt[3]{B}=\dfrac{A^3+B}{A^2-A\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- **Chú ý 1:** Liên hợp với căn bậc 3 mẫu số luôn là một đại lượng không âm.
- **Chú ý 2:** Khi có nhân tử chung trong liên hợp, phải rút nhân tử chung ra ngoài, chẳng hạn:

$$x+4-2\sqrt{x+4}=\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}-2\right)=\frac{x\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=\frac{\sqrt[3]{x}\left(x-1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

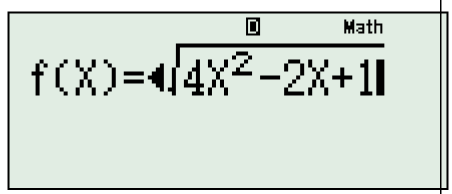
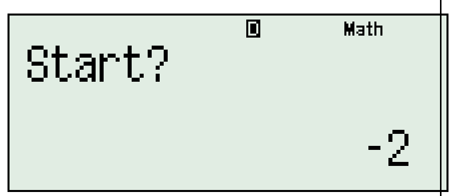
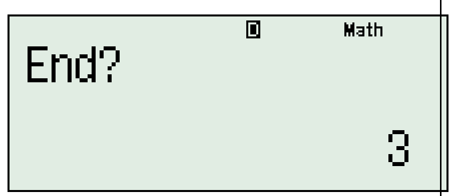
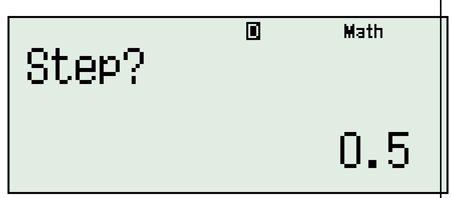
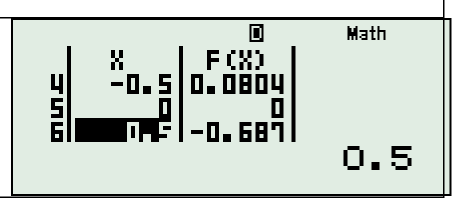
2. Điều kiện xác định và các điều kiện khác.

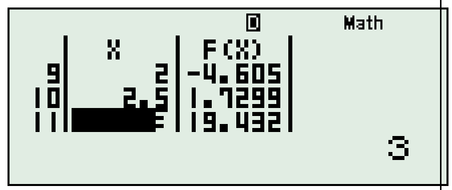
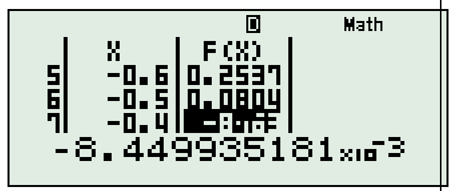
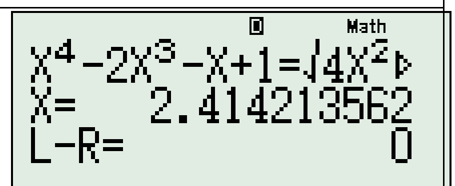
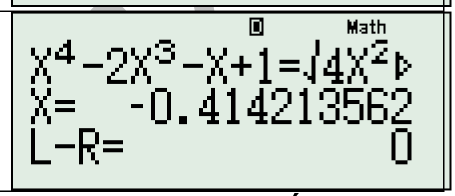
- $A=\sqrt{B}\Rightarrow A\ge 0,B\ge 0$
- $A=B\sqrt{C}\Rightarrow C\ge 0,AB\ge 0$
- $A+B=C+D\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\ge C,B\le D\\A\le C,B\ge D\end{array}\right.$
- $A=C+\sqrt{D}\Rightarrow A\ge C,D\ge 0$

PHÂN BIỆT GIỮA
NGHIỆM HỮU TỶ VÀ NGHIỆM VÔ TỶ

Việc biết một phương trình có bao nhiêu nghiệm, nghiệm đó là nghiệm vô tỷ hay hữu tỷ là vô cùng quan trọng.

Để biết rõ hơn ta tham khảo một phương trình như sau: $x^4-2x^3-x+1=\sqrt{4x^2-2x+1}$.

Sử dụng máy tính cầm tay, truy cập vào chức năng TABLE (MODE 7) và nhập hàm số: $F(X)=X^4-2X^3-X+1-\sqrt{4X^2-2X+1}$	
Ấn dấu = và chọn giá trị START $=-2$. START là giá trị bắt đầu, thường được đối chiếu từ điều kiện xác định.	
Ấn dấu = và chọn giá trị END = 3. END là giá trị kết thúc, thường được đối chiếu từ điều kiện xác định.	
Ấn dấu = và chọn giá trị STEP = 0.5. STEP là bước nhảy, hay còn gọi là khoảng cách giữa các giá trị của biến số.	
Khi đó nhận bảng giá trị của hàm số ta thấy có một nghiệm hữu tỷ đó là $x=0$.	

Bên cạnh đó, hàm số còn đổi dấu khi đi x từ 2 đến 2.5, như vậy có một nghiệm vô tỷ nữa trong khoảng này ngoài $x = 0$	
Nếu khảo sát kỹ hơn, chọn START = –1, END = 0, STEP = 0.1, ta nhận thấy còn có nghiệm trong $(-0.5;-0.4)$	
Vì có nghiệm $x \in (2;2.5)$ SHIFT CALC $x = 2.2$ ta được nghiệm vô tỷ đó là $x \approx 2.414213562$	
Tương tự SHIFT CALC $x = -0.45$ ta thu được 1 nghiệm vô tỷ nữa đó là $x \approx -0.414213562$	

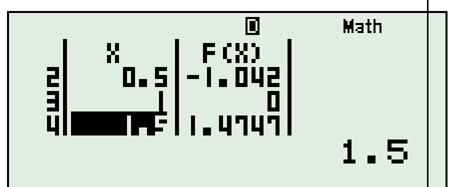
Như vậy qua Bảng giá trị TABLE ta nhận thấy:

- Phương trình có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0$, $x \approx 2.414213562$ và $x \approx -0.414213562$.
- Việc sử dụng START, END, STEP như thế nào là một nghệ thuật và người sử dụng TABLE một cách uyển chuyển sẽ khám phá ra vô vàn những điều bí ẩn của một phương trình, bất phương trình vô tỷ.

PHÂN BIỆT GIỮA NGHIỆM ĐƠN VÀ NGHIỆM BỘI HỮU TỶ

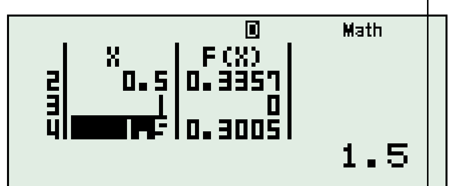
1. NGHIỆM ĐƠN

Nghiệm đơn $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)g(x)=0$.

Trong bảng giá trị TABLE, nghiệm đơn là nghiệm mà đi qua trục hoành hàm số có sự đổi dấu. Trong ảnh bên là nghiệm đơn $x=1$.	

2. NGHIỆM KÉP

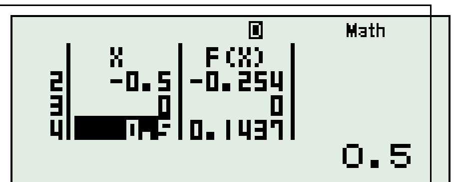
Nghiệm kép $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)^2g(x)=0$.

Trong bảng giá trị TABLE, nghiệm kép là nghiệm mà đi qua trục hoành hàm số quay trở lại dấu ban đầu. Trong ảnh bên là nghiệm kép $x=1$.	

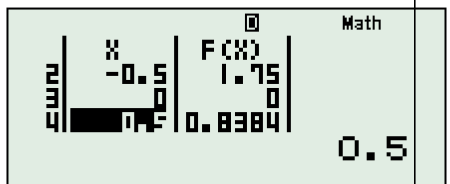
3. NGHIỆM BỘI BA

Nghiệm bội 4 $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)^3g(x)=0$.

Ví dụ: $x^3+x+1=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}$

Sử dụng TABLE với $F(X)=X^3+X+1-\sqrt[3]{3X^2+3X+1}$ ta thấy nghiệm đơn $x=0$	

Thật ra nghiệm bội 3 ban đầu rất gần giống nghiệm đơn, tuy nhiên điểm khác nhau lớn nhất giữa hai nghiệm này nằm ở chỗ nghiệm bội 3 là nghiệm kép của phương trình $f'(x)=0$.

Sử dụng TABLE với $F(X)=3X^2+1-\dfrac{2X+1}{\left(\sqrt[3]{3X^2+3X+1}\right)^2}$ ta có nghiệm kép $x=0$	

Đây chính là sự khác bệt giữa nghiệm đơn và nghiệm bội 3.

Thực chất cách kiểm tra trên không hoàn toàn khẳng định 100% là nghiệm bội 3, vì các nghiệm bội 5, bội 7 đều có cùng tính chất như trên, tuy nhiên với chương trình phổ thông hiện nay thì các nghiệm bội 5 và 7 tác giả sẽ tạm thời thừa nhận là không tồn tại.

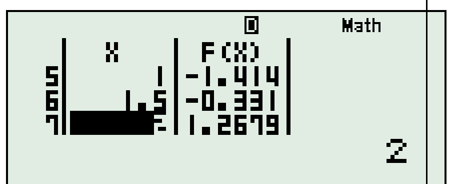
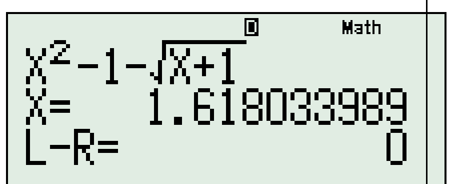
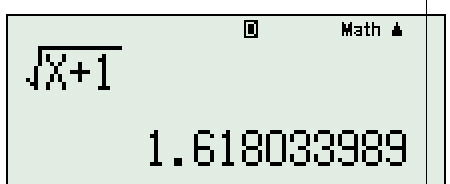
Chú ý: Việc sử dụng START, END, STEP là vô cùng quan trọng bởi học sinh rất dễ nhầm và rất dễ mắc sai lầm trong việc đánh giá nghiệm có bản chất là đơn hay bội, và bội là bội kép hay bội 3. Chính vì vậy, dù máy tính đã hỗ trợ trong việc định hướng phương trình nhưng tư duy của con người vẫn là yếu tố hàng đầu để đưa ra một quyết định đúng đắn nhất.

PHÂN BIỆT GIỮA NGHIỆM ĐƠN VÀ NGHIỆM KÉP VÔ TỶ

1. NGHIỆM ĐƠN VÔ TỶ

Nghiệm đơn vô tỷ $x=a$ là một nghiệm vô tỷ của một đa thức $P(x)$ (thông thường ở dạng bâc 2) và một phương trình $f(x)=0$ có thể được phân tích nhân tử dưới dạng $P(x)g(x)=0$.

Ví dụ xét phương trình: $x^2-1-\sqrt{x+1}=0$

<table>
<tr><td>Sử dụng TABLE với $F(x)=x^2-1-\sqrt{x+1}$ ta thấy phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(1.5;2)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Để tìm được chính xác nghiệm này, ta SHIFT CALC với $x=1.6$ là một giá trị bất kỳ trong khoảng $(1.5;2)$ và thu được $x\approx 1.61803398$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Thông thường đối với nghiệm vô tỷ ta muốn tìm liên hợp thì thay vào căn thức được: $\sqrt{x+1}\approx 1.618033989$
Như vậy ta đánh giá: $x\approx\sqrt{x+1}$ và liên hợp sẽ là $\left(x-\sqrt{x+1}\right)$</td><td>


</td></tr>
</table>

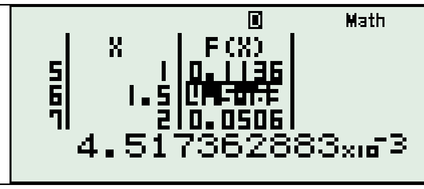
2. NGHIỆM KÉP VÔ TỶ

Nghiệm kép vô tỷ $x=a$ là một nghiệm vô tỷ của một đa thức $P(x)$ (thông thường ở dạng bâc 2) và một phương trình $f(x)=0$ có thể được phân tích nhân tử dưới dạng $\left[P(x)\right]^2 g(x)=0$.

Ví dụ xét phương trình:

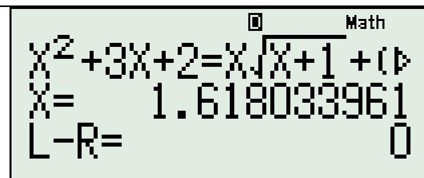
$$x^2+3x+2=x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{3x+2}$$

Sử dụng TABLE với $F(x)=x^2+3x-x\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{3x+2}+2$



Ta thấy phương trình không có một giá trị nào đổi dấu (ta có cảm giác gần như vô nghiệm). Nhưng thực ra không hẳn vậy, bởi nếu như là một nghiệm vô tỷ và hàm số tiếp xúc với trục hoành (nghiệm kép) thì TABLE không thể thể hiện được nghiệm, và thay vào đó ta nhận thấy điểm thấp nhất trong bảng giá trị đó là $x=1.5$, tại đây ta dự đoán: Phương trình có nghiệm kép vô tỷ với giá trị rất gần với $x=1.5$.

SHIFT CALC với giá trị $x=1.5$ ta có nghiệm: $x\approx 1.618033961$

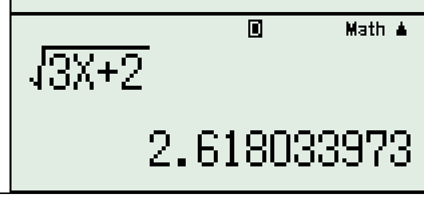


Thay vào các căn thức

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\approx 1.61803398\\ \sqrt{3x+2}\approx 2.61893397\end{cases}$$

Vậy đánh giá:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\approx x\\ \sqrt{3x+2}\approx x+1\end{cases}$$



Vậy các liên hợp cần tạo ra là:

$$\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2,\left(x+1-\sqrt{3x+2}\right)^2$$

<u>Chú ý:</u> Vì là nghiệm kép nên liên hợp phải có chứa bình phương.

CHỦ ĐỀ 1: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM HỮU TỶ ĐƠN

Bài 1: Giải phương trình:

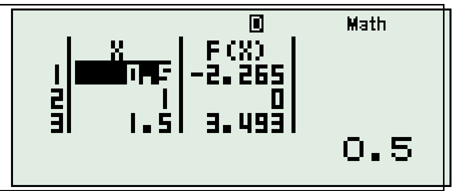
$$\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1 \ (*)$$

(Trích đề thi HSG Thành phố Hà Nội 2013)

Phân tích:

Xét $F(x)=\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x-\sqrt{5x-1}-1$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy phương trình có duy nhất nghiệm đơn $x=1$.



Vậy $\begin{cases}\sqrt[3]{x-9}=-2\\ \sqrt{5x-1}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x-9}+2\\ \sqrt{5x-1}-2\end{cases}$ là liên hợp cần tìm

Bài giải: Điều kiện: $x\ge\frac{1}{5}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-9}+2\right)-\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+2x^2+3x-5=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{a}-\frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(2x+5)=0$$

$$\left(\text{Với } a=\sqrt[3]{x-9}^2-2\sqrt[3]{x-9}+4=\left(\sqrt[3]{x-9}-1\right)^2+3>0\right)$$

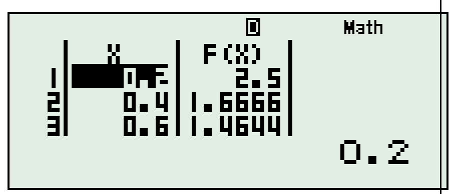
$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{1}{a}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\right]=0 \ (**)$$

Tại đây để chứng minh vô nghiệm, ta cần tìm ra 1 giá trị b sao cho $\left(b-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)\ge0$. Tất nhiên, bạn nào học tốt có thể sẽ nhìn thấy luôn giá trị cần tìm chính là $b=\frac{5}{2}$, tuy nhiên trong bài viết này, tác giả sẽ hướng dẫn học sinh một cách tổng quát về cách tìm giá trị b.

Trước hết là nguyên tắc vàng cho việc lựa chọn biểu thức quy đồng như sau:

- Nếu có $-\dfrac{A}{B}$, ta tìm $\text{Max}\left(\dfrac{A}{B}\right)=a$, sau đó nhóm thành biểu thức: $\left(a-\dfrac{A}{B}\right)$.
- Nếu có $\dfrac{A}{B}-$, ta tìm $\text{Min}\left(\dfrac{A}{B}\right)=a$, sau đó nhóm thành biểu thức: $\left(\dfrac{A}{B}-a\right)$.

Như vậy trong bài toán trên, mấu chốt của vấn đề là tìm được $\text{Max}\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)$.

Sử dụng TABLE với $F(x)=\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}$ START = 0.2, END = 3, STEP = 0.2.	

Ta thấy giá trị cao nhất của F(x) chính là 2.5 = $\dfrac{5}{2}$.

Như vậy ta cần nhóm biểu thức: $\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)$.

Quay trở lại bài toán, ta có:

$$(**)\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{a}+\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)+2x+\frac{5}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{a}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{2\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}+2x+\frac{5}{2}\right]=0$$

Chú ý rằng: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{5\sqrt{5x-1}}{2\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}+2x+\dfrac{5}{2}>0\,\forall x\geq\dfrac{1}{5}$

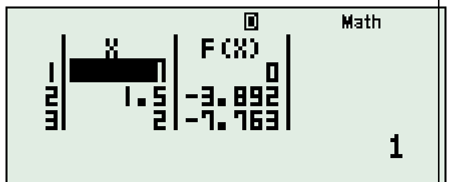
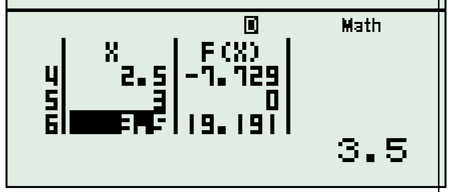
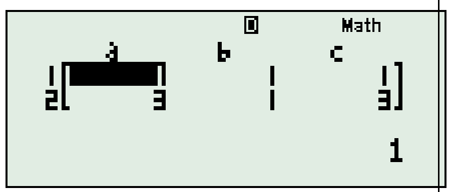
Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2: Giải phương trình:

$$5x^3-22x^2+22x-6+\sqrt{4x-3}=0\ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x)=5x^3-22x^2+22x-6+\sqrt{4x-3}$

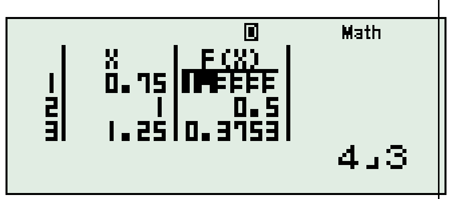
TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy phương trình có hai nghiệm đơn phân biệt đó là $x=1$ và $x=3$. Do đó nhân tử là $(x-1)(x-3)$ là nhân tử bậc 2 do đó liên hợp có dạng: $ax+b=\sqrt{4x-3}$.	 
Thay $x=1,\ x=3$ ta có: $\begin{cases}a+b=1\\3a+b=3\end{cases}$ Giải hệ ta có $a=1, b=0$ Vậy ta có: $\left(x-\sqrt{4x-3}\right)$	

Bài giải: Điều kiện: $x\ge\frac{3}{4}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^2-4x+3\right)(5x-2)-\left(x-\sqrt{4x-3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+3\right)(5x-2)-\frac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+3\right)\left(5x-2-\frac{1}{x+\sqrt{4x-3}}\right)=0\ (**)$$

Sử dụng TABLE với $F(x)=\frac{1}{x+\sqrt{4x-3}}$ START = 0.75, END = 5, STEP = 0.25.	

Giá trị lớn nhất của $\frac{1}{x+\sqrt{4x-3}}$ là $\frac{4}{3}$. Do đó:

$$(**) \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(5x-\frac{10}{3}+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x+\sqrt{4x-3}}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(5\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{4x-3+4\sqrt{4x-3}}{3\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}\right)=0$$

Vì $5\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{4x-3+4\sqrt{4x-3}}{3\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}>0\forall x\geq\frac{3}{4}$ do đó ta có $x=1, x=3$ là hai nghiệm duy nhất.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: $\sqrt{x^2+x-2}+x^2>\sqrt{2(x-1)}+1$

Đáp số: $x\geq 1$

Bài 2: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq x-x^2$

Đáp số: $x\in\left[\frac{17}{21};1\right]\cup[2;+\infty)$

Bài 3: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

Đáp số: $x=1, x=2$

Bài 4: $5x^3-30x^2+54x-30+\sqrt{5x-6}=0$

Đáp số: $x=2, x=3$

Bài 5: $6x^3-19x^2+14x-1+2\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-1}=0$

Đáp số: $x=1, x=2$

Bài 6: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$

Đáp số: $x=2$

Bài 7: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Đáp số: $x=1$

Bài 8: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Đáp số: $x=3$

Bài 9: $2\sqrt{x+3}+2(x-1)\sqrt{x+7}=4x^2+13x-13$

Đáp số: $x=-3, x=1$

Bài 10: $\left(x^2+x\right)\sqrt{4x-3}-\sqrt{6x-2}-16x+16=0$

Đáp số:

CHỦ ĐỀ 2: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM VÔ TỶ ĐƠN

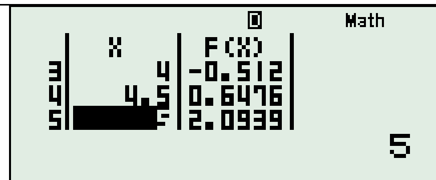
Bài 1: Giải phương trình:

$$x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}\ (*)$$

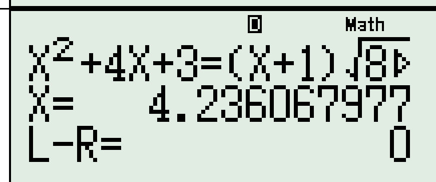
Phân tích:

Xét $F(x)=x^2+4x+3-(x+1)\sqrt{8x+5}-\sqrt{6x+2}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có nghiệm trong $(4;4.5)$.



SHIFT CALC $x=4.3$ ta có $x\approx 4.236067977$.

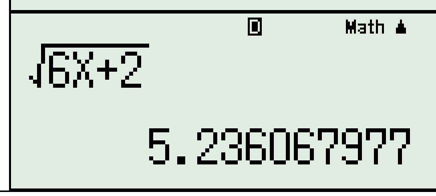


Thay vào căn:

$$\begin{cases}\sqrt{8x+5}\approx 6.236067977\\ \sqrt{6x+2}\approx 5.236067977\end{cases}$$

Do đó đánh giá:

$$\begin{cases}\sqrt{8x+5}\approx x+2\\ \sqrt{6x+2}\approx x+1\end{cases}$$



Bài giải: Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow (x+1)\left(x+2-\sqrt{8x+5}\right)+\left(x+1-\sqrt{6x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x^2-4x-1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{6x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x-1)\left(\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}\right)=0$$

Vì $x\ge -\frac{1}{3}$ nên $\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}>0$

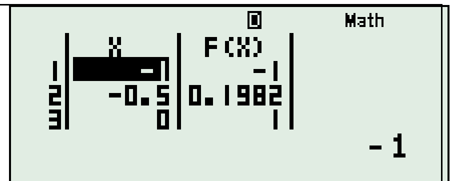
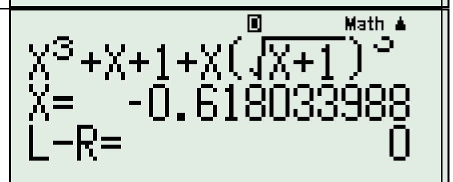
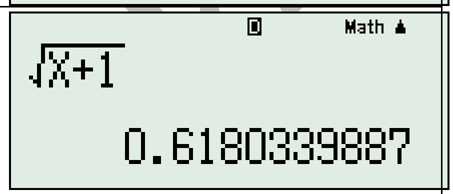
Vậy $x^2-4x-1=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$.

Bài 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \le 0 \ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x)=x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có nghiệm trong $(-1;-0.5)$.	
SHIFT CALC $x=-0.7$ ta có $x\approx -0.618033988$.	
Thay vào căn: $\sqrt{x+1}\approx 0.6180339887$ Do đó đánh giá: $\sqrt{x+1}\approx -x$	

Bài giải: Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -1 \\ \sqrt{x^2+x+1}\ne -x \end{cases} \Rightarrow x>-1.$

Với: $x>-1 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+\sqrt{x^2}$

$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+|x|\ge x-x\ge 0$.

Do đó: $x+\sqrt{x^2+x+1}>0 \forall x>-1.$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3\le 0 \\ x>-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}\le 0 \\ x>-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)-\left(x^2-(x+1)\right)\le 0 \\ x>-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)-\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)\le 0 \\ x>-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)\le 0 \\ x>-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}\le -x \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1\ge 0 \\ 0\ge x>-1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

Bài 3: Giải phương trình:

$$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}\ \ (*)$$

Bài giải: Điều kiện: $x\ge 0$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

Vì $1+\sqrt{x+1}>0$ do đó ta có:

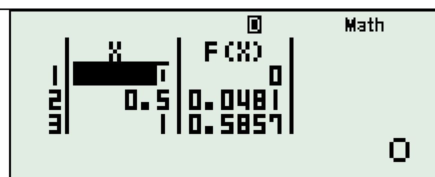
$$\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

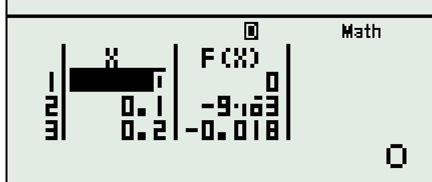
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$$

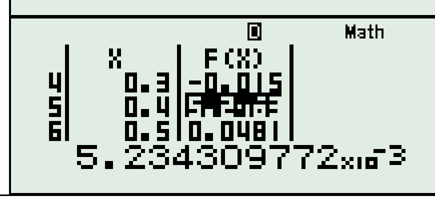
Phân tích:

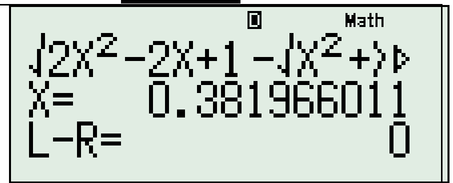
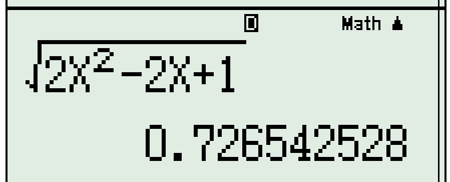
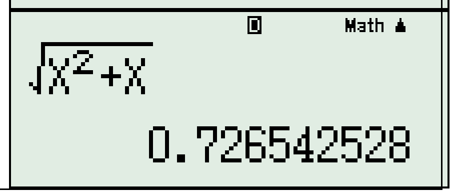
Xét $F(x)=\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy phương trình chỉ có nghiệm $x=0$. Tuy nhiên đánh giá như vậy là hoàn toàn sai lầm bởi nếu khảo sát kỹ hơn ta sẽ nhận thấy ngoài nghiệm $x=0$, còn có 1 nghiệm nữa nằm trong $(0.3;0.4)$.







SHIFT CALC $x=0.35$ ta có $x\approx 0.3819660113$.	
Thay vào căn: $\begin{cases}\sqrt{x}\approx 0.6180339\\ \sqrt{2x^2-2x+1}\approx 0.72654\\ \sqrt{x^2+x}\approx 0.72654\end{cases}$ Do đó đánh giá: $\begin{cases}\sqrt{x}\approx 1-x\\ \sqrt{2x^2-2x+1}\approx\sqrt{x^2+x}\end{cases}$	

Quay trở lại bài toán:

$$\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}\right)=0$$

Trường hợp 1:

$$x-1+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ (1-x)^2=x\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=0\\ \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0\end{cases}$$

Cộng hai vế của hai phương trình trên ta được:

$$2\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=1-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+1=(1-x)^2 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2}=\sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

Đáp số: $x=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

Bài 2: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

Đáp số: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8}$

Bài 3: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$

Đáp số: $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6},x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

Bài 4: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

Đáp số: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Bài 5: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

Đáp số: $x=4\pm2\sqrt{3},x=9\pm6\sqrt{2},x=1$

Bài 6: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

Bài 7: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0$

Đáp số: $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$

Bài 8: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

Đáp số: $x=-2,x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Bài 9: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

Đáp số: $x=-1,x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},x=2-2\sqrt{3}$

CHỦ ĐỀ 3: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM KÉP HỮU TỶ

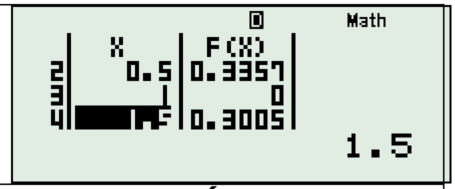
Bài 1: Giải phương trình:

$$x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = 0 \ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x) = x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có nghiệm kép $x = 1$.



TÌM LIÊN HỢP NGHIỆM KÉP

Đặt $ax + b = \sqrt{x}$, ta có:

$$\begin{cases} \left(ax + b = \sqrt{x}\right)\Big|_{x=1} \\ a = \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Liên hợp cần tìm: $\left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right)$

Bài giải: Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(x+1)^2 - 4x}{x + 1 + 2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(1 + \frac{1}{x + 1 + 2\sqrt{x}}\right) = 0$$

Vì $x \geq 0$ do đó $1 + \dfrac{1}{x + 1 + 2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow x = 1$

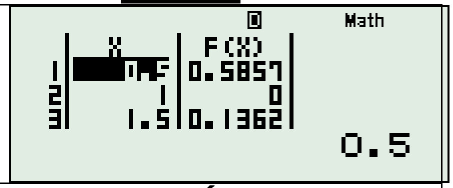
Bài 2: Giải phương trình:

$$2x + 1 = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x - 1} \ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x) = 2x + 1 - 2\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có nghiệm kép $x=1$.



TÌM LIÊN HỢP NGHIỆM KÉP

Đặt $ax+b=\sqrt{x}$, ta có:

$$\begin{cases} \left(ax+b=\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1} \\ a=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Liên hợp cần tìm: $\left(x+1-2\sqrt{x}\right)$

Đặt $ax+b=\sqrt{2x-1}$, ta có:

$$\begin{cases} \left(ax+b=\sqrt{2x-1}\right)\Big|_{x=1} \\ a=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right)\Big|_{x=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Liên hợp cần tìm: $\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$

<u>Bài giải:</u> Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-2\sqrt{x}\right)+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

Vì $x\ge\dfrac{1}{2}$ do đó $\dfrac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}}>0\Rightarrow x=1$

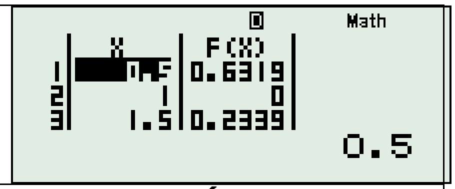
Bài 3: Giải phương trình:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x}} - 4 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có nghiệm kép $x = 1$.



TÌM LIÊN HỢP NGHIỆM KÉP

Áp dụng kỹ thuật tìm liên hợp nghiệm kép, ta có các liên hợp cần tìm:

$$\left(x+1-2\sqrt{x^2-x+1}\right) \text{ hay } \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} - 2\right)$$

Bài giải: Điều kiện: $x > 0$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3x+3}{\sqrt{x}} - 6 = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} - 2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} = \frac{-3x^2+6x-3}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$. Trong đó:

$a = \sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right), b = \sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)$

Vì $x > 0$ do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)} > 0$$

Vậy $3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: $x^3-2x^2+4x-1=\sqrt{4x-3}+\sqrt[3]{3x-2}$

Đáp số: $x=1$

Bài 2: $x^2+1=\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}$

Đáp số: $x=1$

Bài 3: $x^3+2x-\left(x^2+1\right)\sqrt{2x-1}>\sqrt[3]{2x^2-x}$

Đáp số: $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$

Bài 4: $4\sqrt{x^2-x+10-4\sqrt{2-2x}}=x-7+8\sqrt{3-x}$

Đáp số: $x=-1$

Bài 5: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

Đáp số: $x=1$

Bài 6: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

Đáp số: $x=1$

Bài 7: $x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=5$

Bài 8: $x^4-16x^3+31x^2-6x+2-6(x+1)\sqrt{x}=0$

Đáp số: $x=1, x=7\pm4\sqrt{3}$

Bài 9: $2x^2-3x+7-3\sqrt[3]{4x+4}=0$

Đáp số: $x=1$

Bài 10: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$

Đáp số: $x=1$

CHỦ ĐỀ 5: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM TỔNG BỘI TỪ 3 TRỞ LÊN

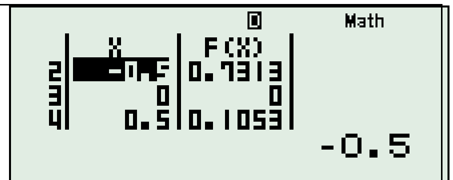
Bài 1: Giải phương trình:

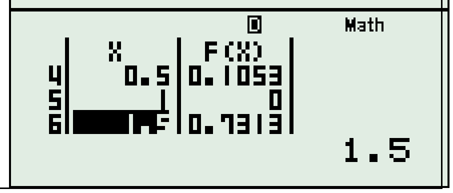
$$x^4-2x^3+2x^2-x+1=\sqrt{2x^2-2x+1}\ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có 2 nghiệm kép $x=1,\ x=0$. Như vậy nhân tử có dạng $x^2(x-1)^2$ là một đa thức bậc 4 do đó xét: $ax^2+bx+c=\sqrt{2x^2-2x+1}$





Để tìm được các hệ số a, b, c ta xét hệ:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=\sqrt{2x^2-2x+1}, x=0 \\ ax^2+bx+c=\sqrt{2x^2-2x+1}, x=1 \\ \left(ax^2+bx+c\right)'=\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}, x=0 \\ \left(ax^2+bx+c\right)'=\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}, x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(x^2-x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)$

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^4-2x^3+x^2\right)+\left(x^2-x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2+\frac{x^2(x-1)^2}{x^2-x+1+\sqrt{2x^2-2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2\left(1+\frac{1}{x^2-x+1+\sqrt{2x^2-2x+1}}\right)=0$$

Do đó phương trình có 2 nghiệm $x=0, x=1$.

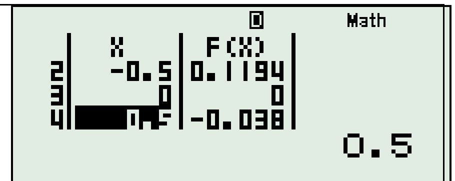
Bài 2: Giải phương trình:

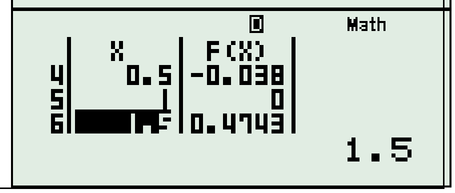
$$2x^2+3=\sqrt{x^3+2x^2+1}+\sqrt{x^3+4x^2+4}\ \ (*)$$

Phân tích:

Xét $F(x)=2x^2+3-\sqrt{x^3+2x^2+1}-\sqrt{x^3+4x^2+4}$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy có 2 nghiệm đơn $x=1,\ x=0$.

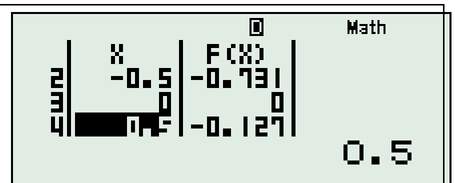


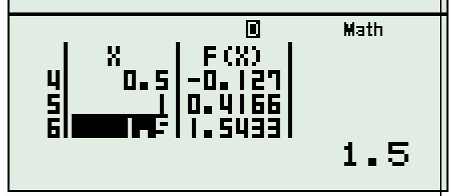


Để kiểm tra xem 2 nghiệm đơn có nghiệm nào là bội ba hay không ta xét đạo hàm của hàm số trên:

$$F(x)=4x-\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2+1}}-\frac{3x^2+8x}{2\sqrt{x^3+4x^2+4}}$$

Sử dụng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta thấy rằng $x=0$ là một nghiệm của $F(x)$ nhưng $x=1$ lại không phải là nghiệm. Do đó $x=0$ là nghiệm bội 3 còn $x=1$ chỉ đơn thuần là nghiệm đơn.





Như vậy nhân tử có dạng $x^3(x-1)$ là một đa thức bậc 4 do đó xét: $ax^2+bx+c=\sqrt{x^3+2x^2+1}$. Xét hệ:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=\sqrt{x^3+2x^2+1}, x=0 \\ ax^2+bx+c=\sqrt{x^3+2x^2+1}, x=1 \\ (ax^2+bx+c)'=\left(\sqrt{x^3+2x^2+1}\right)', x=0 \\ (ax^2+bx+c)'=\left(\sqrt{x^3+2x^2+1}\right)'', x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Do đó liên hợp cần tìm là: $\left(x^2+1-\sqrt{x^3+2x^2+1}\right)$

Tương tự ta có liên hợp: $\left(x^2+2-\sqrt{x^3+4x^2+4}\right)$

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow x^2+1-\sqrt{x^3+2x^2+1}+x^2+2-\sqrt{x^3+4x^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3(x-1)}{x^2+1+\sqrt{x^3+2x^2+1}}+\frac{x^3(x-1)}{x^2+2+\sqrt{x^3+4x^2+4}}=0$$

Vì $x^2+1+\sqrt{x^3+2x^2+1}>0, x^2+2+\sqrt{x^3+4x^2+4}>0$

Do đó phương trình có 2 nghiệm: $x=0, x=1$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Bài 1: $2x^2-2x+3=\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{5x^2-4x+4}$

Bài 2: $x^4+2x^3+2x^2+x+2=2\sqrt{x^2+x+1}$

Bài 3: $x^2\sqrt{x+3}+2=2\sqrt{5x^2+1-2x^3}$

Bài 4: $x^3+x^2+x+1=\sqrt{3x^2+2x+1}$

Bài 5: $x^3-2x^2-x+1=\sqrt{2x^3-2x+1}$

Bài 6: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}=0$

Bài 7: $2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$

Bài 8: $x^3+x^2+1=\sqrt{2x^2+1-2x^3}$

ĐOÀN TRÍ DŨNG – HÀ HỮU HẢI

KÍNH LÚP TABLE

Tập 5: Ưng chảo thủ

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2 - x^2y - y^3 + 5x^2 + y^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - y - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 2, ta thế $y = x^2 - 3x + 2$ vào phương trình 1:

$$x\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 - x^2\left(x^2 - 3x + 2\right) - \left(x^2 - 3x + 2\right)^3 + 5x^2 + \left(x^2 - 3x + 2\right)^2$$
$$-\left(x^2 - 3x + 2\right) + 1 = 0$$

SHIFT CALC với $x = 4$ ta thu được nghiệm $x \approx 3.732050808$.

Với $x \approx 3.732050808$ ta có $y = x^2 - 3x + 2 \approx 4.732050808$ do đó $y = x + 1$.

Thay $y = x + 1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} xy^2 - x^2y - y^3 + 5x^2 + y^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - y - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 4x^2 - x = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy lấy $x.PT2 + PT1 = 0$ ta sẽ thu được nhân tử $y = x + 1$.

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $\begin{cases} xy^2 - x^2y - y^3 + 5x^2 + y^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - y - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(xy^2 - x^2y - y^3 + 5x^2 + y^2 - y + 1\right) + x\left(x^2 - y - 3x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 + 2x^2 + y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + \left(2 - y\right)x^2 + \left(y^2 - y + 2\right)x - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Đặt $y = 100$, ta có: $x^3 + \left(2 - y\right)x^2 + \left(y^2 - y + 2\right)x - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 98x^2 + 9902x - 990099 = 0$, sử dụng máy tính ta được nghiệm $x = 99$

Lập lược đồ Hoorne phân tích nhân tử:

x	1	-98	9902	-990099
99	1	1	10001	0

Do đó: $x^3 - 98x^2 + 9902x - 990099 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 99\right)\left(x^2 + x + 10001\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 100 + 1\right)\left(x^2 + x + 10000 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - 100 + 1\right)\left(x^2 + x + 100^2 + 1\right) = 0$

Vì $y=100$ do đó ta có: $\left(x-y+1\right)\left(x^2+x+1+y^2\right)=0$

Ta có: $x^3+\left(2-y\right)x^2+\left(y^2-y+2\right)x-y^3+y^2-y+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x-y+1\right)\left(x^2+x+1+y^2\right)=0\Leftrightarrow y=x+1$ (Vì $x^2+x+1+y^2>0\forall x,y\in\mathbb{R}$).

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta có:

$x^2-y-3x+2=0\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

Với $x=2+\sqrt{3}\Rightarrow y=x+1=3+\sqrt{3}$.

Với $x=2-\sqrt{3}\Rightarrow y=x+1=3-\sqrt{3}$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm $\left(x;y\right)\in\left\{\left(2+\sqrt{3};3+\sqrt{3}\right);\left(2-\sqrt{3};3-\sqrt{3}\right)\right\}$.

Bình luận: Mấu chốt của bài toán nằm ở việc đánh giá $y=x+1$ sau đó thay vào hệ phương trình ta được mối quan hệ: $x.PT2+PT1=0$.

Tuy nhiên đây là nhóm biểu thức ở dạng dễ nhận diện, chúng ta có thể truy ra giá trị x nhân thêm với phương trình 2 bằng cách xét:

$$\frac{PT1}{PT2}=\frac{-x^3+4x^2-x}{x^2-4x+1}$$

Sử dụng công cụ CALC với giá trị $x=100$ ta được kết quả là -100. Vậy:

$$\frac{PT1}{PT2}=\frac{-x^3+4x^2-x}{x^2-4x+1}=-100=-x\Rightarrow x.PT2+PT1=0$$

Tất nhiên đây là bài toán đơn giản, trong các bài toán tiếp theo chúng ta sẽ có những cách kết nối hai phương trình khó hơn.

Chú ý: Giá trị $x=y-1=2x-y+1=...$ do đó có thể sử dụng các đánh giá kết nối hai phương trình như sau: $\begin{cases}\left(y-1\right)PT2+PT1=0\\\left(2x-y+1\right)PT2+PT1=0\\....\end{cases}$

Như vậy có rất nhiều cách kết nối hai phương trình và tùy vào tình huống của bài toán ta sẽ có những cách đánh giá khác nhau.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^3-y^3+2x^2+2y^2-1=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 2, ta có $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Xét $y=\sqrt{1-x^2}$, thay vào phương trình 1 ta có:

$$x^3\sqrt{1-x^2}-2x^2\sqrt{1-x^2}^2+x\sqrt{1-x^2}^3-x^3-\sqrt{1-x^2}^3+2x^2+2\sqrt{1-x^2}^2-1=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được 2 cặp nghiệm: $\begin{cases} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=1\Rightarrow y=0 \end{cases}$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $x+y=1$ hay $y=1-x$

Thay $y=1-x$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} -\left(4x^4-8x^3+4x^2\right)=0 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases}$

Vì $\left(2x^2-2x\right)^2+\left[-\left(4x^4-8x^3+4x^2\right)\right]=0$ do đó $PT1+\left(PT2\right)^2=0$ khi đó sẽ xuất hiện nhân tử $x+y=1$.

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^3-y^3+2x^2+2y^2-1=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^3-y^3+2x^2+2y^2-1+\left(x^2+y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+x^3y+xy^3-x^3-y^3= \quad \Leftrightarrow \left(x+y-1\right)\left(x^3+y^3\right)=0$$

Trường hợp 1: $x+y=1$ hay $y=1-x$. Thay $y=1-x$ vào phương trình 2 ta được: $2x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=1\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^3+y^3=0\Leftrightarrow y=-x$. Thay $y=-x$ vào phương trình hai ta được: $2x^2=1\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}},y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vee x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kết luận: Hệ phương trình có 4 cặp nghiệm phân biệt:

$$\left(x;y\right)\in\left\{\left(1;0\right),\left(0;1\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Chú ý: Nếu các nghiệm tìm được lúc đầu không phải là 0 và 1 ta vẫn có thể tìm được ra định hướng giải toán cho bài hệ phương trình:

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 2, ta có $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Xét $y=-\sqrt{1-x^2}$, thay vào phương trình 1 ta có:

$$-x^3\sqrt{1-x^2}-2x^2\sqrt{1-x^2}^2-x\sqrt{1-x^2}^3-x^3+\sqrt{1-x^2}^3+2x^2+2\sqrt{1-x^2}^2-1=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm $x \approx 0.707106781$.
Thay $x \approx 0.707106781$ ta có $y = -\sqrt{1-x^2} \approx -0.707106781 \approx -x$
Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $x + y = 0$ hay $y = -x$.
Thay $y = -x$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} -\left(4x^4 - 4x^2 + 1\right) = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}$
Vì $\left(2x^2 - 1\right)^2 + \left[-\left(4x^4 - 4x^2 + 1\right)\right] = 0$ do đó $PT1 + \left(PT2\right)^2 = 0$ khi đó sẽ xuất hiện nhân tử $x + y = 0$.

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2 - 1 + \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + x^3y + xy^3 - x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + y - 1\right)\left(x^3 + y^3\right) = 0$$

Trường hợp 1: $x + y = 1$ hay $y = 1 - x$. Thay $y = 1 - x$ vào phương trình 2 ta được: $2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Thay $y = -x$ vào phương trình hai ta được: $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kết luận: Hệ phương trình có 4 cặp nghiệm phân biệt:

$$\left(x; y\right) \in \left\{\left(1;0\right), \left(0;1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Bình luận: Bài toán có bốn cặp nghiệm bao gồm 2 cặp nghiệm hữu tỷ và 2 cặp nghiệm vô tỷ. Và để tìm được mối quan hệ giữa hai biến số ta chú ý như sau:

- Nếu hai biến số có nghiệm vô tỷ thì chỉ cần 1 cặp nghiệm vô tỷ, ta có thể tìm ra mối quan hệ giữa hai biến số.
- Nếu hai biến số có nghiệm hữu tỷ thì ta cần ít nhất 2 cặp nghiệm hữu tỷ mới tìm ra được mối quan hệ này.

Tìm nghiệm của hệ phương trình là công việc vô cùng quan trọng, thông thường chúng ta chọn các phương trình có bậc nhất hoặc tối đa là bậc 2 đối với một biến số, ta có thể sử dụng phương pháp thế để tìm nghiệm của phương trình.

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+3+\sqrt{3x+1}=3y^2-2y+\sqrt{2y-1} \\ 15x^2+4y^2+2x+2xy-12=0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 2, ta có $x=\dfrac{-y-1\pm\sqrt{-59y^2+2y+181}}{15}$.

Chọn $x=\dfrac{-y-1+\sqrt{-59y^2+2y+181}}{15}$ thay vào phương trình 1 ta có:

$$\frac{-2y-2+2\sqrt{-59y^2+2y+181}}{15}+3+\sqrt{\frac{-3y-3+3\sqrt{-59y^2+2y+181}}{15}+1}=3y^2-2y+\sqrt{2y-1}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm $y\approx 1.485177807$

Thay $y\approx 1.485177807$ ta được $x=\dfrac{-y-1+\sqrt{-59y^2+2y+181}}{15}\approx 0.3234518715$

Chú ý rằng $3(0.3234518715)-2(1.485177807)=-2$ do đó $2y=3x+2$

Thay $2y=3x+2$ vào hai phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2x+3+\sqrt{3x+1}=3y^2-2y+\sqrt{2y-1} \\ 15x^2+4y^2+2x+2xy-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{27}{4}x^2-4x+2=0 \\ 27x^2+16x-8=0 \end{cases}$$

Như vậy ta thấy: $4.PT2+PT1=0$ ta sẽ có nhân tử $2y=3x+2$.

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{3}; y\ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} 2x+3+\sqrt{3x+1}=3y^2-2y+\sqrt{2y-1} \\ 15x^2+4y^2+2x+2xy-12=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 4\left(2x+3+\sqrt{3x+1}-3y^2+2y-\sqrt{2y-1}\right)+15x^2+4y^2+2x+2xy-12=0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2-8y^2+10x+2xy+8y+4\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+2-2y)(5x+4y)+\frac{4(3x+2-2y)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2y-1}}=0$$

$\Leftrightarrow (3x+2-2y)\left(5x+4y+\dfrac{4}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2y-1}}\right)=0$ (*)

Vì $x \ge -\dfrac{1}{3}; y \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow 5x+4y \ge -\dfrac{5}{3}+2>0$ do đó $5x+4y+\dfrac{4}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2y-1}}>0$

Vậy (*)$\Rightarrow 2y=3x+2$. Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$27x^2+16x-8=0 \Rightarrow x=\dfrac{-8+2\sqrt{70}}{27}$ (Thỏa mãn) hoặc $x=\dfrac{-8-2\sqrt{70}}{27}$ (Không thỏa mãn điều kiện).

Với $x=\dfrac{-8+2\sqrt{70}}{27}$ ta có $y=\dfrac{3x+2}{2}=\dfrac{5+\sqrt{70}}{9}$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-8+2\sqrt{70}}{27}, y=\dfrac{5+\sqrt{70}}{9}$.

Bình luận: Nút thắt lớn nhất của bài toán nằm ở chỗ chỉ ra mối quan hệ $2y=3x+2$ và thay vào hai phương trình trong hệ ban đầu.

Vấn đề 1: Để tìm ra mối liên hệ giữa 2 biến số, chúng ta có thể tư duy theo một cách khác như sau:

Trong bài có hai biểu thức chứa căn nên ta có thể đặt giả thiết:

$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2y=3x+2$$

Vấn đề 2: Để tìm ra mối liên hệ giữa 2 biến số, ta cũng có thể xuất phát từ nghiệm vô tỷ: $x \approx 0.3234518715, y \approx 1.485177807$

Nếu việc phát hiện ra mối quan hệ $2y=3x+2$ gặp trở ngại, ta có thể sử dụng máy tính để tìm ra như sau:

Gán giá trị $x \approx 0.3234518715$ vào biến A, $y \approx 1.485177807$ vào biến B.

Sử dụng công cụ TABLE với

$$F(X)=AX+B$$

- START = –3
- END = 3
- STEP = 0.5

Khi đó dựa vào bảng giá trị TABLE như hình bên ta kết luận như sau:

Tại giá trị $X=-1.5$ ta có:

$$F(X)=AX+B=0.999999999998 \approx 1$$

Do đó ta đánh giá:

X	$F(X)$
−3.5	0.353
−3	0.5148
−2.5	0.6765
−2	0.8382
−1.5	0.9999
−1	1.1617
−0.5	1.3234
0	1.4851
0.5	1.6469

$-1.5A+B=1 \Leftrightarrow -3A+2B=2 \Leftrightarrow 3A+2=2B$

Chú ý rằng:

$$\begin{cases} x \approx 0.3234518715 = A \\ y \approx 1.485177807 = B \end{cases}$$

Do đó: $2y=3x+2$

1	1.8086
1.5	1.9703
2	2.132
2.5	2.2938
3	2.4555

Vấn đề 3: Sau khi đã có mối quan hệ $2y=3x+2$, ta có thể chỉ ra mối liên kết giữa hai phương trình bằng cách tư duy như sau:

Đặt $x=100 \Rightarrow y=\dfrac{3x+2}{2}=151$. Thay vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2x+3+\sqrt{3x+1}=3y^2-2y+\sqrt{2y-1} \\ 15x^2+4y^2+2x+2xy-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -67898=0 \\ 271592=0 \end{cases}$$

Vì $\dfrac{271592}{-67898}=-4$ do đó $4.PT2+PT1=0$ ta sẽ có nhân tử $2y=3x+2$.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2-y+3(x-1)=0 \\ 2x^3+y^2+6x+1=y^3+x^2y+y \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 1 trong hệ , ta rút $x=\dfrac{-2y^2+y+3}{3}$ và thế vào phương trình thứ 2 trong hệ ta có:

$$2\left(\frac{-2y^2+y+3}{3}\right)^3+y^2+6\left(\frac{-2y^2+y+3}{3}\right)+1=y^3+\left(\frac{-2y^2+y+3}{3}\right)^2y+y$$

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x \approx 1,380199322$.

Với $y \approx 1,380199322$ ta có $x=\dfrac{-2y^2+y+3}{3} \approx 0,1900996612$ do đó $y=2x+1$.

Thay $y=2x+1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2y^2-y+3(x-1)=0 \\ 2x^3+y^2+6x+1=y^3+x^2y+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+9x-2=0 \\ -8x^3-9x^2+2x=0 \end{cases}$$

Vậy lấy $x.PT1+PT2=0$ ta sẽ thu được nhân tử $y=2x+1$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x,y \in \mathbb{R}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2y^2-y+3(x-1)=0 \\ 2x^3+y^2+6x+1=y^3+x^2y+y \end{cases}$

$\Rightarrow \left(2x^3+y^2+6x+1-y^3-x^2y-y\right)+x\left(2y^2-y+3x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow 2x^3+y^2+6x+1-y^3-x^2y-y+2xy^2-xy+3x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow -y^3+\left(2x+1\right)y^2-\left(x^2+x+1\right)y+2x^3+3x^2+3x+1=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay giá trị $x=100$ vào phương trình ta có:

$-y^3+\left(2x+1\right)y^2-\left(x^2+x+1\right)y+2x^3+3x^2+3x+1=0$

$\Rightarrow y^3-201y^2+10101y-2030301=0$, sử dụng máy tính ta được nghiệm $y=201$

Lập lược đồ Hoorne phân tích nhân tử:

y	1	-201	10101	-2030301
201	1	0	10101	0

Do đó: $y^3-201y^2+10101y-2030301=0 \Leftrightarrow \left(y-201\right)\left(y^2+10101\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y-200-1\right)\left(y^2+10000+100+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y-200-1\right)\left(y^2+100^2+100+1\right)=0$

Vì $x=100$ do đó ta có: $\left(y-2x-1\right)\left(y^2+x^2+x+1\right)=0$

Ta có: $-y^3+\left(2x+1\right)y^2-\left(x^2+x+1\right)y+2x^3+3x^2+3x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left(y-2x-1\right)\left(y^2+x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2x-1=0 \\ y^2+x^2+x+1=0 \end{array}\right. (*)$$

Do $x^2+x+1+y^2>0 \forall x,y \in \mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow y=2x+1$

Thay $y=2x+1$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$\Leftrightarrow 2\left(2x+1\right)^2-2x-1+3\left(x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 8x^2+9x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{145}}{16}$$

Với $x=\dfrac{-9+\sqrt{145}}{16} \Rightarrow y=2x+1=\dfrac{-1+\sqrt{145}}{8}$

Với $x=\dfrac{-9-\sqrt{145}}{16} \Rightarrow y=2x+1=\dfrac{-1-\sqrt{145}}{8}$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm

$$\left(x;y\right)\in\left\{\left(\frac{-9+\sqrt{145}}{16};\frac{-1+\sqrt{145}}{8}\right);\left(\frac{-9-\sqrt{145}}{16};\frac{-1-\sqrt{145}}{8}\right)\right\}$$

Bình luận: Bài toán thường gặp khó khăn trong việc tìm mối liên hệ giữa 2 giá trị x và y. Do đó bạn đọc cần phải nắm vững cách tìm mối liên hệ thông dụng nhất:
Gán giá trị $x \approx 0,1900996612$ vào biến A, $y \approx 1,380199322$ vào biến B
Rồi dùng tính năng TABLE với
$F(X) = AX + B$ của máy tính để tìm mối quan hệ.
Cách thức này an toàn và chính xác nhất

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + y^3 + 3xy^2 + (x+1)^2 = 0 \\ 3x^2 + x + y + 1 = 0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ 2 trong hệ , ta rút $y = -3x^2 - x - 1$ và thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$2x^3 + (-3x^2 - x - 1)^3 + 3x(-3x^2 - x - 1)^2 + (x+1)^2 = 0$

SHIFT CALC với $x = 0$ ta thu được nghiệm $x = 0 \Rightarrow y = -1$

SHIFT CALC với $x = 1$ ta thu được nghiệm $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $y = -2x - 1$

Thay $y = -2x - 1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 + 3xy^2 + (x+1)^2 = 0 \\ 3x^2 + x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^3 + x^2 - x = 0 \\ 3x^2 - x = 0 \end{cases}$$

Đến đây khá khó khăn phát hiện ra mối quan hệ giữa 2 phương trình nhưng nếu chúng ta để ý kỹ ta sẽ nhận thấy

$(-2x-1)(3x^2 - x) = -6x^3 - x^2 + x$ mà $y = -2x - 1$

Vậy lấy $y.PT2 + PT1 = 0$ ta sẽ thu được nhân tử $y = -2x - 1$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2x^3 + y^3 + 3xy^2 + (x+1)^2 = 0 \\ 3x^2 + x + y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x^3 + y^3 + 3xy^2 + (x+1)^2 + y(3x^2 + x + y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + y^3 + 3xy^2 + x^2 + 2x + 1 + 3x^2y + xy + y^2 + y = 0$

$\Leftrightarrow y^3 + (3x+1)y^2 + (3x^2 + x + 1)y + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay giá trị $x = 100$ vào phương trình ta có:

$y^3 + (3x+1)y^2 + (3x^2 + x + 1)y + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow y^3 + 301y^2 + 30101y + 2010201 = 0$, sử dụng máy tính ta được nghiệm $y = -201$

Lập lược đồ Hoorne phân tích nhân tử:

y	1	301	30101	2010201
−201	1	100	10001	0

Do đó: $y^3 + 301y^2 + 30101y + 2010201 = 0 \Leftrightarrow (y+201)(y^2 + 100y + 10001) = 0$

$\Leftrightarrow (y + 2.100 + 1)(y^2 + 100y + 100^2 + 1) = 0$

Vì $x = 100$ do đó ta có: $(y + 2x + 1)(y^2 + xy + x^2 + 1) = 0$

Ta có: $y^3 + (3x+1)y^2 + (3x^2 + x + 1)y + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 2x + 1)(y^2 + xy + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 2x + 1 = 0 \\ y^2 + x^2 + xy + 1 = 0 \end{array}\right.$ (*)

Do $x^2 + xy + 1 + y^2 > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow y = -2x - 1$

Thay $y = -2x - 1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$3x^2 + x - 2x - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 = -1$

Với $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = -2x - 1 = \dfrac{-5}{3}$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm $(x; y) \in \left\{(0; -1); \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{-5}{3}\right)\right\}$

Bình luận: Bài toán có những điểm cần chú ý:

- Thứ nhất: mối quan hệ giữa 2 nghiệm: giả sử $y = ax + b$ khi đó ta coi là đường thẳng đi qua 2 điểm của đồ thị $(0; -1)$ và $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$ khi đó ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} b=-1 \\ -\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3}a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ vậy là đã tìm được mối quan hệ giữa 2 giá trị x và y của hệ phương trình

- Thứ 2: Sau khi thay $y=-2x-1$ vào 2 phương trình trong hệ nhận thấy khá khó khăn để tìm mối quan hệ. Nếu khi cảm thấy khó khăn như vậy chúng ta nên thử thay ngược giá trị $x=\dfrac{-1-y}{2}$ các bạn sẽ thấy dễ dàng tìm mối quan hệ này hơn

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+2xy^2+2x^2+2x+4=0 \\ x^2+x-y+1=0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ 2 trong hệ , ta rút $y=x^2+x+1$ và thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$x^3-\left(x^2+x+1\right)^3+2x\left(x^2+x+1\right)^2+2x^2+2x+4=0$

SHIFT CALC với $x=0,5$ ta thu được nghiệm $x=1 \Rightarrow y=3$

SHIFT CALC với $x=-0,5$ ta thu được nghiệm $x=-1 \Rightarrow y=1$

Giả sử mối quan hệ giữa x và y là: $y=ax+b$

Khi đó a và b là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $y=x+2$

Thay $y=x+2$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} x^3-y^3+2xy^2+2x^2+2x+4=0 \\ x^2+x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+4x^2-2x-4=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$$

Đến đây khá khó khăn phát hiện nhanh ra mối quan hệ giữa 2 phương trình nhưng nếu chúng ta để ý kỹ ta sẽ nhận thấy

$2x^3+4x^2-2x-4=\left(x+2\right)\left(2x^2-2\right)=2\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)$ mà $y=x+2$

Vậy lấy $-2y.PT2+PT1=0$ ta sẽ thu được nhân tử $y=x+2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 2xy^2 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \\ x^2 + x - y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(x^3 - y^3 + 2xy^2 + 2x^2 + 2x + 4\right) - 2y\left(x^2 + x - y + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2xy^2 + 2x^2 + 2x + 4 - 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow -y^3 + y^2\left(2x + 2\right) + y\left(-2x^2 - 2x - 2\right) + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow y^3 - \left(2x + 2\right)y^2 + \left(2x^2 + 2x + 2\right)y - \left(x^3 + 2x^2 + 2x + 4\right) = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay giá trị $x = 100$ vào phương trình ta có:

$\Leftrightarrow y^3 - \left(2x + 2\right)y^2 + \left(2x^2 + 2x + 2\right)y - \left(x^3 + 2x^2 + 2x + 4\right) = 0$

$\Rightarrow y^3 - 202y^2 + 20202y - 1020204 = 0$, sử dụng máy tính ta được nghiệm $y = 102$

Lập lược đồ Hoorne phân tích nhân tử:

y	1	-202	20202	-1020204
102	1	-100	10002	0

Do đó: $y^3 - 202y^2 + 20202y - 1020204 = 0 \Leftrightarrow \left(y - 102\right)\left(y^2 - 100y + 10002\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(y - 100 - 2\right)\left(y^2 - 100y + 100^2 + 2\right) = 0$

Vì $x = 100$ do đó ta có: $\left(y - x - 2\right)\left(y^2 - xy + x^2 + 2\right) = 0$

Ta có: $y^3 - \left(2x + 2\right)y^2 + \left(2x^2 + 2x + 2\right)y - \left(x^3 + 2x^2 + 2x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(y - x - 2\right)\left(y^2 - xy + x^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x - 2 = 0 \\ y^2 - xy + x^2 + 2 = 0 \end{array}\right.$ (*)

Do $y^2 - xy + x^2 + 2 > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow y = x + 2$

Thay $y = x + 2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$x^2 + x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - x - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $x = 1 \Rightarrow y = x + 2 = 3$

Với $x = -1 \Rightarrow y = x + 2 = 1$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm $\left(x; y\right) \in \left\{\left(1; 3\right); \left(-1; 1\right)\right\}$

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y - xy^3 - 5y^4 - 4x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình 2, ta có $y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$. Xét $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$, thay vào phương trình 1 ta có:

$$x^3\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}-x\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^3}-5\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2-4x^2\left(\frac{1-x^2}{2}\right)+3x^2+3\left(\frac{1-x^2}{2}\right)-1=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm $x=0,5773502629$

$$\Rightarrow y=\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}=0,5773502723\approx x$$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $x=y$

Thay $x=y$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases}-9x^4+6x^2-1=0\\3x^2=1\end{cases}$

Vì $\left(3x^2-1\right)^2+\left(-9x^4+6x^2-1\right)=0$ do đó $PT1+\left(PT2\right)^2=0$ khi đó sẽ xuất hiện nhân tử $x=y$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}x^3y-xy^3-5y^4-4x^2y^2+3x^2+3y^2-1=0\\x^2+2y^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x^3y-xy^3-5y^4-4x^2y^2+3x^2+3y^2-1\right)+\left(x^2+2y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3y-xy^3-5y^4-4x^2y^2+3x^2+3y^2-1\right)+x^4+4y^4+1+4x^2y^2-2x^2-4y^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^4-y^4-y^2+x^3y-xy^3+x^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)+xy\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2+xy+1\right)=0\ (*)$$

Do $x^2+y^2+xy+1>0\forall x;y\in R$ nên (*) $\Leftrightarrow x^2-y^2=0\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow x=\pm y$

Trường hợp 1: $x=y$ Thay vào phương trình 2 ta được:

$$x^2+2y^2=1\Leftrightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Trường hợp 2: $x=-y$ Thay vào phương trình 2 ta được:

$$x^2+2y^2=1\Leftrightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kết luận: Hệ phương trình có 4 cặp nghiệm phân biệt:

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2-x^2y+y^2+xy=y^3+3x^2+x-2 \\ x^2-y+3x-1=0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ 2 trong hệ , ta rút $y=x^2+3x-1$ và thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$-\left(x^2+3x-1\right)^3+\left(x^2+3x-1\right)^2\left(x+1\right)+\left(x^2+3x-1\right)\left(x-x^2\right)-3x^2-x+2=0$

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x=0{,}7320508076$

$\Rightarrow y=x^2+3x-1=1{,}732050808\approx x+1$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $y=x+1$

Thay $y=x+1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} xy^2-x^2y+y^2+xy=y^3+3x^2+x-2 \\ x^2-y+3x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -x^3-3x^2+2=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{cases}$$

Đến đây khá khó khăn phát hiện nhanh ra mối quan hệ giữa 2 phương trình nhưng nếu chúng ta để ý kỹ ta sẽ nhận thấy

$-x^3-3x^2+2=-\left(x+1\right)\left(x^2+2x-2\right)$

Vậy lấy $\left(x+1\right).PT2+PT1=0$ ta sẽ thu được nhân tử $y=x+1$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} xy^2-x^2y+y^2+xy=y^3+3x^2+x-2 \\ x^2-y+3x-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow\left(xy^2-x^2y+y^2+xy-y^3-3x^2-x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x^2-y+3x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow xy^2-x^2y+y^2+xy-y^3-3x^2-x+2+x^3-xy+3x^2-x+x^2-y+3x-1=0$

$\Leftrightarrow x^3-y^3+xy^2-x^2y+1+x^2+y^2+x-y=0$

$\Leftrightarrow x^3-x^2\left(y-1\right)+x\left(y^2+1\right)-y^3+y^2-y+1=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay giá trị $y=100$ vào phương trình ta có:

$\Leftrightarrow x^3 - x^2(y-1) + x(y^2+1) - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 99x^2 + 10001x - 990099 = 0$, sử dụng máy tính ta được nghiệm $x = 99$

Lập lược đồ Hoorne phân tích nhân tử:

x	1	-99	10001	-990099
99	1	0	10001	0

Do đó: $x^3 - 99x^2 + 10001x - 990099 = 0 \Leftrightarrow (x-99)(x^2+10001) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 100 + 1)(x^2 + 100^2 + 1) = 0$

Vì $y = 100$ do đó ta có: $(x - y + 1)(x^2 + y^2 + 1) = 0$

Ta có: $x^3 - x^2(y-1) + x(y^2+1) - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x^2+y^2+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{array}\right. (*)$$

Do $x^2 + y^2 + 1 > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$x^2 - y + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

Với $x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = x + 1 = \sqrt{3}$

Với $x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = x + 1 = -\sqrt{3}$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm $(x;y) \in \left\{\left(-1+\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(-1-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\right\}$

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - xy + 7x - 3y - 4 = 0 \\ x^2 - x + \sqrt{2x+1} = y^2 + y + \sqrt{y+2} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ nhất trong hệ, ta có $x = \dfrac{y - 7 \pm \sqrt{-15y^2 + 34y + 113}}{8}$.

Chọn $x = \dfrac{y - 7 + \sqrt{-15y^2 + 34y + 113}}{8}$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$$\left(\frac{y - 7 + \sqrt{-15y^2 + 34y + 113}}{8}\right)^2 - \frac{y - 7 + \sqrt{-15y^2 + 34y + 113}}{8}$$

$$+\sqrt{\frac{y-3+\sqrt{-15y^2+34y+113}}{4}}=y^2+y+\sqrt{y+2}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được hai nghiệm đó là:

$$\begin{cases} y=-1 \\ y=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y-7+\sqrt{-15y^2+34y+113}}{8}=0 \\ x=\dfrac{y-7+\sqrt{-15y^2+34y+113}}{8}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ta tìm được 2 cặp giá trị $(0;-1)\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Giả sử mối quan hệ giữa x và y là: $y=ax+b$

Khi đó a và b là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} b=-1 \\ \frac{1}{3}a+b=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $y=2x-1$

Thay $y=2x-1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-xy+7x-3y-4=0 \\ x^2-x+\sqrt{2x+1}=y^2+y+\sqrt{y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-2x=0 \\ -3x^2+x=0 \end{cases}$$

Như vậy ta thấy: $2.PT2+PT1=0$ ta sẽ có nhân tử $y=2x-1$.

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{2}; y\ge -2$.

Ta có: $\begin{cases} 4x^2+y^2-xy+7x-3y-4=0 \\ x^2-x+\sqrt{2x+1}=y^2+y+\sqrt{y+2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(4x^2+y^2-xy+7x-3y-4\right)+2\left(x^2-x+\sqrt{2x+1}-y^2-y-\sqrt{y+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2-xy+7x-3y-4+2x^2-2x+2\sqrt{2x+1}-2y^2-2y-2\sqrt{y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-y^2-xy+5x-5y-4+2\sqrt{2x+1}-2\sqrt{y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-(y-5)x-y^2-5y-4+2\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y+2}\right)=0$$

Chú ý: Đến đây nếu các bạn cảm thấy khó khăn khi phân tích nhân tử thành phần $6x^2-(y-5)x-y^2-5y-4$ thì có 2 cách.

- Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2 để tìm mối quan hệ

- Dùng máy tính để phân tích nhân tử bằng tính năng thay $y=100$ và dung tính năng SHIFT CALC để hóa giải.

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)(3x+y+4)+2\frac{2x+1-y-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{y+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)(3x+y+4)+2\frac{2x-y-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{y+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)\left[3x+y+4+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{y+2}}\right]=0\ (*)$$

Vì $x\ge -\frac{1}{2}; y\ge -2 \Rightarrow 3x+y+4\ge -\frac{3}{2}-2+4>0$ do đó

$$3x+y+4+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{y+2}}>0$$

Vậy (*) $\Rightarrow y=2x-1$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được:

$$4x^2+y^2-xy+7x-3y-4=0 \Leftrightarrow 6x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=0 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $x=0 \Rightarrow y=2x-1=-1$

Với $x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=2x-1=-\frac{1}{3}$

Kết luận: Hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(x;y)\in\left\{(0;-1);\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$

Bài 10: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases} x^2-x+2\sqrt{x-1}=y^2+2y-2+\sqrt{2y-1} \\ 4x^2+2y^2+2x+3y-11=0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}$.

Chọn $x=\dfrac{-1+\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}\right)^2-\frac{-1+\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}+2\sqrt{\frac{-5+\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}}$$

$$-y^2-2y+2-\sqrt{2y-1}=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $y=0,7769839649$

Thay vào $x=\dfrac{-1+\sqrt{-8y^2-12y+45}}{4}\approx 1,138491983$

Đến đây chúng ta khó tìm ra mối quan hệ vì các hệ số không giống nhau ở phần sau dấu phẩy hoặc cộng trừ với nhau ra mối quan hệ là số nguyên. Nhưng nếu các bạn quan sát kỹ thì nhận thấy có khả năng

$2\sqrt{x-1}=\sqrt{2y-1}\Rightarrow 4x-2y-3=0$

Thay giá trị nghiệm vừa tìm được vào biểu thức:

$4.1,138491983-2.0,7769839649-3\approx 2,2.10^{-9}\approx 0$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $4x-2y-3=0\Rightarrow y=2x-\dfrac{3}{2}$

Thay $y=2x-\dfrac{3}{2}$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases}x^2-x+2\sqrt{x-1}=y^2+2y-2+\sqrt{2y-1}\\4x^2+2y^2+2x+3y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+x+\dfrac{11}{4}=0\\12x^2-4x-11=0\end{cases}$$

Như vậy ta thấy: $4.PT1+PT2=0$ ta sẽ có nhân tử $y=2x-\dfrac{3}{2}$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x\ge 1;y\ge\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}x^2-x+2\sqrt{x-1}=y^2+2y-2+\sqrt{2y-1}\\4x^2+2y^2+2x+3y-11=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\left(4x^2+2y^2+2x+3y-11\right)+4\left(x^2-x+2\sqrt{x-1}-y^2-2y+2-\sqrt{2y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2y^2+2x+3y-11+4x^2-4x+8\sqrt{x-1}-4y^2-8y+8-4\sqrt{2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-2y^2-2x-y-3+8\sqrt{x-1}-4\sqrt{2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-2x-2y^2-y-3+4\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}\right)=0$$

Chú ý: Đến đây nếu các bạn cảm thấy khó khăn khi phân tích nhân tử thành phần $8x^2-2x-2y^2-y-3$ thì nên dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2 để tìm mối quan hệ vì mối quan hệ nghiệm khá lẻ nên khá khó khăn với việc phát hiện tìm mối quan hệ bằng tính năng SHIFT CALC

$$\Leftrightarrow (4x-2y-3)(2x+y+1)+4.\frac{4x-2y-3}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (4x-2y-3)\left[2x+y+1+\frac{4}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}}\right]=0 \ (*)$$

Vì $x\ge 1; y\ge \frac{1}{2}\Rightarrow 2x+y+1>0$ do đó $2x+y+1+\frac{4}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}}>0$

Vậy $(*)\Rightarrow 4x-2y-3=0\Rightarrow y=2x-\frac{3}{2}$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được:

$$4x^2+2y^2+2x+3y-11=0\Leftrightarrow 12x^2-4x-11=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{34}}{6}\\ x=\frac{1-\sqrt{34}}{6}\end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $x=\frac{1+\sqrt{34}}{6}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $x=\frac{1+\sqrt{34}}{6}\Rightarrow y=2x-\frac{3}{2}=\frac{-7+2\sqrt{34}}{6}$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{34}}{6}, y=\frac{-7+2\sqrt{34}}{6}$.

Bài 11: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases} 2x^2-x+\sqrt{2x+1}=y^2-y+\sqrt{2y-1}\\ xy-x^2-2y^2+7x+2=0\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\frac{x\pm\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}$.

Chọn $y=\frac{x+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$2x^2-x+\sqrt{2x+1}-\left(\frac{x+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}\right)^2+\frac{x+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}$$

$$-\sqrt{\frac{x-2+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{2}}=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}=1 \\ y=\dfrac{x+\sqrt{-7x^2+56x+16}}{4}=3 \end{cases}$$

Ta tìm được 2 cặp giá trị $(0;1)(2;3)$

Giả sử mối quan hệ giữa x và y là: $y=ax+b$

Khi đó a và b là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $y=x+1$

Thay $y=x+1$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2x^2-x+\sqrt{2x+1}=y^2-y+\sqrt{2y-1} \\ xy-x^2-2y^2+7x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ -2x^2+4x=0 \end{cases}$$

Như vậy ta thấy: $2.PT1+PT2=0$ ta sẽ có nhân tử $y=x+1$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x \ge -\dfrac{1}{2}; y \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} 2x^2-x+\sqrt{2x+1}=y^2-y+\sqrt{2y-1} \\ xy-x^2-2y^2+7x+2=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2\left(2x^2-x+\sqrt{2x+1}-y^2+y-\sqrt{2y-1}\right)+xy-x^2-2y^2+7x+2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+2\sqrt{2x+1}-2y^2+2y-2\sqrt{2y-1}+xy-x^2-2y^2+7x+2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4y^2+xy+5x+2y+2+2\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+(y+5)x-4y^2+2y+2+2\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y-1}\right)=0$$

Chú ý: Đến đây nếu các bạn cảm thấy khó khăn khi phân tích nhân tử thành phần $3x^2+(y+5)x-4y^2+2y+2$ thì có thể dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2 để tìm mối quan hệ hoặc các bạn có thể tìm mối quan hệ bằng tính năng SHIFT CALC

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(3x+4y+2)+2\left(\frac{2x+1-2y+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left[3x+4y+2+\frac{4}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}\right]=0 \ (*)$$

Vì $x \ge -\dfrac{1}{2}; y \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x+4y+2>0$ do đó $3x+4y+2+\dfrac{4}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}>0$

Vậy (*) $\Rightarrow x-y+1=0 \Rightarrow y=x+1$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được:

$xy-x^2-2y^2+7x+2=0 \Leftrightarrow -2x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (Thỏa mãn điều kiện)

Với $x=0 \Rightarrow y=x+1=1$

Với $x=2 \Rightarrow y=x+1=3$

Kết luận: Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x;y) \in \{(0;1);(2;3)\}$

Bài 12: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{3x+1}=y^2+2y+2+2\sqrt{y+1} \\ 2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $x=\dfrac{5y+2\pm\sqrt{41y^2+76y+20}}{4}$.

Chọn $x=\dfrac{5y+2+\sqrt{41y^2+76y+20}}{4}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$2\left(\frac{5y+5+\sqrt{41y^2+74y+49}}{4}\right)^2+\frac{5y+5+\sqrt{41y^2+74y+49}}{4}$$
$$+\sqrt{\frac{15y+19+\sqrt{41y^2+74y+49}}{4}}-y^2-2y-2-2\sqrt{y+1}=0$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $y=-0,2479539765$

Thay vào $x=\dfrac{5y+2+\sqrt{41y^2+76y+20}}{4}\approx 0,669394698$

Đến đây chúng ta khó tìm ra mối quan hệ vì các hệ số không giống nhau ở phần sau dấu phẩy hoặc cộng trừ với nhau ra mối quan hệ là số nguyên. Nhưng nếu các bạn quan sát kỹ thì nhận thấy có khả năng

$\sqrt{3x+1}=2\sqrt{y+1} \Rightarrow 3x-4y-3=0$

Thay giá trị nghiệm vừa tìm được vào biểu thức:

$3.0,669394698-4.(-0,2479539765)-3\approx 0$

Do đó mối quan hệ biểu thức cần tìm là $3x-4y-3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

Ngoài ra **:** Để tìm ra mối liên hệ giữa 2 biến số, ta cũng có thể xuất phát từ nghiệm vô tỷ: $x\approx 0,669394698, y\approx -0,2479539765$

Nếu việc phát hiện ra mối quan hệ $3x-4y-3=0$ gặp trở ngại, ta có thể sử dụng máy tính để tìm ra như sau:

Gán giá trị $x\approx 0,669394698$ vào biến A, $y=-0,2479539765$ vào biến B Và Sử dụng công cụ TABLE với hàm số F(X) = AX + B để xét nghiệm của phương trình là bao nhiêu.

Sau khi tìm được mối quan hệ đó ta thay $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases}2x^2+x+\sqrt{3x+1}=y^2+2y+2+2\sqrt{y+1}\\2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{23}{16}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{17}{16}=0\\-\frac{23}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{17}{8}=0\end{cases}$$

Như vậy ta thấy: $2.PT1+PT2=0$ ta sẽ có nhân tử $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{3}; y\ge -1$.

Ta có: $\begin{cases}2x^2+x+\sqrt{3x+1}=y^2+2y+2+2\sqrt{y+1}\\2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0\end{cases}$

$$\Rightarrow 2.\left(2x^2+x+\sqrt{3x+1}-y^2-2y-2-2\sqrt{y+1}\right)+2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x+2\sqrt{3x+1}-2y^2-4y-4-4\sqrt{y+1}+2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-4y^2-5xy-11y-6+2\sqrt{3x+1}-4\sqrt{y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-5xy-4y^2-11y-6+2\left(\sqrt{3x+1}-2\sqrt{y+1}\right)=0$$

Chú ý: Cần dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2 để phân tích phần đa thức $6x^2-5xy-4y^2-11y-6$ thành nhân tử. Không nên dùng tính năng SHIFT CALC của máy tính để giải vì mối quan hệ nghiệm khá lẻ

$$\Leftrightarrow (3x-4y-3)(2x+y+2)+2\left(\sqrt{3x+1}-2\sqrt{y+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-4y-3)(2x+y+2)+2\left(\frac{3x+1-4y-4}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt{y+1}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow (3x-4y-3)\left[2x+y+2+\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt{y+1}}\right]=0$ (*)

Vì $x \ge -\dfrac{1}{3}; y \ge -1$ do đó $2x+y+2+\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt{y+1}}>0$

Vậy (*)$\Rightarrow 3x-4y-3=0 \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được:

$$2x^2-2y^2-5xy-2x-7y-2=0 \Rightarrow 23x^2+5x-17=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5+4\sqrt{26}}{23} \\ x=\dfrac{-5-4\sqrt{26}}{23} \end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $x=\dfrac{-5+4\sqrt{26}}{23}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $x=\dfrac{-5+4\sqrt{26}}{23} \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-21+3\sqrt{26}}{23}$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-5+4\sqrt{26}}{23}$ và $y=\dfrac{-21+3\sqrt{26}}{23}$

Bài 13: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases} 9x^2+4y^2=4\sqrt[3]{36x^2-12x} \\ 27x^2-24x+12=8y\sqrt{3x-1} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $x>\dfrac{1}{3}$ do đó từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\dfrac{27x^2-24x+12}{8\sqrt{3x-1}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ: $9x^2+4\left(\dfrac{27x^2-24x+12}{8\sqrt{3x-1}}\right)^2=4\sqrt[3]{36x^2-12x}$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=\dfrac{2}{3}$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$F(X)=9X^2+4\left(\dfrac{27X^2-24X+12}{8\sqrt{3X-1}}\right)^2-4\sqrt[3]{36X^2-12X}$

X	$F(X)$
0,61	0,045245
0,62	0,0300

Xét các giá trị:

- START = 0,61
- END = 0,7
- STEP = 0.01

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 0,6667 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy nghiệm $x=\frac{2}{3}$ chính là nghiệm kép của phương trình.

0,63	0,01821
0,64	$9,46.\ 10^{-3}$
0,65	$3,635.\ 10^{-3}$
0,66	$5,732.\ 10^{-4}$
0,67	$1,409.\ 10^{-4}$
0,68	$2,223.\ 10^{-3}$
0,69	$6,717.\ 10^{-3}$
0,7	0,0135

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=\frac{2}{3}$ vào biểu thức của y ta thấy: $y=\frac{27x^2-24x+12}{8\sqrt{3x-1}}=1$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức chứa căn $\sqrt{3x-1}=1=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{3x-1}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{3x-1}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=\frac{2}{3}$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(3x-2)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x>\frac{1}{3}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}9x^2+4y^2=4\sqrt[3]{36x^2-12x}\\27x^2-24x+12=8y\sqrt{3x-1}\end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$\Rightarrow 9x^2+4y^2+27x^2-24x+12-8y\sqrt{3x-1}=4\sqrt[3]{36x^2-12x}$

$\Leftrightarrow 36x^2+4y^2-24x+12-8y\sqrt{3x-1}=4\sqrt[3]{36x^2-12x}$

$\Leftrightarrow 9x^2+y^2-6x+3-2y\sqrt{3x-1}=\sqrt[3]{36x^2-12x}$

$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{3x-1}+3x-1+9x^2-9x+4=\sqrt[3]{36x^2-12x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{3x-1}\right)^2+9x^2-9x+4=\sqrt[3]{36x^2-12x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(3x-2\right)^2+3x=\sqrt[3]{36x^2-12x}$ (*)

Do $\left(y-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(3x-2\right)^2\geq 0\forall x$ nên $\sqrt[3]{36x^2-12x}\geq 3x$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$\sqrt[3]{36x^2-12x}=\sqrt[3]{3x\left(6x-2\right).2}\leq \dfrac{3x+6x-2+2}{3}=3x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x=6x-2=2\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{3x-1}=0 \\ 3x-2=0 \\ 3x=\sqrt[3]{36x^2-12x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=1 \end{cases}$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{2}{3}$ và $y=1$

Bài 14: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases} 6x^2+4y^2-7x-\dfrac{13}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x} \\ 3x^2+8x+15=4y\sqrt{3x+8} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $x\geq \dfrac{-8}{3}$. Nhưng thay giá trị $x=-\dfrac{8}{3}$ vào phương trình 2 ta thấy: $\dfrac{59}{3}=0$ (Vô lý) do đó $x\neq -\dfrac{8}{3}$ từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\dfrac{3x^2+8x+15}{4\sqrt{3x+8}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ: $6x^2+4\left(\dfrac{3x^2+8x+15}{4\sqrt{3x+8}}\right)^2-7x-\dfrac{13}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=\dfrac{1}{3}$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F\left(X\right)=6X^2+4\left(\frac{3X^2+8X+15}{4\sqrt{3X+8}}\right)^2-7X-\frac{13}{3}-3\sqrt[3]{3X^2+2X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0,3

X	$F\left(X\right)$
0,3	0,01322
0,31	$6{,}457.\ 10^{-3}$
0,32	$2{,}101.\ 10^{-3}$
0,33	$1{,}309.\ 10^{-4}$
0,34	$5{,}224.\ 10^{-4}$

- END = 0,39
- STEP = 0.01

0,35	$3,256.\ 10^{-3}$
0,36	$8,315.\ 10^{-3}$
0,37	0,01568
0,38	0,025345
0,39	0,0372866

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 0,3334 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=\frac{1}{3}$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=\frac{1}{3}$ vào biểu thức của y ta thấy: $y=\frac{3x^2+8x+15}{4\sqrt{3x+8}}=\frac{3}{2}$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức chứa căn $\sqrt{3x+8}=3=2y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $2y-\sqrt{3x+8}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(2y-\sqrt{3x+8}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(3x-1)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x\geq\frac{-8}{3}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}6x^2+4y^2-7x-\frac{13}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}\\3x^2+8x+15=4y\sqrt{3x+8}\end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$$\Rightarrow 6x^2+4y^2-7x-\frac{13}{3}+3x^2+8x+15=3\sqrt[3]{3x^2+2x}+4y\sqrt{3x+8}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+4y^2+x+\frac{32}{3}-4y\sqrt{3x+8}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-4y\sqrt{3x+8}+3x+8+9x^2-2x+\frac{8}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-4y\sqrt{3x+8}+3x+8+9x^2-6x+1+4x+\frac{5}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{3x+8}\right)^2+(3x-1)^2+\left(4x+\frac{5}{3}\right)=3\sqrt[3]{3x^2+2x}\quad (*)$$

Do $\left(2y-\sqrt{3x+8}\right)^2+\left(3x-1\right)^2\ge 0\forall x$ nên $3\sqrt[3]{3x^2+2x}\ge 4x+\dfrac{5}{3}$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$3\sqrt[3]{3x^2+2x}=\sqrt[3]{9x.\left(3x+2\right).3}\le\frac{9x+3x+2+3}{3}=4x+\frac{5}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 9x=3x+2=3\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{3x+8}=0\\3x-1=0\\4x+\dfrac{5}{3}=3\sqrt[3]{3x^2+2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{1}{3}$ và $y=\dfrac{3}{2}$

Bài 15: Giải hệ phương trình: : $\begin{cases}x^2+y^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}\\2x^2+3x+3=2y\sqrt{x^2+3x}\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -3\end{array}\right.$. Nhưng thay giá trị $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$ vào phương trình 2 ta đều thấy vô lý do đó $x\ne 0;x\ne -3$ nên từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ: $x^2+\left(\dfrac{2x^2+3x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\right)^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F\left(X\right)=X^2+\left(\frac{2X^2+3X+3}{2\sqrt{X^2+3X}}\right)^2-\frac{5}{3}X+\frac{2}{3}$$
$$-2\sqrt[3]{6X^2+2X}$$

Xét các giá trị:

X	$F\left(X\right)$
0,5	0,9403442
0,6	0,55778437
0,7	0,295865
0,8	0,125474
0,9	0,030187

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

1	0
1,1	0,028452
1,2	0,111178
1,3	0,24511
1,4	0,428058

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=1$ vào biểu thức của y ta thấy: $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}=2$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức chứa căn $\sqrt{x^2+3x}=2=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{x^2+3x}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-1)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -3 \end{array}\right.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x} \\ 2x^2+3x+3=2y\sqrt{x^2+3x} \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}+2x^2+3x+3=2y\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt[3]{6x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{x^2+3x}+3x^2+\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{x^2+3x}+x^2+3x+2x^2-\frac{5}{3}x+\frac{11}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+2\left(x^2-2x+1\right)+\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+2(x-1)^2+\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}\ (*)$$

Do $\left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+2\left(x-1\right)^2\ge 0\forall x;y$ nên $2\sqrt[3]{6x^2+2x}\ge\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$2\sqrt[3]{6x^2+2x}=\sqrt[3]{4x.\left(3x+1\right).4}\le\frac{4x+3x+1+4}{3}=\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=3x+1=4\Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}y-\sqrt{x^2+3x}=0\\x-1=0\\\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}=2\sqrt[3]{6x^2+2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=2$

Bài 16: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}12x^2+y^2-10x+12=6\sqrt[3]{8x^2+12x}\\4x^2+3x-\frac{1}{2}=y\sqrt{4x^2+2x}\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le-\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Nhưng thay giá trị $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$ vào phương trình 2 ta đều thấy vô lý do đó $x\ne 0;x\ne-\frac{1}{2}$ nên từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\frac{4x^2+3x-\frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2+2x}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$12x^2+\left(\frac{4x^2+3x-\frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2+2x}}\right)^2-10x+12=6\sqrt[3]{8x^2+12x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=\frac{1}{2}$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

X	$F\left(X\right)$
0	ERROR
0,1	4,712064

$$F(X)=12X^2+\left(\frac{4X^2+3X-\frac{1}{2}}{\sqrt{4X^2+2X}}\right)^2-10X+12$$
$$-6\sqrt[3]{8X^2+12X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0
- END = 0,9
- STEP = 0.1

0,2	2,225275
0,3	0,909763
0,4	0,215978
0,5	0
0,6	0,20280
0,7	0,794300
0,8	1,757012
0,9	3,07981

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 0,5 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=\frac{1}{2}$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=\frac{1}{2}$ vào biểu thức của y ta thấy: $y=\frac{4x^2+3x-\frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2+2x}}=\sqrt{2}$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{4x^2+2x}=\sqrt{2}=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{4x^2+2x}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{4x^2+2x}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(2x-1)^2$

Nhưng khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{4x^2+2x}$ chỉ là 1 nên cần phải nhân phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng với phương trình thứ nhất trong hệ để có $\left(y-\sqrt{4x^2+2x}\right)^2$ và $(2x-1)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 12x^2 + y^2 - 10x + 12 = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x} \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{1}{2} = y\sqrt{4x^2 + 2x} \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình thứ hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$$\Rightarrow 12x^2 + y^2 - 10x + 12 + 2\left(4x^2 + 3x - \frac{1}{2} - y\sqrt{4x^2 + 2x}\right) = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + y^2 - 10x + 12 + 8x^2 + 6x - 1 - 2y\sqrt{4x^2 + 2x} = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y\sqrt{4x^2 + 2x} + 20x^2 - 4x + 11 = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y\sqrt{4x^2 + 2x} + 4x^2 + 2x + 16x^2 - 6x + 11 = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \sqrt{4x^2 + 2x}\right)^2 + (4x - 2)^2 + 10x + 7 = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x} \quad (*)$$

Do $\left(y - \sqrt{4x^2 + 2x}\right)^2 + (4x - 2)^2 \geq 0 \forall x; y$ nên $6\sqrt[3]{8x^2 + 12x} \geq 10x + 7$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$6\sqrt[3]{8x^2 + 12x} = 3\sqrt[3]{8x.(2x + 3).4} \leq 8x + 2x + 3 + 4 = 10x + 7$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 8x = 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y - \sqrt{4x^2 + 2x} = 0 \\ 4x - 2 = 0 \\ 10x + 7 = 6\sqrt[3]{8x^2 + 12x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{1}{2}$ và $y = \sqrt{2}$

Bài 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2 = 3\sqrt[3]{3x^2 - 2x} \\ 11x^2 + 20x + 1 = 4y\sqrt{x^2 + 2x} + 4x\sqrt{3x^2 + 2x - 1} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $\left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x \leq -2 \end{array}\right.$. Nhưng thay giá trị $x = -2$ vào phương trình 2 ta đều thấy vô lý do đó $x \neq -2$ nên từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y=\dfrac{11x^2+20x+1-4x\sqrt{3x^2+2x-1}}{4\sqrt{x^2+2x}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$x^2+\left(\frac{11x^2+20x+1-4x\sqrt{3x^2+2x-1}}{4\sqrt{x^2+2x}}\right)^2-8x-2=3\sqrt[3]{3x^2-2x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=X^2+\left(\frac{11X^2+20X+1-4X\sqrt{3X^2+2X-1}}{4\sqrt{X^2+2X}}\right)^2$$
$$-8X-2-3\sqrt[3]{3X^2-2X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0,5	3,3614
0,6	3,1692
0,7	0,723344
0,8	0,218374
0,9	0,045731
1	0
1,1	0,037642
1,2	0,14149
1,3	0,30298
1,4	0,5173216

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=1$ vào biểu thức của y ta thấy:

$$y=\frac{11x^2+20x+1-4x\sqrt{3x^2+2x-1}}{4\sqrt{x^2+2x}}=2\sqrt{3}$$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{3}=\dfrac{y}{2}$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-2\sqrt{x^2+2x}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-2\sqrt{x^2+2x}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-1)^2$

Nhưng vẫn còn thành phần $\sqrt{3x^2+2x-1}=2=2x$ do đó cần tạo ra hằng đẳng thức $\left(2x-\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-8x-2=3\sqrt[3]{3x^2-2x} \\ 11x^2+20x+1=4y\sqrt{x^2+2x}+4x\sqrt{3x^2+2x-1} \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-2+11x^2+20x+1=3\sqrt[3]{3x^2-2x}+4y\sqrt{x^2+2x}+4x\sqrt{3x^2+2x-1}$

$\Leftrightarrow 12x^2+y^2+12x-1=3\sqrt[3]{3x^2-2x}+4y\sqrt{x^2+2x}+4x\sqrt{3x^2+2x-1}$

$\Leftrightarrow 12x^2+y^2+12x-1-4y\sqrt{x^2+2x}-4x\sqrt{3x^2+2x-1}=3\sqrt[3]{3x^2-2x}$

$\Leftrightarrow y^2-4y\sqrt{x^2+2x}+4\left(x^2+2x\right)+4x^2-4x\sqrt{3x^2+2x-1}+\left(3x^2+2x-1\right)$

$+x^2-2x+1+4x-1=3\sqrt[3]{3x^2-2x}$

$\Leftrightarrow \left(y-2\sqrt{x^2+2x}\right)^2+\left(2x-\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2+\left(x-1\right)^2+4x-1=3\sqrt[3]{3x^2-2x}$ (*)

Do $\left(y-2\sqrt{x^2+2x}\right)^2+\left(2x-\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2+\left(x-1\right)^2 \geq 0 \forall x;y$ nên

$3\sqrt[3]{3x^2-2x} \geq 4x-1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$3\sqrt[3]{3x^2-2x}=3\sqrt[3]{x.\left(3x-2\right).1} \leq x+3x-2+1=4x-1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=3x-2=1 \Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-2\sqrt{x^2+2x}=0 \\ 2x-\sqrt{3x^2+2x-1}=0 \\ x-1=0 \\ 4x-1=3\sqrt[3]{3x^2-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=2\sqrt{3}$

Bài 18: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-5x+1=\sqrt[3]{2x^2-x} \\ x^2+4x=y\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x-2} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $x \geq \frac{2}{3}$ do đó từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $y = \frac{x^2 + 4x - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x^2+3x}}$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ: $x^2 + \left(\frac{x^2+4x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x^2+3x}}\right)^2 - 5x + 1 = \sqrt[3]{2x^2 - x}$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x = 1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X) = X^2 + \left(\frac{X^2+4X-\sqrt{3X-2}}{\sqrt{X^2+3X}}\right)^2 - 5X + 1 - \sqrt[3]{2X^2 - X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0,5	ERROR
0,6	ERROR
0,7	0,750196
0,8	0,241349
0,9	0,051542
1	0
1,1	0,043045
1,2	0,1622294
1,3	0,347789
1,4	0,593826

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x = 1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x = 1$ vào biểu thức của y ta thấy: $y = \frac{x^2+4x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x^2+3x}} = 2$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{x^2+3x} = 2 = y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y - \sqrt{x^2+3x} = 0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y - \sqrt{x^2+3x}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x = 1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-1)^2$

Đến đây vẫn còn thành phần $\sqrt{3x-2} = 1$ cũng có thể thành hằng đẳng thức $\left(x - \sqrt{3x-2}\right)^2$ hoặc $\left(\sqrt{3x-2} - 1\right)^2$. Nhưng trong bài toán không có biểu thức $x\sqrt{3x-2}$ do đó chỉ có thể lựa chọn $\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2$

Khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{x^2+3x}$ chỉ là 1 nên cần phải nhân phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng với phương trình thứ nhất trong hệ để có $\left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2$; $(x-1)^2$ và $\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{2}{3}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-5x+1=\sqrt[3]{2x^2-x} \\ x^2+4x=y\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x-2} \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$\Rightarrow x^2+y^2-5x+1+2x^2+8x=\sqrt[3]{2x^2-x}+2y\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-5x+1+2x^2+8x-2y\sqrt{x^2+3x}-2\sqrt{3x-2}=\sqrt[3]{2x^2-x}$

$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{x^2+3x}+\left(x^2+3x\right)+\left(3x-2\right)-2\sqrt{3x-2}+1+2x^2-3x+2=\sqrt[3]{2x^2-x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2+2(x^2-2x+1)+x=\sqrt[3]{2x^2-x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2+2(x-1)^2+x=\sqrt[3]{2x^2-x}$ (*)

Do $\left(y-\sqrt{x^2+3x}\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2+2(x-1)^2 \ge 0 \forall x;y$ nên $\sqrt[3]{2x^2-x} \ge x$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$\sqrt[3]{2x^2-x}=\sqrt[3]{x.\left(2x-1\right).1} \le \dfrac{x+2x-1+1}{3}=x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2x-1=1 \Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{x^2+3x}=0 \\ \sqrt{3x-2}-1=0 \\ x-1=0 \\ x=\sqrt[3]{2x^2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=2$

Bài 19: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-\frac{7}{2}x+14=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x} \\ x^2+3x+1=y\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{4x+1} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ -\frac{1}{4}\le x\le 0 \end{array}\right.$ Nhưng ta thay 2 giá trị $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ vào phương trình thứ hai trong hệ đều không thỏa mãn do đó từ phương trình thứ hai trong hệ rút $y=\frac{x^2+3x+1-3\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$\left(\frac{x^2+3x+1-3\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2-\frac{7}{2}x+14=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=2$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=\left(\frac{X^2+3X+1-3\sqrt{4X+1}}{\sqrt{X^2-X}}\right)^2-\frac{7}{2}X+14-3\sqrt[3]{9X^2-\frac{9}{2}X}$$

Xét các giá trị:

- START = 1,5
- END = 2,4
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
1,5	1,653447
1,6	0,907056
1,7	0,449890
1,8	0,179967
1,9	0,041129
2	0
2,1	0,035553
2,2	0,13391
2,3	0,285561
2,4	0,483770

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 2 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=2$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=2$ vào biểu thức của y ta thấy:

$y=\dfrac{x^2+3x+1-3\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{2}$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{x^2-x}=\sqrt{2}=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{x^2-x}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{x^2-x}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=2$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-2)^2$

Đến đây vẫn còn thành phần $\sqrt{4x+1}=3$ cũng có thể thành hằng đẳng thức $\left(\sqrt{4x+1}-3\right)^2$.

Khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{x^2-x}$ chỉ là 1 nên cần phải nhân phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ để có $\left(y-\sqrt{x^2-x}\right)^2;(x-2)^2$ và $\left(\sqrt{4x+1}-3\right)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ -\dfrac{1}{4}\le x\le 0\end{array}\right.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-\dfrac{7}{2}x+14=3\sqrt[3]{9x^2-\dfrac{9}{2}x}\\ x^2+3x+1=y\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{4x+1}\end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$$\Rightarrow 2x^2+6x+2+y^2-\frac{7}{2}x+14=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}+2y\sqrt{x^2-x}+6\sqrt{4x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+y^2+\frac{5}{2}x+16-2y\sqrt{x^2-x}-6\sqrt{4x+1}=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{x^2-x}+\left(x^2-x\right)+x^2+\frac{7}{2}x+16-6\sqrt{4x+1}=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2-x}\right)^2+(4x+1)-6\sqrt{4x+1}+9+\left(x^2+4x+4\right)+\frac{7}{2}x+2=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2-x}\right)^2+\left(\sqrt{4x+1}-3\right)^2+(x-2)^2+\frac{7}{2}x+2=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}\ \ (*)$$

Do $\left(y-\sqrt{x^2-x}\right)^2+\left(\sqrt{4x+1}-3\right)^2+\left(x-2\right)^2\ge 0\forall x;y$ nên

$$3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}\ge\frac{7}{2}x+2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}=3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\left(2x-1\right).3}\le\frac{3x}{2}+2x-1+3=\frac{7}{2}x+2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=2x-1=3\Leftrightarrow x=2$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}y-\sqrt{x^2-x}=0\\ \sqrt{4x+1}-3=0\\ x-2=0\\ \frac{7}{2}x+2=3\sqrt[3]{9x^2-\frac{9}{2}x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=2$ và $y=\sqrt{2}$

Bài 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+3=2\sqrt[3]{10x^2-2x}\\ x^2+3x+1=y\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2+3x}\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $x\ge\frac{1}{2}$ Nhưng ta thay $x=\frac{1}{2}$ giá trị vào phương trình thứ hai trong hệ nhận thấy không thỏa mãn do đó từ phương trình thứ hai trong hệ rút $y=\frac{x^2+3x+1-2\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{2x-1}}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$\left(\frac{x^2+3x+1-2\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{2x-1}}\right)^2+3=2\sqrt[3]{10x^2-2x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F\left(X\right)=\left(\frac{X^2+3X+1-2\sqrt{X^2+3X}}{\sqrt{2X-1}}\right)^2+3$$

X	$F\left(X\right)$
0,5	ERROR
0,6	0,565617
0,7	0,308078

$-2\sqrt[3]{10X^2-2X}$

Xét các giá trị:

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

0,8	0,13573
0,9	0,033884
1	0
1,1	0,03410
1,2	0,137239
1,3	0,310949
1,4	0,5571218

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=1$ vào biểu thức của y ta thấy:

$$y=\frac{x^2+3x+1-2\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{2x-1}}=1$$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{2x-1}=1=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{2x-1}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-1)^2$

Đến đây vẫn còn thành phần $\sqrt{x^2+3x}$. Do bài toán có nghiệm kép $x=1$ nên có thể tạo liên hợp nghiệm kép với thành phần này

Giả sử liên hợp với $\sqrt{x^2+3x}=ax+b$ khi đó a và b là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}a+b=2\\ b=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{4}\\ b=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Do đó liên hợp với $\sqrt{x^2+3x}=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ hay $\left(5x+3-4\sqrt{x^2+3x}\right)$

Trước khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{2x-1}$ chỉ là 1 nên cần phải nhân phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ để có $\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$ và $(x-1)^2$ và

liên hợp nghiệm kép $\left(5x+3-4\sqrt{x^2+3x}\right)$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{2}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+3 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x} \\ x^2+3x+1 = y\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2+3x} \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình hai trong hệ với 2 rồi cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$\Rightarrow 2x^2+6x+2+y^2+3 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}+2y\sqrt{2x-1}+4\sqrt{x^2+3x}$

$\Leftrightarrow 2x^2+6x+y^2+5-2y\sqrt{2x-1}-4\sqrt{x^2+3x} = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$

$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{2x-1}+\left(2x-1\right)+2x^2+4x+6-4\sqrt{x^2+3x} = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+8x+4-4\sqrt{x^2+3x} = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$

$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+\left(5x+3\right)-4\sqrt{x^2+3x}+3x+1 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+\frac{\left(5x+3\right)^2-16\left(x^2+3x\right)}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^2+3x}}+3x+1 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+\frac{9x^2-18x+9}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^2+3x}}+3x+1 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+\frac{9\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^2+3x}}+3x+1 = 2\sqrt[3]{10x^2-2x} \ (*)$$

Do $\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(x-1\right)^2+\frac{9\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^2+3x}} \geq 0 \forall x \geq \frac{1}{2}; y \in R$ nên

$2\sqrt[3]{10x^2-2x} \geq 3x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$2\sqrt[3]{10x^2-2x} = \sqrt[3]{80x^2-16x} = \sqrt[3]{4x.\left(5x-1\right).4} \leq \frac{4x+5x-1+4}{3} = 3x+1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 5x-1 = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{2x-1}=0 \\ x-1=0 \\ 3x+1=2\sqrt[3]{10x^2-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=1$

Chú ý: Ngoài cách xử lý trên chúng ta có thể làm theo cách như sau:

Cách 2: Do biểu thức $\sqrt{x^2+3x}$ rất khó đánh giá là nên giải quyết theo cách gì. Hơn nữa

$$2\sqrt[3]{10x^2-2x}=\sqrt[3]{80x^2-16x}=\sqrt[3]{4x.(5x-1).4}\le\frac{4x+5x-1+4}{3}=3x+1$$

Nên còn dư lại thành phần: $5x+3-4\sqrt{x^2+3x}$. Chúng ta có thể đánh giá bằng xét hàm $f(x)=5x+3-4\sqrt{x^2+3x}$ với $x\ge\frac{1}{2}$

Ta có: $f'(x)=5-\frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x}}=0\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+3x}=4x+6\Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng xét dấu:

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x)\ge f(1)=0$

Do đó $5x+3-4\sqrt{x^2+3x}\ge 0\ \ \forall x\ge\frac{1}{2}$

Và $5x+3-4\sqrt{x^2+3x}=0\Leftrightarrow x=1$

Do đó chúng ta vẫn đánh giá được bình thường như sau:

$$\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2(x-1)^2+(5x+3)-4\sqrt{x^2+3x}+3x+1=2\sqrt[3]{10x^2-2x}\ (1)$$

Do $5x+3-4\sqrt{x^2+3x}\ge 0\ \ \forall x\ge\frac{1}{2}$ và

$\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+2(x-1)^2\ge 0\ \forall x\ge\frac{1}{2};y\in R$

Nên $2\sqrt[3]{10x^2-2x}\ge 3x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$2\sqrt[3]{10x^2-2x}=\sqrt[3]{80x^2-16x}=\sqrt[3]{4x.(5x-1).4}\le\frac{4x+5x-1+4}{3}=3x+1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=5x-1=4\Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{2x-1}=0 \\ x-1=0 \\ 5x+3-4\sqrt{x^2+3x}=0 \\ 3x+1=2\sqrt[3]{10x^2-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=1$

Bài 21: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-x^2-3=\sqrt[3]{4x^2+4x} \\ x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}=2y\sqrt{7x-x^2} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $0\le x\le 7$ Nhưng ta thay giá trị $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=7 \end{array}\right.$ vào phương trình thứ hai trong hệ nhận thấy không thỏa mãn do đó từ phương trình thứ hai trong hệ rút $y=\dfrac{x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}}{2\sqrt{7x-x^2}}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$\left(\frac{x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}}{2\sqrt{7x-x^2}}\right)^2-x^2-3=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=\left(\frac{X^2+X+2+4\sqrt{X^3+2X+1}}{2\sqrt{7X-X^2}}\right)^2-X^2-3-\sqrt[3]{4X^2+4X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0,5	0,971807
0,6	0,557423
0,7	0,288736
0,8	0,120525
0,9	0,028725
1	0
1,1	0,0269787
1,2	0,105882
1,3	0,235241
1,4	0,4151726

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và

đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán
Ta thay giá trị $x=1$ vào biểu thức của y ta thấy:

$$y=\frac{x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}}{2\sqrt{7x-x^2}}=\sqrt{6}$$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{7x-x^2}=\sqrt{6}=y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $y-\sqrt{7x-x^2}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có $\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2$

Ngoài ra nghiệm $x=1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $\left(x-1\right)^2$

Đến đây vẫn còn thành phần $\sqrt{x^3+2x+1}$. Chúng ta chưa biết sẽ xử lý như thế nào. Vì lượng trong căn là bậc 3 nên việc tạo ra liên hợp nghiệm kép gặp khó khăn (vì với bậc 3 như thế này cần phải tạo liên hợp có bậc 2 là: ax^2+bx+c mà chỉ có 2 phương trình nên chúng ta không thể xử lý hết được) Gặp phải tình huống như thế này thì bài toán có thể phải xét hàm để giải quyết nốt bài toán hoặc có thể có thêm nghiệm ngoại lai nào đó. Còn việc xét hàm nào thì sau khi biến đổi xong chúng ta sẽ biết.
Trước khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{7x-x^2}$ là 2 nên chỉ cần cộng vế với vế hai phương trình trong hệ để có thành phần: $\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2$ và $\left(x-1\right)^2$

☺***Bài giải:***
Điều kiện xác định: $0\le x\le 7$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-x^2-3=\sqrt[3]{4x^2+4x} \\ x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}=2y\sqrt{7x-x^2} \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$$\Rightarrow y^2-x^2-3+x^2+x+2+4\sqrt{x^3+2x+1}=2y\sqrt{7x-x^2}+\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow y^2+x-1+4\sqrt{x^3+2x+1}=2y\sqrt{7x-x^2}+\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{7x-x^2}+\left(7x-x^2\right)+x^2-6x-1+4\sqrt{x^3+2x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+x^2-6x-1+4\sqrt{x^3+2x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+x^2-2x+1-4x-2+4\sqrt{x^3+2x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2-4x-2+4\sqrt{x^3+2x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

PHÂN TÍCH

Ta nhận thấy nếu đến đây chúng ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$$\sqrt[3]{4x^2+4x}=\sqrt[3]{2x.\left(x+1\right).2}\le\frac{2x+x+1+2}{3}=x+1$$

Khi đó phương trình sẽ thành:

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

Như vậy lượng còn lại cần xử lý là $\left(-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}\right)$ Ta nhận thấy

nếu liên hợp $\left(-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}\right)=\dfrac{16\left(x^3+2x+1\right)-\left(5x+3\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}$

$$=\frac{16x^3-25x^2+2x+7}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}=\frac{\left(16x+7\right)\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}$$

Với $0\le x\le 7$ thì $\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}>0$ và $\left(16x+7\right)>0$ do đó:

$\dfrac{\left(16x+7\right)\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}\ge 0$ dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Như vậy bài toán được xử lý khá gọn.

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2+\frac{16\left(x^3+2x+1\right)-\left(5x+3\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2+\frac{16x^3-25x^2+2x+7}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2+\frac{\left(16x+7\right)\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}\ (*)$$

Do $\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2\geq 0\ \ \forall x\in\left[0;7\right];y\in R$ và

$\dfrac{\left(16x+7\right)\left(x-1\right)^2}{\left(5x+3\right)+4\sqrt{x^3+2x+1}}\geq 0\ \ \forall x\in\left[0;7\right]$ nên $\sqrt[3]{4x^2+4x}\geq x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$\sqrt[3]{4x^2+4x}=\sqrt[3]{2x.\left(x+1\right).2}\leq\dfrac{2x+x+1+2}{3}=x+1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x=x+1=2\Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}y-\sqrt{7x-x^2}=0\\x-1=0\\\left(16x+7\right)\left(x-1\right)^2=0\\x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{6}\end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=\sqrt{6}$

Chú ý: Ngoài cách xử lý trên chúng ta có thể làm theo cách như sau:

Cách 2: Nếu chúng ta thấy khó khăn khi liên hợp biểu thức $\left(-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}\right)$ thì cũng có thể đánh giá bằng xét hàm

$f(x)=-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}$ với $0\leq x\leq 7$

Ta có: $f'(x)=-5+\dfrac{6x^2+4}{\sqrt{x^3+2x+1}}=0\Leftrightarrow 5\sqrt{x^3+2x+1}=6x^2+4\Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng xét dấu:

x	0		1		7
$f'(x)$		–	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f\left(x\right)\geq f\left(1\right)=0$

Do đó $-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}\geq 0\ \ \forall x\in\left[0;7\right]$

Và $-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}=0\Leftrightarrow x=1$

Do đó chúng ta vẫn đánh giá được bình thường như sau:

$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$ (1)

Do $-5x-3+4\sqrt{x^3+2x+1}\geq 0\ \ \forall x\in\left[0;7\right]$ và

$\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+\left(x-1\right)^2\geq 0\ \forall x\in\left[0;7\right];y\in R$

nên $\sqrt[3]{4x^2+4x} \geq x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$\sqrt[3]{4x^2+4x} = \sqrt[3]{2x.(x+1).2} \leq \dfrac{2x+x+1+2}{3} = x+1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x = x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{7x-x^2}=0 \\ x-1=0 \\ 4\sqrt{x^3+2x+1}=5x+3 \\ x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=\sqrt{6}$

<u>Bình luận:</u> Nếu theo tư duy tạo liên hợp với thành phần $\sqrt{x^3+2x+1}$ phải là bậc hai là ax^2+bx+c thì khi nhóm tạo các hằng đẳng thức chúng ta cần phải còn dư thành phần x^2 thì khi đó biểu thức cuối sẽ là:

$$\left(y-\sqrt{7x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2-x^2-3x-4+4\sqrt{x^3+2x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

Như vậy chúng ta phải xét hàm $f(x)=-x^2-3x-4+4\sqrt{x^3+2x+1}$ với $0 \leq x \leq 7$

Chúng ta hoàn toàn có thể kiểm tra bằng tính năng TABLE của máy tính để nhìn thấy hàm số luôn không âm trên miền $\left[0;7\right]$ Và các bạn hoàn toàn có thể xét hàm bình thường giống như cách 2

Do đó $-x^2-3x-4+4\sqrt{x^3+2x+1} \geq 0 \quad \forall x \in \left[0;7\right]$ Nên chúng ta vẫn đánh giá và giải quyết bài toán bình thường

Bài 22: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4y^2-x-2=\sqrt[3]{4x^2+4x} \\ x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}=4y\sqrt{6x-x^2} \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta nhận thấy từ điều kiện của hệ phương trình thì $0 \leq x \leq 6$ Nhưng ta thay giá trị $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$ vào phương trình thứ hai trong hệ nhận thấy không thỏa mãn do đó từ phương trình thứ hai trong hệ rút $y=\dfrac{x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}}{4\sqrt{6x-x^2}}$

thay vào phương trình thứ nhất trong hệ:

$$4\left(\frac{x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}}{4\sqrt{6x-x^2}}\right)^2-x-2=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

Sử dụng SHIFT CALC ta thu được nghiệm là: $x=1$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=4\left(\frac{X^2-3X+3+3\sqrt{3X^3+5X+1}}{4\sqrt{6X-X^2}}\right)^2-X-2-\sqrt[3]{4X^2+4X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0,5
- END = 1,4
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0,5	1,385638
0,6	0,80666
0,7	0,42266
0,8	0,178015
0,9	0,042727
1	0
1,1	0,040532
1,2	0,159637
1,3	0,355675
1,4	0,629161

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành..

Vì vậy nghiệm $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình

Do bài toán có nghiệm kép khi dùng phép thế ẩn y vào phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó bài toán hoàn toàn có thể sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá bất đẳng thức AM – GM để giải quyết bài toán

Ta thay giá trị $x=1$ vào biểu thức của y ta thấy:

$$y=\frac{x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}}{4\sqrt{6x-x^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Hơn nữa khi ta thay giá trị của x vào biểu thức: $\sqrt{6x-x^2}=\sqrt{5}=2y$

Do đó mối quan hệ giữa x và y là $2y-\sqrt{6x-x^2}=0$

Vì vậy kết hợp 2 phương trình chúng ta cần phải có

Ngoài ra nghiệm $x=1$ là nghiệm kép của bài toán nên cần tạo hằng đẳng thức $(x-1)^2$

Đến đây vẫn còn thành phần $\sqrt{3x^3+5x+1}$. Chúng ta chưa biết sẽ xử lý như thế nào. Vì lượng trong căn là bậc 3 nên việc tạo ra liên hợp nghiệm kép gặp khó khăn (vì với bậc 3 như thế này cần phải tạo liên hợp có bậc 2 là: ax^2+bx+c mà chỉ có 2 phương trình nên chúng ta không thể xử lý hết

được) Gặp phải tình huống như thế này thì bài toán có thể phải xét hàm để giải quyết nốt bài toán hoặc có thể có thêm nghiệm ngoại lai nào đó. Còn việc xét hàm nào thì sau khi biến đổi xong chúng ta sẽ biết.
Trước khi ta kết nối hai phương trình trong hệ ta nhận thấy hệ số của $y\sqrt{6x-x^2}$ là 4 nên chỉ cần cộng vế với vế hai phương trình trong hệ để có thành phần: $\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2$ và $\left(x-1\right)^2$

☺***Bài giải:***

Điều kiện xác định: $0\le x\le 6$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4y^2-x-2=\sqrt[3]{4x^2+4x}\\ x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}=4y\sqrt{6x-x^2}\end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ phương trình ta có:

$\Rightarrow 4y^2-x-2+x^2-3x+3+3\sqrt{3x^3+5x+1}=4y\sqrt{6x-x^2}+\sqrt[3]{4x^2+4x}$

$\Leftrightarrow 4y^2+x^2-4x+1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=4y\sqrt{6x-x^2}+\sqrt[3]{4x^2+4x}$

$\Leftrightarrow 4y^2-4y\sqrt{6x-x^2}+\left(6x-x^2\right)+2x^2-10x+1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$

$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2x^2-10x+1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$

$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2x^2-4x+2-6x-1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$

$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2\left(x-1\right)^2-6x-1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$

PHÂN TÍCH

Ta nhận thấy nếu đến đây chúng ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$\sqrt[3]{4x^2+4x}=\sqrt[3]{2x.\left(x+1\right).2}\le\dfrac{2x+x+1+2}{3}=x+1$

Khi đó phương trình sẽ thành:

$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2\left(x-1\right)^2-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$

Như vậy lượng còn lại cần xử lý là $\left(-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}\right)$ Ta nhận thấy nếu liên hợp $\left(-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}\right)=\dfrac{9\left(3x^3+5x+1\right)-\left(7x+2\right)^2}{\left(7x+2\right)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}$

$$=\frac{27x^3-49x^2+17x+5}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}=\frac{(27x+5)(x-1)^2}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}$$

Với $0\le x\le 6$ thì $(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}>0$ và $(27x+5)>0$ do đó:

$\frac{(27x+5)(x-1)^2}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}\ge 0$ dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Như vậy bài toán được xử lý khá gọn.

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2-6x-1+3\sqrt{3x^3+5x+1}=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2+\frac{9(3x^3+5x+1)-(7x+2)^2}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2+\frac{27x^3-49x^2+17x+5}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2+\frac{(27x+5)(x-1)^2}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}$$

Do $\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2\ge 0\quad\forall x\in[0;6];y\in R$ và

$\frac{(27x+5)(x-1)^2}{(7x+2)+3\sqrt{3x^3+5x+1}}\ge 0\quad\forall x\in[0;6]$ nên $\sqrt[3]{4x^2+4x}\ge x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$\sqrt[3]{4x^2+4x}=\sqrt[3]{2x.(x+1).2}\le\frac{2x+x+1+2}{3}=x+1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x=x+1=2\Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{6x-x^2}=0\\x-1=0\\(27x+5)(x-1)^2=0\\x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Chú ý: Ngoài cách xử lý trên chúng ta có thể làm theo cách như sau:

Cách 2: Nếu chúng ta thấy khó khăn khi liên hợp biểu thức $\left(-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}\right)$ thì cũng có thể đánh giá bằng xét hàm

$f(x)=-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}$ với $0\le x\le 6$

Ta có: $f'(x)=-7+\dfrac{27x^2+15}{2\sqrt{3x^3+5x+1}}=0\Leftrightarrow 14\sqrt{3x^3+5x+1}=27x^2+15\Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng xét dấu:

x	0		1		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x)\ge f(1)=0$

Do đó $-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}\ge 0\quad \forall x\in[0;6]$

Và $-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}=0\Leftrightarrow x=1$

Do đó chúng ta vẫn đánh giá được bình thường như sau:

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}+x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}\ (1)$$

Do $-7x-2+3\sqrt{3x^3+5x+1}\ge 0\quad \forall x\in[0;6]$

và $\left(2y-\sqrt{6x-x^2}\right)^2+2(x-1)^2\ge 0\ \ \forall x\in[0;6];y\in R$

nên $\sqrt[3]{4x^2+4x}\ge x+1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta nhận thấy:

$$\sqrt[3]{4x^2+4x}=\sqrt[3]{2x.(x+1).2}\le\frac{2x+x+1+2}{3}=x+1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x=x+1=2\Leftrightarrow x=1$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{6x-x^2}=0\\ x-1=0\\ 3\sqrt{3x^3+5x+1}=7x+2\\ x+1=\sqrt[3]{4x^2+4x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$ và $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

KÍNH LÚP TABLE

Tập 6: *Casio*

Cho người mới bắt đầu

– Đoàn Trí Dũng –

$\Leftarrow\left[\int \text{ĐTDx}\right]\Rightarrow$

Trưởng Nhóm nghiên cứu và phát triển Casio Việt Nam

Kỹ thuật 1: Phá biểu thức

Kỹ thuật 1.1: Kỹ thuật phá biểu thức 1 biến:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức sau: $x^2+x+3=(x+1)\sqrt{x-1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta có: $\left(x^2+x+3\right)^2=(x+1)^2(x-1)$

Thay $x=100$ vào hai vế:

$$\begin{cases}\left(x^2+x+3\right)^2=102070609=100^4+2.100^3+7.100^2+600+9=x^4+2x^3+7x^2+6x+9\\(x+1)^2(x-1)=1009899=100^3+100^2-100-1=x^3+x^2-x-1\end{cases}$$

Do đó: $\left(x^2+x+3\right)^2=(x+1)^2(x-1)\Rightarrow x^4+2x^3+7x^2+6x+9=x^3+x^2-x-1$

Kỹ thuật 1.2: Kỹ thuật phá biểu thức 2 biến:

Cách 1: Sử dụng CALC:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $(x+y-1)(2x-y+3)$

Chú ý rằng khi tách ra ta có $2x^2-3$ (Tính 2 cái đầu và cuối thôi, nó khá cơ bản) do đó hay $x=1000, y=\frac{1}{100}$ vào $(x+y-1)(2x-y+3)-\left(2x^2-3\right)$ ta có:

$$(x+y-1)(2x-y+3)-\left(2x^2-3\right)=1010.0399=1000+10+0.04-0.0001$$

$$(x+y-1)(2x-y+3)-\left(2x^2-3\right)=1000+1000.\frac{1}{100}+\frac{4}{100}-\frac{1}{100^2}=x+xy+4y-y^2$$

vậy $(x+y-1)(2x-y+3)=\left(2x^2-3\right)+x+xy+4y-y^2$.

Cách 2: Giảm một biến (An toàn hiệu quả):

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $\left(x^2+y^2-y+2\right)^2$. Gán $y=100$ ta có:

$$\left(x^2+y^2-y+2\right)^2=\left(x^2+9902\right)^2=x^4+19804x^2+98049604$$

Tự tách các biểu thức: $\begin{cases}19804=2y^2-2y+4\\98049604=y^4-2y^3+5y^2-4y+4\end{cases}$

Vậy $\left(x^2+y^2-y+2\right)^2=x^4+\left(2y^2-2y+4\right)x^2+y^4-2y^3+5y^2-4y+4$

Kỹ thuật 2: Chia đa thức không chứa căn

Kỹ thuật 2.1: Chia đa thức 1 biến:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $\dfrac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}$

Thay $x=100$ vào biểu thức $\dfrac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}$ ta được:

$$\frac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}=1009793=100^3+100^2-200-7$$

$$\Rightarrow \frac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}=x^3+x^2-2x-7$$

Kỹ thuật 2.2: Chia đa thức 2 biến:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $\dfrac{x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y}{x+y}$

Cách 1: Sử dụng CALC:

Thay $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$ ta có kết quả:

$$\frac{x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y}{x+y}=1000013.01$$

$$=1000^2+1000.\frac{1}{100}+3+\frac{1}{100}=x^2+xy+y+3$$

Hay nói cách khác phân tích đa thức nhân tử ta được kết quả

$$x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y=(x+y)(x^2+xy+y+3)$$

Cách 2: Sơ đồ Hoorne (Chậm mà chắc):

Gán $y=100$ ta được: $\dfrac{x^3+200x^2+10103x+10300}{x+100}$

Lập sơ đồ Hoorne:

x	1	200	10103	10300
–100	1	100	103	0

Vậy $\dfrac{x^3+200x^2+10103x+10300}{x+100}=x^2+100x+103$

Hay $x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y=(x+y)(x^2+xy+y+3)$

Kỹ thuật 3: Khai căn

Kỹ thuật 3.1: Khai căn 1 biến không chứa căn:

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}$

Gán $x=100$ ta có: $\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}=10301=x^2+3x+1$.

Kỹ thuật 3.2: Khai căn 1 biến có chứa căn:

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}$

Gán $x=3$ ta có: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}=11.41421356=10+\sqrt{2}$

Gán $x=4$ ta có: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}=18.73205081=17+\sqrt{3}$

Vậy $\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}=A+\sqrt{x-1}$ vì $\begin{cases}x=3\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{2}\\x=4\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{3}\end{cases}$

Xét $\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$ CALC 100 ta có:

$$\sqrt{x^4+2x^2+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=10001=100^2+1=x^2+1$$

Kỹ thuật 3.3: Khai căn 2 biến không chứa căn:

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2y+1}$

Gán $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$ ta có:

$$\sqrt{x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2y+1}=1000001.01=1000^2+1+\frac{1}{100}=x^2+y+1$$

Kỹ thuật 3.4: Khai căn 2 biến chứa căn:

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^2+\left(y+2\right)x+2+2\left(x+1\right)\sqrt{xy+1}}$

Gán $x=y=1$: $\sqrt{x^2+\left(y+2\right)x+2+2\left(x+1\right)\sqrt{xy+1}}=3.414213562=2+\sqrt{2}$

Gán $x=2, y=1$: $\sqrt{x^2+\left(y+2\right)x+2+2\left(x+1\right)\sqrt{xy+1}}=4.732050808=3+\sqrt{3}$

Chú ý rằng: $\begin{cases}x=y=1\Rightarrow\sqrt{xy+1}=\sqrt{2}\\x=2,y=1\Rightarrow\sqrt{xy+1}=\sqrt{3}\end{cases}$. Do đó xét:

$\sqrt{x^2+\left(y+2\right)x+2+2\left(x+1\right)\sqrt{xy+1}}-\sqrt{xy+1}$ CALC $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$:

$$\sqrt{x^2+\left(y+2\right)x+2+2\left(x+1\right)\sqrt{xy+1}}-\sqrt{xy+1}=1001=x+1$$

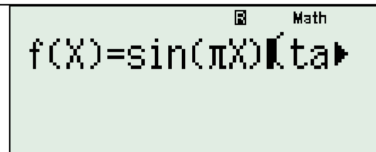
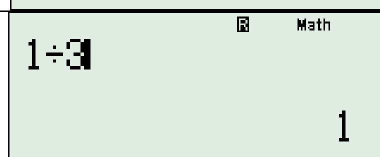
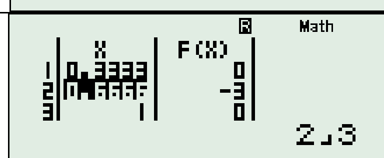
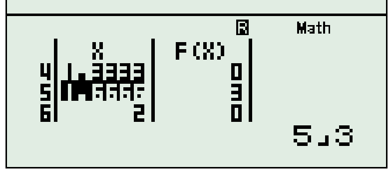
Kỹ thuật 4: Rút gọn biểu thức dãy số

Rút gọn biểu thức: $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n-1)\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}}$

Bấm máy tính: $\sum_{x=2}^{100}\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}=\frac{9}{10}=1-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{\sqrt{n}}$

Kỹ thuật 5: Điều kiện phương trình lượng giác

Ví dụ: Biết rằng $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}$. Kết hợp với điều kiện $\sin x\neq 0$, $\tan x\neq\sqrt{3}$.

Bấm TABLE với: $F(X)=\sin(\pi X)(\tan(\pi X)-\sqrt{3})$	
Chọn Start = $\frac{1}{3}$ vì có $x=\frac{\pi}{3}$	
End = $\frac{1}{3}$ + 1.9 (Để không lặp lại nghiệm ban đầu sau một vòng 2π)	
Step = $\frac{1}{3}$ vì có $k\frac{\pi}{3}$	
Loại các giá trị gây ra $F(X)=0$. Như vậy chỉ có $\frac{2}{3}$ và $\frac{5}{3}$. Do đó $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{3}+k2\pi$. Chú ý hai nghiệm trên có thể hợp thành $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$.	

Kỹ thuật 6: Chia đa thức chứa căn

Kỹ thuật 6.1: Chia đa thức 1 biến 1 căn:

Xét $\dfrac{x^3+x^2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}-1}{x-\sqrt{x+1}}$ CALC 1 được $3+\sqrt{2}$. Chú ý rằng khi x = 1 thì $\sqrt{x+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Do đó ta hiểu rằng:

$$\frac{x^3+x^2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}-1}{x-\sqrt{x+1}}=A+\sqrt{x+1}$$

Trong đó là A là biểu thức chưa biết.

Xét $\dfrac{x^3+x^2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}-1}{x-\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}$ CALC 100 được 10101 = x^2+x+1.

Vậy $\dfrac{x^3+x^2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}-1}{x-\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=x^2+x+1$

$\Leftrightarrow x^3+x^2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}-1=\left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x+1+\sqrt{x+1}\right)$

Kỹ thuật 6.2: Chia đa thức 2 biến chứa 1 căn:

Phân tích nhân tử: $x^2+y-2x-1-2x\sqrt{x^2+y}=0$

Bước 1: Đặt $y=100$, ta được:

$x^2+99-2x-2x\sqrt{x^2+100}=0$

Sử dụng công cụ SOLVE ta được:

$$x\approx 5.116450524$$

Bước 2: Sử dụng công cụ CALC thay các giá trị $x\approx 5.116450524, y=100$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{x^2+y}\approx 11.23290105$$

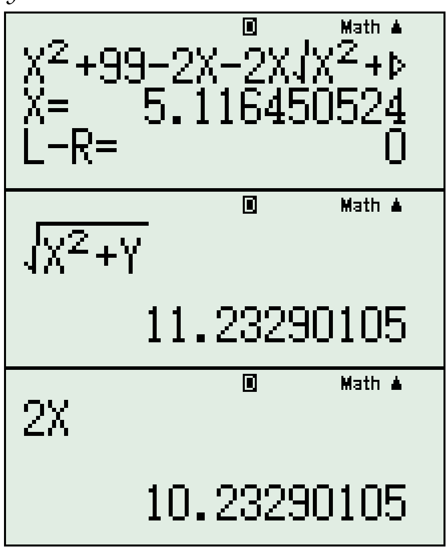
Chú ý rằng: $2x\approx 10.23290105$

Do đó ta có đánh giá:

$$\sqrt{x^2+y}\approx 2x+1$$

Vậy biểu thức cần tìm là:

$$\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)$$



Xét phép chia $\dfrac{x^2+y-2x-1-2x\sqrt{x^2+y}}{\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)}$:

CALC $x=1, y=1$ ta được kết quả $1+\sqrt{2}=1+\sqrt{x^2+y}$

CALC $x=0, y=3$ ta được kết quả $1+\sqrt{3}=1+\sqrt{x^2+y}$

Xét $\dfrac{x^2+y-2x-1-2x\sqrt{x^2+y}}{\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)}-\sqrt{x^2+y}$ CALC $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$ được kết quả là 1. Vậy $x^2+y-2x-1-2x\sqrt{x^2+y}=\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)\left(1+\sqrt{x^2+y}\right)$.

<u>Kỹ thuật 6.3: Chia đa thức 1 biến chứa nhiều căn:</u>

Chia đa thức: $\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}$.

- CALC 0 được kết quả $1+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{x+3}$
- CALC 4 được kết quả $24.29150262=19+2\sqrt{7}=19+2\sqrt{x+3}$

Xét $\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}-2\sqrt{x+3}$

- CALC 2 được kết quả $6.414213562=5+\sqrt{2}=5+\sqrt{x}$
- CALC 3 được kết quả $11.732050808=10+\sqrt{3}=10+\sqrt{x}$

Xét $\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}-2\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

- CALC 100 được kết quả $10001=x^2+1$.

Vậy: $\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}=x^2+1+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$

<u>Kỹ thuật 6.4: Chia đa thức 2 biến chứa nhiều căn:</u>

Chia đa thức: $\dfrac{x^2+xy+x^3\sqrt{x+y}+x^2\sqrt{y}+\sqrt{xy+y^2}}{x^2+\sqrt{x+y}}$

- CALC $x=y=1$ ta được kết quả $1+\sqrt{2}=1+\sqrt{x+y}$
- CALC $x=2, y=1$ ta được kết quả $1+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{x+y}$
- CALC $x=2, y=4$ ta được kết quả $2+2\sqrt{6}=2+2\sqrt{x+y}$

Tìm ra quy luật: $\dfrac{x^2+xy+x^3\sqrt{x+y}+x^2\sqrt{y}+\sqrt{xy+y^2}}{x^2+\sqrt{x+y}}=A+x\sqrt{x+y}$

Xét $\dfrac{x^2+xy+x^3\sqrt{x+y}+x^2\sqrt{y}+\sqrt{xy+y^2}}{x^2+\sqrt{x+y}}-x\sqrt{x+y}$

- CALC $x=0, y=2$ được kết quả $\sqrt{2}=\sqrt{y}$
- CALC $x=0, y=3$ được kết quả $\sqrt{3}=\sqrt{y}$
- CALC $x=0, y=5$ được kết quả $\sqrt{5}=\sqrt{y}$

Vậy xét tiếp $\dfrac{x^2+xy+x^3\sqrt{x+y}+x^2\sqrt{y}+\sqrt{xy+y^2}}{x^2+\sqrt{x+y}}-x\sqrt{x+y}-\sqrt{y}$

CALC $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$ được kết quả là 0.

Do đó: $x^2+xy+x^3\sqrt{x+y}+x^2\sqrt{y}+\sqrt{xy+y^2}=\left(x\sqrt{x+y}+\sqrt{y}\right)\left(x^2+\sqrt{x+y}\right)$

Kỹ thuật 7: Quy tắc tìm liên hợp căn bản
Trong phương trình, bất phương trình

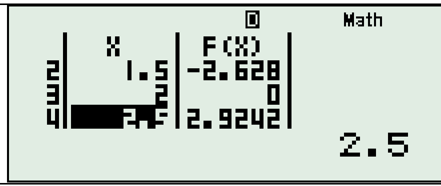
Kỹ thuật 7.1: Nghiệm hữu tỷ nguyên đơn: $x^2+3\sqrt{x-1}=7$

$F(x)=x^2+3\sqrt{x-1}-7$

Start = 1, End = 7, Step = 0.5

Thấy ngay nghiệm x = 2

Nghiệm đơn qua mốc 0 hàm đổi dấu



Nguyên tắc xử lý:

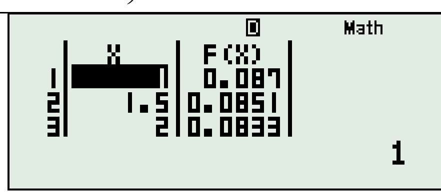
- Trục căn với số tương ứng căn nhận được.
- Truy ngược dấu.
- Sử dụng $\sqrt{\quad}=ax+b$. Giải hệ $\begin{cases}\sqrt{\quad}=ax+b\Big|_{x=x_1}\\ \sqrt{\quad}=ax+b\Big|_{x=x_2}\end{cases}$ nếu có 2 nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2-1-\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x-1}=0$

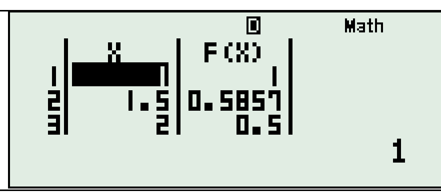
Cách 1: $\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)-\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(x+2-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$$

$F(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}$. Vì điều kiện $x\ge 1$, chọn Start = 1, End = 5, Step = 0.5. Ta có MaxF(x) $=0.087<\dfrac{1}{3}$. Chọn MaxF(x) = $\dfrac{1}{3}$



$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$. Start = 1, End = 5, Step = 0.5. Ta có MaxF(x) = 1.



Vậy ta lấy $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}\right)$ và lấy $\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)$. Khi đó:

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+\frac{2}{3}+\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+1}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+\frac{2}{3}+\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}+1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x+6}+1\right)^2+3}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0 \text{ (Quá đủ rồi nhé)}$$

Cách 2:

- Nếu $\sqrt{a}=b\Rightarrow$ sử dụng truy ngược $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-b\right)=a-b\sqrt{a}$.

  Vậy $\sqrt{x-1}=1\Rightarrow$ sử dụng liên hợp $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=x-1-\sqrt{x-1}$

- Nếu $\sqrt[3]{a}=b\Rightarrow$ sử dụng truy ngược $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\sqrt[3]{a}=a-b^2.\sqrt[3]{a}$

  Vậy $\sqrt[3]{x+6}=2$ nên ta sử dụng liên hợp truy ngược sau:

$$\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{x+6}+2\right)\sqrt[3]{x+6}=x+6-4\sqrt[3]{x+6}$$

$$x^2-1-\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow 4x^2-4-4\sqrt[3]{x+6}-4\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-5x-6\right)+\left(x+6-4\sqrt[3]{x+6}\right)+4\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x+3)+\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{x+6}+2\right)\sqrt[3]{x+6}+4\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(4x+3+\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}+2\right)\sqrt[3]{x+6}}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0 \text{ (Quá đẹp trai!)}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq x-x^2$

$$\Leftrightarrow x^2-x+\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)+\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)\ge 0$$

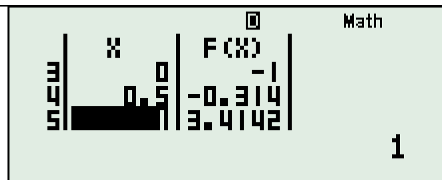
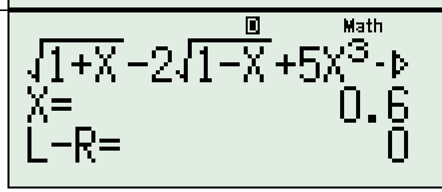
$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\frac{2x^2-x+3-\left(x+1\right)^2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{\left(3x-1\right)^2-\left(21x-17\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9\left(x^2-3x+2\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\ge 0$$

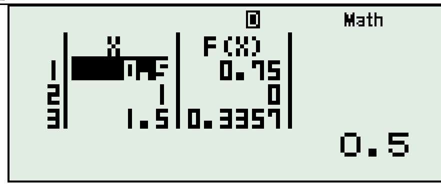
$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\right)\ge 0$$

<u>Kỹ thuật 7.2: Nghiệm hữu tỷ không nguyên đơn:</u>

$$\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+5x^3-3x^2=0$$

<table>
<tr>
<td>$F\left(x\right)=\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+5x^3-3x^2$
Start = –1, End = 1, Step = 0.5
Thấy ngay nghiệm x = 2
Thấy hàm đổi dấu khi x từ 0.5 sang 1</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Chọn 1 giá trị trong khoảng này chẳng hạn là 0,7. Ta quay lại Mode 1 và SHIFT SOLVE
Tìm được ngay nghiệm x = 0.6 = $\frac{3}{5}$
Nghiệm đơn hàm luôn có sự đổi dấu</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Nguyên tắc xử lý:
• Trục căn với số tương ứng căn nhận được.
• Truy ngược dấu.
• Sử dụng $\sqrt{\ }=ax+b$. Giải hệ $\begin{cases}\sqrt{\ }=ax+b\Big|_{x=x_1}\\ \sqrt{\ }=ax+b\Big|_{x=x_2}\end{cases}$ nếu có 2 nghiệm.</td>
</tr>
</table>

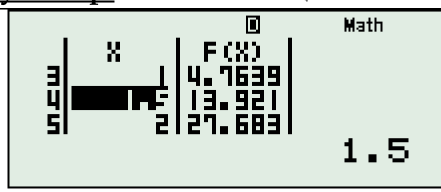
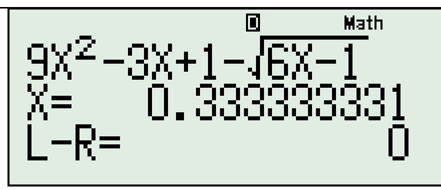
Kỹ thuật 7.3: Nghiệm hữu tỷ nguyên kép: $x^2-x+1-\sqrt{2x-1}=0$

$F(x)=x^2-x+1-\sqrt{2x-1}$ Start = 0.5, End = 7, Step = 0.5 Thấy ngay nghiệm x = 1 **Nghiệm kép qua mốc 0 hàm số quay về dấu cũ ban đầu**	

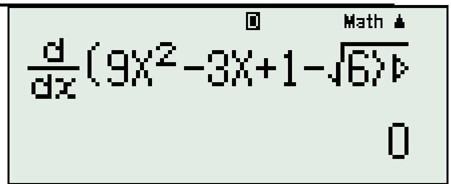
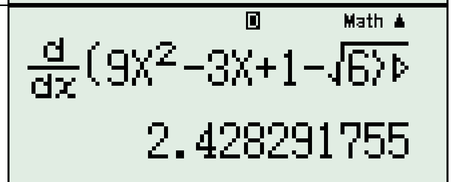
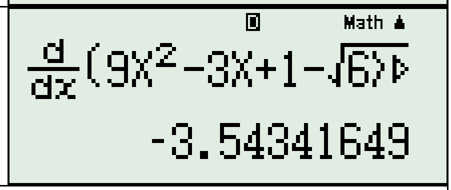
Nguyên tắc xử lý:

- Cách 1: Đặt $\sqrt{\ }=ax+b$. Giải hệ: $\begin{cases}\left.\sqrt{\ }=ax+b\right\|_{x=x_0}\\ \left.\left(\sqrt{\ }\right)'=a\right\|_{x=x_0}\end{cases}$
- Cách 2: Sử dụng ghép hằng đẳng thức.
- Cách 3: Sử dụng AM – GM
- Cách 4: Chia đa thức bằng máy tính Casio sau khi tìm ra liên hợp.

Kỹ thuật 7.4: Nghiệm hữu tỷ không nguyên kép: $9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}=0$

$F(x)=9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}$ Start = 0, End = 5, Step = 0.5. Có lẽ nào phương trình đã cho lại có thể vô nghiệm sao? **Thực tế nghiệm kép không nguyên TABLE không bao giờ nhìn thấy được (trừ khi ăn may)**	
Với loại nghiệm này nên kiểm tra bằng SOLVE. SOLVE ra được x = $\frac{1}{3}$ $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm kép nếu:	

$$\begin{cases}\left.\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\right|_{x=\frac{1}{3}}=0\\ \left(\left.\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\right|_{x=\frac{1}{3}+0.1}\right)\left(\left.\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\right|_{x=\frac{1}{3}-0.1}\right)<0\end{cases}$$

$\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\Big\vert_{x=\frac{1}{3}}=0$	
$\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\Big\vert_{x=\frac{1}{3}+0.1}=2.42>0$	
$\dfrac{d}{dx}\left(9x^2-3x+1-\sqrt{6x-1}\right)\Big\vert_{x=\frac{1}{3}-0.1}=-3.5<0$	

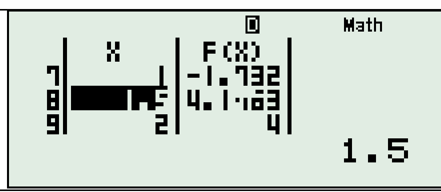
Nguyên tắc xử lý:

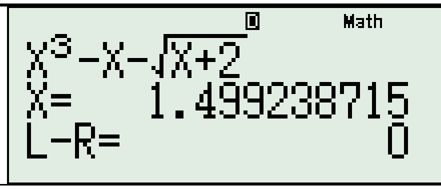
- Cách 1: Đặt $\sqrt{}=ax+b$. Giải hệ: $\begin{cases}\sqrt{}=ax+b\Big\vert_{x=x_0}\\ \left(\sqrt{}\right)'=a\Big\vert_{x=x_0}\end{cases}$
- Cách 2: Sử dụng ghép hằng đẳng thức.
- Cách 3: Sử dụng AM – GM
- Cách 4: Chia đa thức bằng máy tính Casio sau khi tìm ra liên hợp.

<u>Chú ý</u>: Có thể kiểm tra điều kiện bội 3 bằng cách sau:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big\vert_{x=a}=0\\ \left(\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big\vert_{x=a+0.1}\right)\left(\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big\vert_{x=a-0.1}\right)>0\end{cases}$$

<u>Kỹ thuật 7.5: Nghiệm vô tỷ:</u> $x^3-x-\sqrt{x+2}=0$

$F(x)=x^3-x-\sqrt{x+2}$ Start = −2, End = 7, Step = 0.5 Thấy ngay có nghiệm x trong khoảng 1 – 1.5	

Chọn 1 giá trị trong khoảng này ví dụ 1.3 SHIFT SOLVE với x = 1.3 Thu được x = 1.499238715	
Nguyên tắc xử lý: • Tìm liên hệ căn thức với x . • Chia đa thức bằng máy. • Liên hợp ngược.	

Ví dụ: Giải bất phương trình sau: $\dfrac{2x^4+2x^2}{\sqrt{x+1}}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}>x^3+2x^2+5x$

Dùng máy tính Casio dò được 2 nhân tử: $\left(2x-\sqrt{x+1}\right),\left(x-\sqrt{x+1}\right)$

Xét phép chia đa thức chứa căn:

$$\frac{\sqrt{x+1}\left(\dfrac{2x^4+2x^2}{\sqrt{x+1}}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3+2x^2+5x\right)\right)}{\left(2x-\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)}$$

- CALC $x=1$ được kết quả $4+\sqrt{2}=4+\sqrt{x+1}$.
- CALC $x=2$ được kết quả $8+2\sqrt{3}=8+2\sqrt{x+1}$.

Tìm được quy luật:

$$\frac{\sqrt{x+1}\left(\dfrac{2x^4+2x^2}{\sqrt{x+1}}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3+2x^2+5x\right)\right)}{\left(2x-\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)}=A+x\sqrt{x+1}$$

Xét $\dfrac{\sqrt{x+1}\left(\dfrac{2x^4+2x^2}{\sqrt{x+1}}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3+2x^2+5x\right)\right)}{\left(2x-\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)}-x\sqrt{x+1}$

- CALC 100 được kết quả $10102=x^2+x+2$

Vậy $\dfrac{\sqrt{x+1}\left(\dfrac{2x^4+2x^2}{\sqrt{x+1}}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3+2x^2+5x\right)\right)}{\left(2x-\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)}=x\sqrt{x+1}+x^2+x+2$.

Kỹ thuật 8: Các phương pháp nhân liên hợp Trong hệ phương trình

<u>Kỹ thuật 8.1: Ép tích liên hợp căn với căn:</u>

Ví dụ 1: Sử dụng phương pháp phân tích nhân tử giải phương trình hai biến sau: $2x^2-5xy+2y^2+\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}=0$

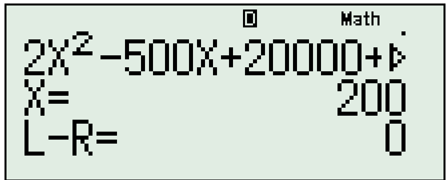
Phân tích

Bước 1: Đặt $y=100$, ta được:

$$2x^2-500x+20000+\sqrt{x+301}-\sqrt{501}=0$$

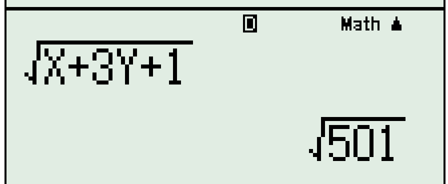
Sử dụng công cụ SOLVE ta được:

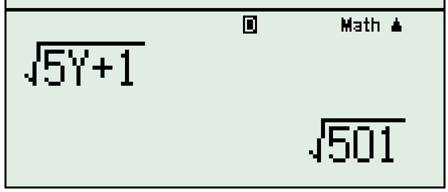
$$x=200=2.100=2y$$



Bước 2: Sử dụng công cụ CALC thay các giá trị $x=200, y=100$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=\sqrt{501}\\ \sqrt{5y+1}=\sqrt{501}\end{cases}$$





Do đó nhân tử cần tìm chính là:

$$\left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)$$

Đến đây chú ý rằng liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)\left(\sqrt{x+3y+1}+\sqrt{5y+1}\right)=x-2y$$

Do vậy ta cần tách nhân tử $(x-2y)$ từ biểu thức $\left(2x^2-5xy+2y^2\right)$.

Điều này hoàn toàn không hề khó khăn bởi:

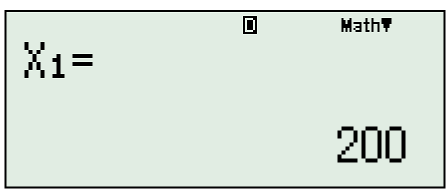
$$2x^2-5xy+2y^2=(x-2y)(2x-y)$$

<u>Chú ý:</u> Công đoạn phân tích nhân tử hai biến không chứa căn có thể được thực hiện bằng một cách khác như sau:

Đặt $y=100$, ta được:

$$2x^2-500x+20000$$

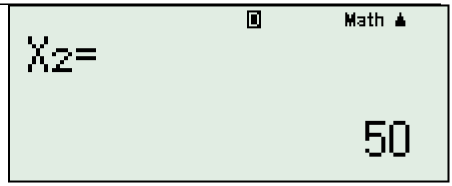
Sử dụng máy tính cầm tay giải phương trình bậc 2 ta thu được các nghiệm:



- $x_1=200=2.100=2y$
- $x_2=50=\dfrac{100}{2}=\dfrac{y}{2}$

Do đó ta có thể viết lại như sau:

$$2x^2-5xy+2y^2=(x-2y)(2x-y)$$



Bài giải

Điều kiện xác định: $x+3y+1\ge 0, 5y+1\ge 0$.

Ta có: $2x^2-5xy+2y^2+\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y)+\left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)\left(\sqrt{x+3y+1}+\sqrt{5y+1}\right)(2x-y)+\left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3y+1}-\sqrt{5y+1}\right)\left(\left(\sqrt{x+3y+1}+\sqrt{5y+1}\right)(2x-y)+1\right)=0$

Đến đây bài toán đã được phân tích nhân tử thành công.

Ví dụ 2: Sử dụng phương pháp phân tích nhân tử giải phương trình hai biến sau: $x-y-1+\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2(y+1)-1}=0$

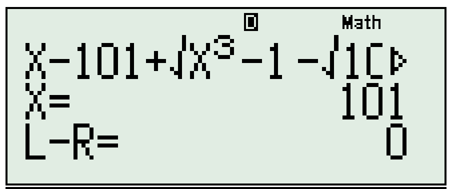
Phân tích

Bước 1: Đặt $y=100$, ta được:

$x-101+\sqrt{x^3-1}-\sqrt{101x^2-1}=0$

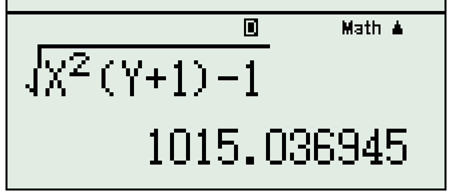
Sử dụng công cụ SOLVE ta được:

$$x=101=100+1=y+1$$



Bước 2: Sử dụng công cụ CALC thay các giá trị $x=101, y=100$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x^3-1}=1015.036945\\ \sqrt{x^2(y+1)-1}=1015.036945\end{cases}$$



Do đó nhân tử cần tìm chính là:

$$\left(\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2(y+1)-1}\right)$$

Đến đây chú ý rằng liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2(y+1)-1}\right)\left(\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2(y+1)-1}\right)=x^2(x-y-1)$$

Tuy nhiên khác với **Ví dụ 1**, trong bài toán này ta không thể tách được nhân tử $x^2(x-y-1)$ từ biểu thức $(x-y-1)$ bên ngoài. Chính vì vậy ta cần nhân hai vế với x^2, điều này là hoàn toàn có cơ sở bởi điều kiện xác định của bài toán đó là $x \geq 1$.

Chú ý: Trong các bài tập tương tự, nhóm biểu thức nhân thêm vào cần phải được khẳng định là các nhóm biểu thức luôn khác 0 với các giá trị x, y trong điều kiện xác định, bởi nếu không sẽ xuất hiện nghiệm ngoại lai không mong muốn.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \geq 1, x^2(y+1) \geq 1$.

Ta có: $x - y - 1 + \sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{x^2(y+1) - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y-1) + x^2\left(\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2(y+1)-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2(y+1)-1}\right)\left(\sqrt{x^3-1} + \sqrt{x^2(y+1)-1}\right) + x^2\left(\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2(y+1)-1}\right) = 0$$

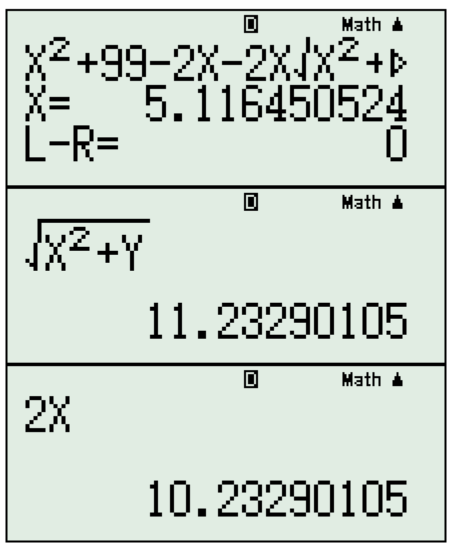
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2(y+1)-1}\right)\left(\sqrt{x^3-1} + \sqrt{x^2(y+1)-1} + 1\right) = 0$$

Đến đây bài toán đã được phân tích nhân tử thành công.

Kỹ thuật 8.2: Ép tích liên hợp căn với đa thức hai biến:

Ví dụ 3: Sử dụng phương pháp phân tích nhân tử giải phương trình hai biến sau: $x^2 + y - 2x - 1 - 2x\sqrt{x^2 + y} = 0$

Phân tích



Bước 1: Đặt $y = 100$, ta được:

$x^2 + 99 - 2x - 2x\sqrt{x^2 + 100} = 0$

Sử dụng công cụ SOLVE ta được:

$$x \approx 5.116450524$$

Bước 2: Sử dụng công cụ CALC thay các giá trị $x \approx 5.116450524, y = 100$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{x^2 + y} \approx 11.23290105$$

Chú ý rằng: $2x \approx 10.23290105$

Do đó ta có đánh giá:

$$\sqrt{x^2 + y} \approx 2x + 1$$

Vậy biểu thức cần tìm là:

$\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)$

Chú ý về liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)\left(\sqrt{x^2+y}+2x+1\right)=y-3x^2-4x-1$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x^2+y\geq 0$.

Ta có: $x^2+y-2x-1-2x\sqrt{x^2+y}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+y-2x-1\right)-2x\left(2x+1\right)-2x\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow y-3x^2-4x-1-2x\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)\left(\sqrt{x^2+y}+2x+1\right)-2x\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)=0$

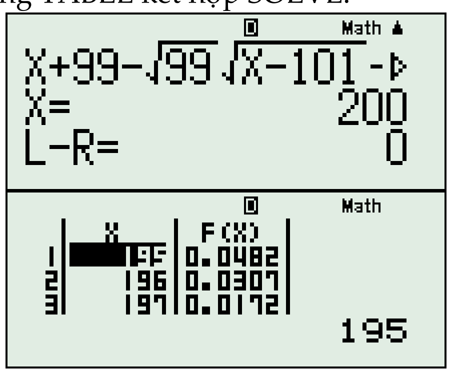
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y}-2x-1\right)\left(\sqrt{x^2+y}+1\right)=0$

Đến đây bài toán đã được phân tích nhân tử thành công.

Ví dụ 4: Sử dụng phương pháp phân tích nhân tử giải phương trình hai biến sau: $x+y-1-\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}-\sqrt{2xy}=0$

Phân tích

Trong bài toán trước chúng ta đã phân tích về cách sử dụng SOLVE để truy tìm nhân tử liên hợp, trong ví dụ này chúng ta sẽ đề cập về một dạng bài toán phân tích nhân tử mà ý tưởng của tác giả muốn chúng ta sử dụng phương pháp đánh giá. Tuy nhiên chúng ta vẫn có thể hóa giải được bằng cách phân tích nhân tử thông qua chức năng TABLE kết hợp SOLVE:



Bước 1: Đặt $y=100$, ta được:

$x+99-\sqrt{x-101}\sqrt{99}-\sqrt{200x}=0$

Sử dụng công cụ SOLVE ta thu được:

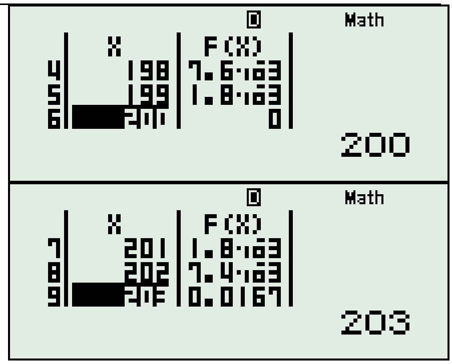
$$x=200=2.100=2y$$

Bước 2: Tuy nhiên điều cần kiểm chứng là tính chất bội của nghiệm trên. Nghiệm hữu tỷ rất có thể sẽ rơi vào trường hợp nghiệm bội, vì vậy:

Sử dụng công cụ TABLE với:

$F\left(x\right)=x+99-\sqrt{x-101}\sqrt{99}-\sqrt{200x}$

Lựa chọn START = 195, END = 205, STEP = 1 để kiểm tra, ta nhận thấy rõ rang nghiệm $x=200=2y$ là nghiệm bội kép. Tất nhiên nghiệm này có thể thu được thong qua cách sử dụng phương pháp đánh giá (Hầu như các bài toán bội kép đều có thể đánh giá được).



Tuy nhiên điểm yếu của phương pháp đánh giá là phải sử dụng đến yếu tố bất đẳng thức. Trong chuyên đề **"Ép tích"** này, chúng ta sẽ tập trung vào phương pháp phân tích nhân tử, vì vậy để có thể hóa giải bài toán trên, ta sẽ đi tìm nhân tử **giống như cách tìm nhân tử nghiệm kép cho phương trình vô tỷ một biến**.

Đặt $ax+b=\sqrt{x-101}\sqrt{99}$, để tìm ra các giá trị a,b ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax+b=\sqrt{x-101}\sqrt{99}\Big|_{x=200} \\ (ax+b)'=\left(\sqrt{x-101}\sqrt{99}\right)'\Big|_{x=200} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$$

Nhân tử cần tìm là $\left(\dfrac{1}{2}x-1-\sqrt{x-101}\sqrt{99}\right)$ hay $\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)$.

Tương tự như vậy ta sẽ tìm được nhân tử thứ hai là: $\left(x+2y-2\sqrt{2xy}\right)$.

<u>Chú ý:</u> Việc tìm nhân tử thứ hai sẽ dễ dàng hơn nếu ta hiểu rằng, sau khi tạo ra nhân tử thứ nhất, **tất cả phần còn lại sẽ tạo ra nhân tử thứ hai.**

Chú ý về liên hợp ngược:

$$\begin{cases} \left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x-2+2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)=(x-2y)^2 \\ \left(x+2y-2\sqrt{2xy}\right)\left(x+2y+2\sqrt{2xy}\right)=(x-2y)^2 \end{cases}$$

Để xây dựng được nhân tử ta cần đến kỹ thuật đảo căn liên hợp ngược.

Bài giải

Điều kiện xác định: $xy\ge 0, y\ge 1, x\ge y+1\ge 2$.

Ta có: $x+y-1-\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}-\sqrt{2xy}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)+\frac{1}{2}\left(x+2y-2\sqrt{2xy}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x+2y+2\sqrt{2xy}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(x+2y+2\sqrt{2xy}\right)\left(x+2y-2\sqrt{2xy}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x+2y+2\sqrt{2xy}\right)+\frac{1}{2}\left(x-2y\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x+2y+2\sqrt{2xy}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x-2+2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(x+2y+2\sqrt{2xy}+x-2+2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(2x+2y+2\sqrt{2xy}-2+2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)\left(\left(x-1\right)+y+\sqrt{2xy}+\sqrt{x-y-1}\sqrt{y-1}\right)=0$$

Đến đây bài toán đã được phân tích nhân tử thành công.

<u>Chú ý:</u>

- Bản chất của kỹ thuật tìm liên hợp căn với đa thức chứa hai biến chính là kỹ thuật ép tích cho bài toán nhân tử một biến trong đó một biến đã bị tham số hóa "tạm thời".
- Để giải quyết tốt các bài toán này, học sinh cần phải nắm vững được các kỹ thuật tìm nhân tử liên hợp cơ bản đã biết bao gồm:
    - Tìm nhân tử trong trường hợp có nghiệm vô tỷ đơn.
    - Tìm nhân tử trong trường hợp có nghiệm vô tỷ bội.
    - Tìm nhân tử trong trường hợp có nghiệm hữu tỷ đơn.
    - Tìm nhân tử trong trường hợp có nghiệm hữu tỷ bội.
    - Tìm nhân tử trong trường hợp có đa nghiệm hữu tỷ.

Kỹ thuật 9: Ẩn phụ không hoàn toàn

Kỹ thuật 9.1: Ẩn phụ không hoàn toàn giải phương trình vô tỷ:

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$ (1)

Đặt $\sqrt{x^3+x-1}=t$ với $t\geq 0\Rightarrow t^2=x^3+x-1$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α vậy phương trình đã cho có dạng như sau :

$\alpha t^2-\left(x^2+1\right)t+2x^2+2x+3-\alpha\left(x^3+x-1\right)=0$ (2) .

Gán giá trị cho $x=10$ khi đó (2) $\Leftrightarrow \alpha t^2-101t+223-1009\alpha=0$.

Tới đây ta tiến hành giải Δ với tham số α và với ẩn là t .

$\Delta=\left(101\right)^2-4\alpha\left(223-1009\alpha\right)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(101\right)^2-4\alpha\left(223-1009\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(101\right)^2-4\alpha\left(223-1009\alpha\right)}$.

Sử dụng TABLE tìm $\alpha\neq 0$, α nguyên sao cho $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}$ có giá trị hữu tỷ:

Xét công cụ TABLE (mode 7) cho:

$F(X)=\sqrt{\left(101\right)^2-4X\left(223-1009X\right)}$

Với các giá trị:

- START = -9 .
- END = 9.
- STEP = 1.

Khi đó ta tìm giá trị X sao cho F(X) nhận giá trị hữu tỷ và đồng thời X là giá trị khác 0.

Dựa vào bảng giá trị TABLE như trên, ta nhận thấy với X = -1 thì:

$\text{F(X)}=123=100+20+3=x^2+2x+3$

Vậy nếu lựa chọn $\alpha=1$ thì:

$$\sqrt{\Delta}=x^2+2x+3$$

X	F(X)
-9	587.4904…
-8	525.0152…
-7	462.8271…
-6	401.0598…
-5	339.9426…
-4	279.9017…
-3	221.8129…
-2	167.7170…
-1	123
0	101
1	115.5205…
2	156.7194…
3	209.4015…
4	266.8501…
5	326.5593…
6	387.4854…
7	449.1336…
8	511.2426…
9	573.6627…

Do đó, nếu ta lựa chọn: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ f(\alpha) = 123 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 123 = x^2 + 2x + 3$.

Vậy với cách đặt ẩn phụ là t và $\alpha = -1$ ta được phương trình có

$\sqrt{\Delta} = 123 = 100 + 20 + 3 = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \Delta = \left(x^2 + 2x + 3\right)^2$.

Vậy khi đó phương trình đã cho có dạng như sau:

$-t^2 - \left(x^2 + 1\right)t + \left(2x^2 + 2x + 3\right) + \left(x^3 + x - 1\right) = 0$.

$\Leftrightarrow -t^2 - \left(x^2 + 1\right)t + \left(x^3 + 2x^2 + 3x + 2\right) = 0$.

$\Rightarrow \Delta = \left(x^2 + 1\right)^2 - 4\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 2\right) = \left(x^2 + 2x + 3\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \left(x^2 + 2x + 3\right)$.

Khi đó, bằng công thức nghiệm của phương trình bậc 2, ta thu được hai nghiệm sau :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t &= \frac{x^2 + 1 + x^2 + 2x + 3}{-2} = -\frac{\left(x^2 + x + 2\right)}{2} \\ t &= \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x - 3}{-2} = x + 1 \end{aligned}\right.$$

Đến đây phương trình sẽ được viết dưới dạng nhân tử như sau :

$\left(t + \frac{x^2 + x + 2}{2}\right)\left(t - x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2t + x^2 + x + 2\right)\left(t - x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + 2 + 2\sqrt{x^3 + x - 1}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x^3 + x - 1}\right) = 0$

Bài giải

Điều kiên xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\left(x^2 + 1\right)\sqrt{x^3 + x - 1} = 2x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + 2 + 2\sqrt{x^3 + x - 1}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x^3 + x - 1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2\sqrt{x^3 + x - 1}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x^3 + x - 1}\right) = 0$

Vì $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2\sqrt{x^3 + x - 1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ do đó:

$$\sqrt{x^3+x-1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2=(x+1)^2\\ x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^3+x-1\right)=x^2+2x+1\\ x+1\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-x^2-x-2=0\\ x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)\left(x^2+x+1\right)=0\\ x+1\ge 0\end{cases} \Rightarrow x=2$$

Kỹ thuật 9.2: Ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình vô tỷ:

Ví dụ : Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2}=2y-x\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Chuyên Hưng Yên)

Điều kiện: $y\ge -1$.

Ta có: $(1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2y^2\right)+(1-y)\sqrt{x^2+2y^2}-\left(x^2+2y^2+x+2y+3xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2y^2\right)+(x+y+1)\sqrt{x^2+2y^2}-(x+2y)\sqrt{x^2+2y^2}-(x+2y)(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2y^2}\left(\sqrt{x^2+2y^2}+x+y+1\right)-(x+2y)\left(\sqrt{x^2+2y^2}+x+y+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2y^2}+x+y+1\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2}-x-2y\right)=0(*)$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2+2y^2}=-x-y-1$, thay vào phương trình hai ta có:

$$\sqrt{y+1}=3y+1 \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge -\dfrac{1}{3}\\ 9y^2+5y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=-x-1 \text{ (vô nghiệm).}$$

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y$, kết hợp với phương trình hai ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{y+1}=-2x\\ \sqrt{x^2+2y^2}=x+2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Phân tích

Việc tách nhân tử như trong bài toán trên là không hề đơn giản:

$(1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+2y^2}+x+y+1\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2}-x-2y\right)=0\left(*\right)$$

Để có thể tách nhân tử như thế, ta có thể sử dụng kỹ thuật đặt ẩn phụ không hoàn toàn cho hai biến như sau:

Đặt $t=\sqrt{x^2+2y^2}$, khi đó ta giả sử tồn tại số α sao cho:

$$\left(1-y\right)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy$$

$$\Leftrightarrow\alpha\left(x^2+2y^2\right)+\left(1-y\right)\sqrt{x^2+2y^2}-\alpha\left(x^2+2y^2\right)-\left(x+2y+3xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\alpha t^2+\left(1-y\right)t-\alpha\left(x^2+2y^2\right)-\left(x+2y+3xy\right)=0$$

Phương trình bậc hai ẩn t, hai tham số x,y cần tìm hệ số α sao cho phương trình này có biệt thức:

$$\Delta=\left(1-y\right)^2+4\alpha\left[\alpha\left(x^2+2y^2\right)+\left(x+2y+3xy\right)\right]$$

là một hằng đẳng thức theo các giá trị x,y. Để làm được điều đó, ta gán các giá trị như sau:

Đặt $x=100, y=\dfrac{1}{100}$, ta có: $\Delta=\dfrac{9801}{10000}+\dfrac{400000004\alpha^2}{10000}+\dfrac{10302\alpha}{25}$

Khi đó ta tìm giá trị α sao cho:

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{9801}{10000}+\frac{400000004\alpha^2}{10000}+\frac{10302\alpha}{25}}$$

có giá trị là một số hữu tỷ. Để làm được điều đó ta sử dụng công cụ quen thuộc đó là TABLE:

Xét công cụ TABLE (mode 7) cho:

$$F(X)=\sqrt{\frac{9801}{10000}+\frac{400000004X^2}{10000}+\frac{10302X}{25}}$$

Với các giá trị: START = -9, END = 9, STEP = 1.

Khi đó ta tìm giá trị X sao cho F(X) nhận giá trị hữu tỷ và đồng thời X khác 0.

Dựa vào bảng giá trị TABLE như trên, ta nhận thấy với X = 1 thì:

$$\mathrm{F(X)}=201.03=200+1+\frac{3}{100}=2x+3y+1$$

Vậy nếu lựa chọn $\alpha=1$ thì:

$$\sqrt{\Delta}=\left|2x+3y+1\right|$$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm:

X	F(X)
-9	1798.9697…
-8	598.9697…
-7	1398.9697…
-6	1198.9697…
-5	998.9697…
-4	798.9697…
-3	598.9697…
-2	398.9697…
-1	198.9697…
0	$\dfrac{99}{100}$
1	201.03
2	401.0301…
3	601.0301…

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{y-1+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ t=\dfrac{y-1-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{y-1+2x+3y+1}{2} \\ t=\dfrac{y-1-2x-3y-1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $t=x+2y \vee t=-x-y-1$

4	801.0301…
5	1001.0301…
6	1201.0301…
7	1401.0301…
8	1601.0301…
9	1801.0301…

Do vậy phương trình được viết lại thành: $\left(t-x-2y\right)\left(t+x+y+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+2y^2}+x+y+1\right)\left(\sqrt{x^2+2y^2}-x-2y\right)=0$

ĐOÀN TRÍ DŨNG

KÍNH LÚP TABLE

TẬP 7: PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM BỘI KÉP TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Follow excellence success will chase you!

ĐỪNG BAO GIỜ ĐỂ NHỮNG GIẤC MƠ MÃI MÃI CHỈ LÀ NHỮNG GIẤC MƠ NHÉ, CÁC EM!

I. Giới thiệu về phương pháp:

Giả sử bài toán có điều kiện: $f(a)+f(b)+f(c)=k$. Khi đó:

Nếu muốn tìm giá trị nhỏ nhất của $P=g(a)+g(b)+g(c)$, ta tìm các hệ số α,β sao cho: $\begin{cases} g(a)+\alpha f(a)+\beta \geq 0 \\ g(b)+\alpha f(b)+\beta \geq 0 \\ g(c)+\alpha f(c)+\beta \geq 0 \end{cases}$. Khi đó: $P \geq \alpha k+\beta$.

Nếu muốn tìm giá trị lớn nhất của $P=g(a)+g(b)+g(c)$, ta tìm các hệ số α,β sao cho: $\begin{cases} g(a)+\alpha f(a)+\beta \leq 0 \\ g(b)+\alpha f(b)+\beta \leq 0 \\ g(c)+\alpha f(c)+\beta \leq 0 \end{cases}$. Khi đó: $P \geq \alpha k+\beta$.

Để tìm ra các hệ số α,β, ta giải hệ : $\begin{cases} g(x)+\alpha f(x)+\beta = 0\Big|_{x=\xi} \\ \left(g(x)+\alpha f(x)+\beta\right)' = 0\Big|_{x=\xi} \end{cases}$

Trong đó, ξ là giá trị điểm rơi của bài toán cần tìm.

Ta gọi hệ trên là hệ đánh giá hệ số nghiệm bội.

Để chứng minh đánh giá trên, ta sử dụng phép biến đổi tương đương:

$$g(x)+\alpha f(x)+\beta=(x-\xi)^2 h(x)$$

Chú ý: Phương pháp tiếp tuyến là một dạng của phương pháp này.

II. Bài tập ví dụ:

Ví dụ: Cho $a,b,c>0$ và $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}$$

Phân tích

- Điểm rơi: $a=b=c=$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\frac{x^3}{x^2+x+1}+\alpha\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+\beta \geq 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\frac{8}{9},\beta=\frac{1}{9}$.

Bài giải

Ta có: $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{8x^2}{9\left(x+1\right)}+\frac{1}{9}=\frac{\left(x^2+4x+1\right)\left(x-1\right)^2}{9\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)}\ge 0\forall x>0$.

Do đó: $P=f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\right)-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P\ge\frac{8}{9}\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\right)-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 1 khi $a=b=c=1$.

III. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho $a,b,c>0$ và $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}$$

Phân tích

- Điểm rơi: $a=b=c=1\Rightarrow\xi=1$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\frac{x^2}{x+1}+\alpha\left(\frac{x}{x+2}\right)+\beta\ge 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\frac{27}{8},\beta=\frac{5}{8}$.

Bài giải

Ta có: $f\left(x\right)=\frac{x^2}{x+1}-\frac{27}{8}\left(\frac{x}{x+2}\right)+\frac{5}{8}=\frac{\left(8x+10\right)\left(x-1\right)^2}{8\left(x+1\right)\left(x+2\right)}>0,\forall x>0$.

Do đó: $P=f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+\frac{27}{8}\left(\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\right)-\frac{15}{8}$

$\Rightarrow P\ge\frac{27}{8}\left(\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\right)-\frac{15}{8}\Leftrightarrow P\ge\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là $\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 2: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=a^3+b^3+c^3-(a-1)\sqrt{a+3}-(b-1)\sqrt{b+3}-(c-1)\sqrt{c+3}$$

Phân tích

- Điểm rơi: $a=b=c=$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $x^3-(x-1)\sqrt{x+3}+\alpha x+\beta\geq 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-1,\beta=0$.

Bài giải

Ta có: $f(x)=x^3-(x-1)\sqrt{x+3}-x=(x-1)\left(x^2+x-\sqrt{x+3}\right)$

$=(x-1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left((x+2)\sqrt{x+3}+2x+3\right)$

$=\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left((x+2)\sqrt{x+3}+2x+3\right)\geq 0\forall x>0$.

Do đó: $P=f(a)+f(b)+f(c)+(a+b+c)\geq 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 3 khi $a=b=c=1$.

Bài 3: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2+a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^4}{a^2+1}+\frac{b^4}{b^2+1}+\frac{c^4}{c^2+1}$$

Phân tích

- Điểm rơi: $a=b=c=$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\frac{x^4}{x^2+1}+\alpha\left(x^2+x\right)+\beta\geq 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2}$.

Bài giải

Ta có: $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}-\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)+\frac{1}{2}=\frac{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}{2\left(x^2+1\right)}\geq 0,\forall x>0$.

Do đó: $P=f(a)+f(b)+f(c)+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+a+b+c\right)-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là $\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 4: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{(a+b)^3}{2(a+b)^2+1}+\dfrac{(b+c)^3}{2(b+c)^2+1}+\dfrac{(c+a)^3}{2(c+a)^2+1}$.

Phân tích

- Biến đổi lại điều kiện của biểu thức:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=12$$

- Điểm rơi: $a+b=b+c=c+a=2 \Rightarrow \xi=2$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\dfrac{x^3}{2x^2+1}+\alpha x^2+\beta\le 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\dfrac{11}{81},\beta=-\dfrac{28}{81}$.

Bài giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2+1}-\dfrac{11}{81}x^2-\dfrac{28}{81}=-\dfrac{(22x^2+7x+7)(x-2)^2}{81(2x^2+1)}\le 0,\forall x>0$.

$\Rightarrow P=f(a+b)+f(b+c)+f(c+a)+\dfrac{11}{81}\left((a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right)+\dfrac{28}{27}\le\dfrac{8}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của của P là $\dfrac{8}{3}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 5: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}$$

Phân tích

- Biến đổi lại điều kiện của biểu thức: $abc=1\Rightarrow \ln a+\ln b+\ln c=0$
- Điểm rơi: $a=b=c=1\Rightarrow \xi=1$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}+\alpha\ln x+\beta\ge 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\dfrac{2}{3},\beta=-\dfrac{1}{3}$.

Bài giải

Xét: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{3}$, với $x\in(0;+\infty)$. Khi đó ta có:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{2}{3x}=\frac{(x-1)\left(3x^4+7x^3+12x^2+6x+2\right)}{3\left(x^2+x+1\right)^2x}$$

Sử dụng khảo sát bảng biến thiên của hàm số ta được $f(x)\ge f(1)=0$.

Vậy: $P=f(a)+f(b)+f(c)+\frac{2}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)+1\ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 1 khi $a=b=c=1$.

Bài 6: Cho $a,b,c>0$ và $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=27$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2$.

Phân tích

- Biến đổi lại điều kiện của biểu thức:

$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=27\Rightarrow\ln\left(a^2+2\right)+\ln\left(b^2+2\right)+\ln\left(c^2+2\right)=3\ln 3$

- Điểm rơi: $a=b=c=1\Rightarrow\xi=1$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $x^3+x^2+\alpha\ln\left(x^2+2\right)+\beta\ge 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\frac{15}{2},\beta=\frac{15\ln 3}{2}-2$.

Bài giải

Xét: $f(x)=x^3+x^2-\frac{15}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{15\ln 3}{2}-2$, với $x\in(0;+\infty)$. Khi đó ta có:

$$f'(x)=3x^2+2x-\frac{15x}{x^2+2}=\frac{\left(3x^3+5x^2+11x\right)(x-1)}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

Sử dụng khảo sát bảng biến thiên của hàm số ta được $f(x)\ge f(1)=0$.

$\Rightarrow P=f(a)+f(b)+f(c)+\frac{15}{2}\left(\ln\left(a^2+2\right)+\ln\left(b^2+2\right)+\ln\left(c^2+2\right)\right)+6-\frac{45\ln 3}{2}$.

$\Rightarrow P\ge 6$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 6 khi $a=b=c=1$.

Bài 7: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=a+b+c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$.

Phân tích

- Biến đổi lại biểu thức: $\ln P=\ln\left(a^2+1\right)+\ln\left(b^2+1\right)+\ln\left(c^2+1\right)$

- Điểm rơi: $a=b=c=1 \Rightarrow \xi=1$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\ln\left(x^2+1\right)+\alpha\left(x^2-x\right)+\beta \le 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-1, \beta=-\ln 2$.

Bài giải

Xét: $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+1\right)-2\left(x^2-x\right)-\ln 2$, với $x \in \left(0;+\infty\right)$. Khi đó ta có:

$$f'\left(x\right)=\frac{2x}{x^2+1}-2x+1=-\frac{\left(2x^2+x+1\right)\left(x-1\right)}{x^2+1} \Rightarrow f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Sử dụng khảo sát bảng biến thiên của hàm số ta được $f\left(x\right) \le f\left(1\right)=0$.

$\Rightarrow \ln P = f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+2\left(a^2+b^2+c^2-a-b-c\right)+3\ln 2 \le \ln 8$.

$\Rightarrow P \le 8$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của của P là 8 khi $a=b=c=1$.

Bài 8: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\frac{a^3}{a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{b^3}{b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{c^3}{c^2+\left(a+b\right)^2}$$

Phân tích

- Biến đổi lại biểu thức: $P=\frac{a^3}{a^2+\left(3-a\right)^2}+\frac{b^3}{b^2+\left(3-b\right)^2}+\frac{c^3}{c^2+\left(3-c\right)^2}$
- Điểm rơi: $a=b=c=1 \Rightarrow \xi=1$.
- Đánh giá cần tìm: Chọn α,β sao cho: $\frac{x^3}{x^2+\left(3-x\right)^2}+\alpha x+\beta \le 0$
- Nghiệm của hệ đánh giá hệ số nghiệm bội: $\alpha=-\frac{17}{25}, \beta=\frac{12}{25}$.

Bài giải

Xét: $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+\left(3-x\right)^2}-\frac{17}{25}x+\frac{12}{25}=-\frac{9\left(x-12\right)\left(x-1\right)^2}{25\left(2x^2-6x+9\right)} \le 0 \forall x \in \left(0;3\right)$

Khi đó: $P=f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+\frac{17}{25}\left(a+b+c\right)-\frac{36}{25} \le \frac{3}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

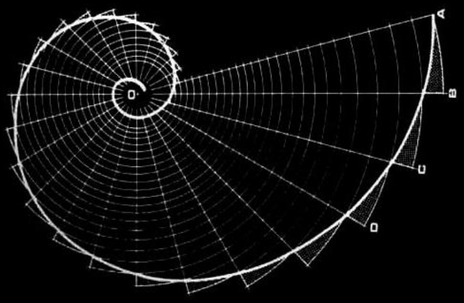
Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của của P là $\frac{3}{5}$ khi $a=b=c=1$.

NGUYỄN SƠN HÀ
(Giáo viên Trường THPT Chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội)

Thầy của Casio Man

KÍNH LÚP TABLE

Tập 8



$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6180339887498948482045868343656$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 NGHIỆM VÔ TỶ

CASIOMEN.COM
WEBSITE CASIO HÀNG ĐẦU VIỆT NAM

TUYỂN CHỌN PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA KHÓ TÌM NGHIỆM CHÍNH XÁC BẰNG MỘT SỐ MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ HIỆN NAY

(Bài viết dành cho học sinh từ lớp 9 đến lớp 12)

NGUYỄN SƠN HÀ, GV TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Bài viết cho học sinh lớp 9 ôn thi vào 10, học sinh THPT ôn thi vào đại học.

Hiện nay, rất nhiều tài liệu giới thiệu kinh nghiệm sử dụng máy tính để giải phương trình. Bài viết này giới thiệu phương trình bậc ba khó tìm nghiệm chính xác bằng một số máy tính điện tử hiện nay. Kiến thức chuẩn bị để đọc bài viết đó là:

- Hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Căn bậc ba của một số thực.

Trong bài viết này, tác giả sắp xếp thứ tự các bài từ dễ đến khó để các học sinh lớp 9 học lực trung bình có thể theo dõi được.

Bài 1. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3+3x^2+3x-1=0$

$x^3+3x^2+3x-1=0$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=2$

$\Leftrightarrow (x+1)^3=2$

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}-1.$

Bài 2. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3-3x^2+3x-3=0$

$x^3-3x^2+3x-3=0$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=2$

$\Leftrightarrow (x-1)^3=2$

$\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}+1.$

Bài 3. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3+6x^2+12x-1=0$

$x^3+6x^2+12x-1=0$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2.2+3x.2^2+2^3=9$

$\Leftrightarrow (x+2)^3=9$

$\Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{9}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9} - 2.$

Bài 4. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 1 = 0$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2.2 + 3x.2^2 - 2^3 = -7$

$\Leftrightarrow (x-2)^3 = -7$

$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{-7}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-7} + 2.$

Bài 5. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3 + 9x^2 + 27x - 1 = 0$

$x^3 + 9x^2 + 27x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2.3 + 3x.3^2 + 3^3 = 28$

$\Leftrightarrow (x+3)^3 = 28$

$\Leftrightarrow x + 3 = \sqrt[3]{28}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{28} - 3.$

Bài 6. Tìm nghiệm thực của phương trình $x^3 - 9x^2 + 27x - 1 = 0$

$x^3 + 9x^2 + 27x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2.3 + 3x.3^2 - 3^3 = -26$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = -26$

$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt[3]{26}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-26} + 3.$

Bài 7. Tìm nghiệm thực của phương trình $8x^3 + 12x^2 + 6x - 1 = 0$

$8x^3 + 12x^2 + 6x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x)^3 + 3(2x)^2 + 3.(2x) + 1 = 2$

$\Leftrightarrow (2x+1)^3 = 2$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt[3]{2} - 1}{2}.$

Bài 8. Tìm nghiệm thực của phương trình $8x^3-12x^2+6x-3=0$

$8x^3-12x^2+6x-3=0$

$\Leftrightarrow (2x)^3-3(2x)^2+3.(2x)-1=2$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3=2$

$\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{2}.$

Bài 9. Tìm nghiệm thực của phương trình $8x^3+60x^2+150x-2=0$

$8x^3+60x^2+150x-2=0$

$\Leftrightarrow (2x)^3+3(2x)^2.5+3.(2x).5^2+5^3=127$

$\Leftrightarrow (2x+5)^3=127$

$\Leftrightarrow 2x+5=\sqrt[3]{127}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{127}-5}{2}.$

Bài 10. Tìm nghiệm thực của phương trình $8x^3-60x^2+150x-2=0$

$8x^3-60x^2+150x-2=0$

$\Leftrightarrow (2x)^3-3(2x)^2.5+3.(2x).5^2-5^3=-123$

$\Leftrightarrow (2x-5)^3=-123$

$\Leftrightarrow 2x-5=\sqrt[3]{-123}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{-123}+5}{2}.$

Bài 11. Tìm nghiệm thực của phương trình $5x^3+3x^2+3x+1=0$

$5x^3+3x^2+3x+1=0$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=-4x^3$

$\Leftrightarrow (x+1)^3=-4x^3$

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{-4}.x$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt[3]{-4}\right)x=-1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{1-\sqrt[3]{-4}}$

Bài 12. Tìm nghiệm thực của phương trình $6x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

$6x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -5x^3$
$\Leftrightarrow (x-1)^3 = -5x^3$
$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-5}x$
$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt[3]{-5}\right)x = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{-5}}$

Bài 13. Tìm nghiệm thực của phương trình $10x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

$10x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$
$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2.2 + 3x.2^2 + 2^3 = -9x^3$
$\Leftrightarrow (x+2)^3 = -9x^3$
$\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{-9}x$
$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt[3]{-9}\right)x = -2$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{1-\sqrt[3]{-9}}$

Bài 14. Tìm nghiệm thực của phương trình $10x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = 0$

$10x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = 0$
$\Leftrightarrow (2x)^3 - 3(2x)^2.5 + 3.(2x).5^2 - 5^3 = -2x^3$
$\Leftrightarrow (2x-5)^3 = -2x^3$
$\Leftrightarrow 2x - 5 = \sqrt[3]{-2}x$
$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt[3]{-2}\right)x = 5$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2-\sqrt[3]{-2}}$

Bài 15. Tìm nghiệm thực của phương trình $4x^3+6x^2+3x-2=0$.

$$4x^3+6x^2+3x-2=0$$
$$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2+6x-4=0$$
$$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2+6x+1=5$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^3=5$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt[3]{5}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{5}-1}{2}$$

Bài 16. Tìm nghiệm thực của phương trình $5x^3+x^2+3x+3=0$;

$$5x^3+x^2+3x+3=0$$
$$\Leftrightarrow 45x^3+9x^2+27x+27=0$$
$$\Leftrightarrow x^3+9x^2+27x+27=-44x^3$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^3=-44x^3$$
$$\Leftrightarrow x+3=\sqrt[3]{-44}x$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt[3]{-44}\right)x=-3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-3}{1-\sqrt[3]{-44}}$$

Bài 15 và bài 16 khó hơn so với 14 bài trước.

Bài 15 là trường hợp riêng của phương trình tổng quát

$$(ax+b)^3=c \Leftrightarrow ax+b=\sqrt[3]{c} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{c}-b}{a}\,(a\neq 0)$$

Bài 16 là trường hợp riêng của phương trình tổng quát

$$(ax+b)^3=cx^3 \Leftrightarrow ax+b=\sqrt[3]{c}x \Leftrightarrow x=\frac{-b}{a-\sqrt[3]{c}}\left(a\neq\sqrt[3]{c}\right)$$

Khó khăn ở đây: Làm thế nào để biến đổi xuất hiện lập phương của nhị thức bậc nhất a.x+b? Có thể mò mẫm và dự đoán các số a, b được không?

Chúng ta cùng quan sát đại lượng không thay đổi khi biến đổi ngược cả hai dạng phương trình nói trên

$\left(ax+b\right)^3=c$	
$\Leftrightarrow a^3x^3+3a^2bx+3ab^2x+b^3=c$	Hệ số bậc 2, bậc 1 không đổi
$\Leftrightarrow a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3-c=0$	Hệ số bậc 2, bậc 1 không đổi
$\Leftrightarrow x^3+3\frac{b}{a}x+3\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^3-c}{a^3}=0$	Tỉ số Hệ số bậc 2/bậc 1 không đổi và bằng $\frac{b}{a}:\frac{b^2}{a^2}=\frac{b}{a}.\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}$ Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\frac{bx^2}{a}:\frac{b^2x}{a^2}=\frac{bx^2}{a}.\frac{a^2}{b^2x}=\frac{ax}{b}$ Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là ax/b

$\left(ax+b\right)^3=cx^3$	
$\Leftrightarrow a^3x^3+3a^2bx+3ab^2x+b^3=cx^3$	Hệ số bậc 2, bậc 1 không đổi
$\Leftrightarrow \left(a^3-c\right)x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3=0$	Hệ số bậc 2, bậc 1 không đổi
$\Leftrightarrow x^3+3\frac{a^2b}{a^3-c}x+3\frac{ab^2}{a^3-c}x^2+\frac{b^3}{a^3-c}=0$	Tỉ số Hệ số bậc 2/bậc 1 không đổi và bằng $\frac{a^2b}{a^3-c}:\frac{ab^2}{a^3-c}=\frac{a^2b}{a^3-c}.\frac{a^3-c}{ab^2}=\frac{a}{b}$ Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\frac{bx^2}{a^3-c}:\frac{b^2x}{a^3-c}=\frac{bx^2}{a^3-c}.\frac{a^3-c}{b^2x}=\frac{ax}{b}$ Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là ax/b

Như vậy, trong hai dạng phương trình ở tài liệu này, có đặc điểm chung như sau
Nếu tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là ax/b thì ta biến đổi để xuất hiện lập phương của ax+b

Bài 15. Tìm nghiệm thực của phương trình $4x^3+6x^2+3x-2=0.$

Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\dfrac{6x^2}{3x}=\dfrac{2x}{1}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của 2x+1, nếu nhân hai vế với 2 thì có biểu thức lập phương của 2x+1

Bài 16. Tìm nghiệm thực của phương trình $5x^3+x^2+3x+3=0$;

Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\dfrac{x^2}{3x}=\dfrac{x}{3}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của x+3, nếu nhân hai vế với 2 thì có biểu thức lập phương của x+3

Bài 17. Tìm nghiệm thực của phương trình
$11x^3-12x^2-18x-9=0.$
Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\dfrac{-12x^2}{-18x}=\dfrac{2x}{3}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của $2x+3$, nếu nhân hai vế với 2 thì có biểu thức lập phương của $2x+3$.
$(2x+3)^3=8x^3+36x^2+54x+27$
Lời giải
$11x^3-12x^2-18x-9=0$
$\Leftrightarrow 33x^3-36x^2-54x-27=0$
$\Leftrightarrow 41x^3=8x^3+36x^2+54x+27$
$\Leftrightarrow 41x^3=(2x+3)^3$
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{41}x=2x+3$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{41}-3}$

Bài 18. Tìm nghiệm thực của phương trình
$4x^3-27x^2-36x-16=0$

Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\frac{-27x^2}{-36x}=\frac{3x}{4}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của $3x+4$, nếu nhân hai vế với 4 thì có biểu thức lập phương của $3x+4$.

$\left(3x+4\right)^3=27x^3+108x^2+144x+64$

Lời giải

$4x^3-27x^2-36x-16=0$

$\Leftrightarrow 16x^3-108x^2-144x-64=0$

$\Leftrightarrow 43x^3=27x^3+108x^2+144x+64$

$\Leftrightarrow 43x^3=\left(3x+4\right)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{43}x=3x+4$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{\sqrt[3]{43}-3}$

Bài 19. Tìm nghiệm thực của phương trình

$x^3+12x^2-42x+49=0$

Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\frac{12x^2}{-42x}=\frac{2x}{-7}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của $2x-7$, nếu nhân hai vế với 4 thì có biểu thức lập phương của $2x-7$.

$\left(2x-7\right)^3=8x^3-84x^2+294x-343$

Lời giải

$x^3+12x^2-42x+49=0$

$\Leftrightarrow 7x^3+84x^2-294x+343=0$

$\Leftrightarrow 15x^3=8x^3-84x^2+294x-343$

$\Leftrightarrow 15x^3=\left(2x-7\right)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{15}x=2x-7$

$\Leftrightarrow x=\frac{-7}{\sqrt[3]{15}-2}$

Bài 20. Tìm nghiệm thực của phương trình

$10x^3+75x^2-30x+4=0$

Tỉ lệ bậc hai/bậc nhất là $\frac{75x^2}{-30x}=\frac{5x}{-2}$. Biến đổi để xuất hiện lập phương của

$5x-2,$ nếu nhân hai vế với 2 thì có biểu thức lập phương của $5x-2.$

$(5x-2)^3 = 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$

Lời giải

$10x^3 + 75x^2 - 30x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 20x^3 + 150x^2 - 60x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 145x^3 = 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$

$\Leftrightarrow 145x^3 = (5x-2)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{145}x = 5x - 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{145} - 5}$

Phương pháp trên không phải là vạn năng, nó chỉ giúp các học sinh giải được một số phương trình bậc ba có thể biến đổi xuất hiện các đại lượng trong hằng đẳng thức đáng nhớ, trong đó có những phương trình bậc ba khó tìm nghiệm chính xác bằng một số máy tính điện tử hiện nay. Với phương pháp này, có thể giải được một số phương trình bậc cao khác, ví dụ

Tìm nghiệm thực của phương trình $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 1.$

Tìm nghiệm thực của phương trình $x^4 = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Với các học sinh lớp 11, 12, các em có thể tìm hiểu Phương pháp Cardano, phương pháp lượng giác để giải phương trình bậc ba

---

Địa chỉ online https://vi.wikipedia.org/wiki/Phương_trình_bậc_ba

KÍNH LÚP TABLE
TẬP 9

Tuyển tập các phương pháp hay trong giải toán Trung học phổ thông quốc gia
(Tháng 1 – Tháng 2 năm 2016)

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 01:
Mở rộng số biến trên bảng TABLE
Tác giả: NGUYỄN PHAN KIM HIẾU
(Chỉ áp dụng với FX 570 VN PLUS, VINACAL)

Bảng TABLE bị hạn hẹp là một trong những nguyên nhân khiến học sinh khó tiếp cận tìm ra các nghiệm của phương trình. Hôm nay, tôi xin giới thiệu với các bạn một cách để mở rộng bảng số TABLE như sau:

Bước 1: Bấm SHIFT MODE	1:MthIO 2:LineIO 3:Deg 4:Rad 5:Gra 6:Fix 7:Sci 8:Norm
Bước 2: Bấm nút xuống	1:ab/c 2:d/c 3:CMPLX 4:STAT 5:TABLE 6:Rdec 7:Disp 8:◀CONT▶
Bước 3: Chọn TABLE Chọn f(x). Sau đó bấm ON.	Select Type? 1:f(x) 2:f(x),g(x)

Như vậy bảng TABLE đã được mở rộng thêm 10 hạng tử và giúp chúng ta thoải mái hơn trong việc tìm điều kiện.
Chẳng hạn chúng ta có thể lựa chọn các miền sau:
MIỀN 1: Start = -14, End = 14, Step = 1.
MIỀN 2: Start = -7, End = 7, Step = 0.5.

CHỦ ĐỀ 2:
Vận dụng máy tính Casio giải bài toán số phức.
Tác giả: BÙI THẾ LÂM

Ví dụ 1: Cho số phức Z thoả mãn: $\frac{2\left(\bar{Z}-2i\right)}{Z-1}=3-i$.Tính modun $w=1+Z+Z^2$.

Đặt $Z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó ta có:

$2a+2(b-2)i=(3-i)(a-1+bi)(1)$

(1) sẽ được giải bằng casio như sau.
Ta hiểu a là X và b là Y trong máy tính. Gán X=1000.Y=100 sau đó khởi tạo số phức bằng Mode 2.
Nhập: $2\left(X+(Y-2)i\right)-(3-i)(X-1+Yi)$ ấn bằng máy hiện ra -1097+895i

Tức là : $\begin{cases}-1097=-a-b+3\\895=a-b-5\end{cases}$

có hệ $\Rightarrow\begin{cases}-a-b+3=0\\a-b-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}\rightarrow Z=4-i$.

Ví dụ 2: Tìm số phức z thỏa mãn: $(Z+1)(i+1)+\frac{\bar{Z}-1}{1-i}=|Z|^2$

Đặt $Z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó ta có:

$(a+bi+1)(i+1)+\frac{a-1-bi}{1-i}=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)(1-i)-(1+i)(1-i)(a+bi+1)-a+bi+1=0$

Chúng ta thực hiện tương tự như VD 1 nhưng ở đây khác ở chỗ CALC với X=1000 và Y=1/100. Tương tự Ví dụ 1 ta được kết quả: $996999{,}0001+999999{,}9901i$

Nháp: $\begin{cases} 996999,0001 = X^2 - 3X + Y^2 - 1 = a^2 - 3a + b^2 - 1 \\ 999999,9901 = X^2 + Y^2 - Y = a^2 + b^2 - b \end{cases}$

Có hệ: $\begin{cases} a^2 - 3a + b^2 - 1 = 0 \\ a^2 + b^2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{-3}{10} \\ b = \dfrac{1}{10} \end{cases} \end{array} \right.$

Vậy: $Z = i; Z = \dfrac{-3}{10} + \dfrac{i}{10}$

Nếu các bạn CALC với X=1000 và Y=100 như ví dụ 1 sẽ rất dễ sai sót. Kinh nghiệm cho thấy nếu có bậc 2 trở lên thì ta làm giống ví dụ 2, còn bậc nhất thì như ví dụ 1.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho Z thỏa: $\bar{Z}(1-i) + (2Z-1)(1+i) = 1-i$ Tìm modun của số phức $W = \dfrac{Z-1}{Z+1}$.

Bài 2: Tìm Z thỏa mãn: $Z^2 - 2\bar{Z} = |Z|^2$.

Bài 3: Tìm số phức Z có phần thực dương thỏa mãn: $|Z|^2 - iZ = (1+2i)\bar{Z}$

Bài 4: Tìm số phức Z thỏa: $Z - \dfrac{4}{\bar{Z}+1} = i$.

CHỦ ĐỀ 03:
Chia đa thức có dư bằng máy tính Casio.
Tác giả: VÍCH BẢO NGUYỄN – ADMIN CASIOMEN

Phương pháp này chắc hẳn nhiều người biết nên mình không dám nhận là mình sáng tạo ra. Song mình sẽ chia sẻ cho mọi người biết. Phương pháp này cực lợi hại trong các bài toán tính tích phân và nhiều bài toán khác.

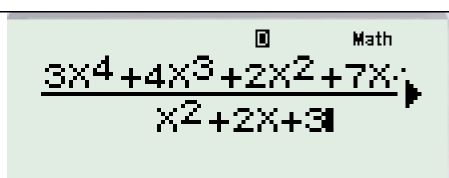
Nguyên lý: Khi chia một biểu thức cho một biểu thức, calc x=1000, phần nguyên là phần nằm trước dấu "," còn phần dư sẽ là phần nằm sau dấu phẩy.

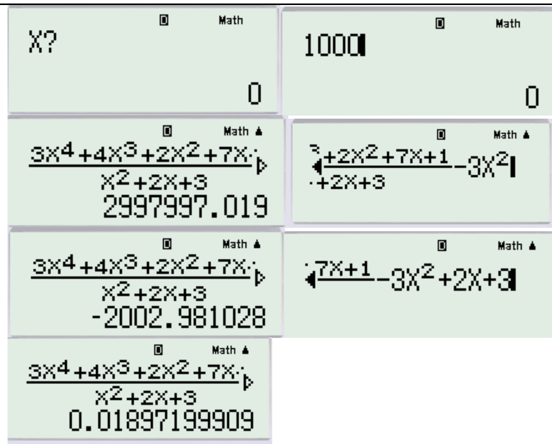
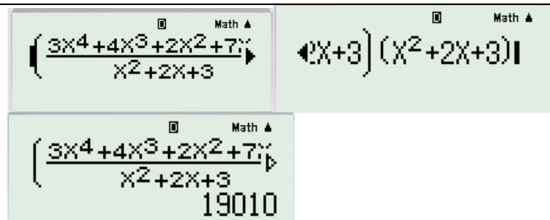
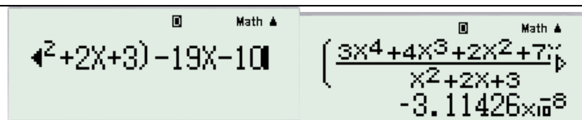
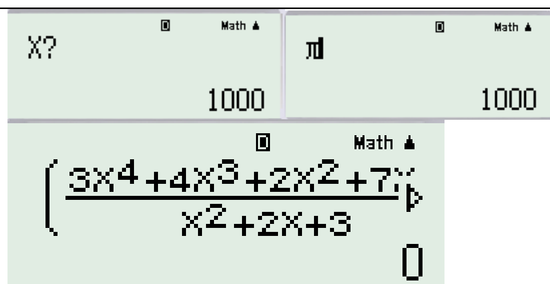
Nếu phân tích $\mathrm{G}(\mathrm{x})=\mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})+\mathrm{g}'(\mathrm{x})$

Phép chia sẽ luôn được như kết quả được biểu diễn như sau : $\frac{\mathrm{G}(\mathrm{x})}{\mathrm{h}(\mathrm{x})}=\mathrm{g}(\mathrm{x})+\frac{\mathrm{g}'(\mathrm{x})}{\mathrm{h}(\mathrm{x})}$,trong trường hợp ta muốn chia triệt để nhất, tức là chia sao cho bậc của $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$ nhỏ hơn bậc của $\mathrm{h}(\mathrm{x})$, như vậy khi cacl $\mathrm{x}=1000,100,...$ thành phần $\frac{\mathrm{g}'(\mathrm{x})}{\mathrm{h}(\mathrm{x})}$ sẽ nằm sau dấu "," bị phân cách và ta có thể khử đi dễ dàng.

Vậy khử thế nào ư, ta làm như sau: khử thành phần $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ trước rồi khử thành phần $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$.Với cách thức này ta còn có thể tách theo gì mình thích. Tôi sẽ cho các bạn thấy qua các ví dụ.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức: $\frac{3x^4+4x^3+2x^2+7x+1}{x^2+2x+3}$

- **Bước 1:** Nhập biểu thức	

- **<u> Bước 2:</u>**Khử biểu thức thương kết quả phép chia(Tức là thành phần g(x) tôi đã nói ở nguyên lý), ta coi như không nhìn thấy thành phần sau dấu phẩy, khai triển như bình thường, coi như mù không thấy nhá:	
<u>-Bước 3: </u> Còn thành phần $\frac{g'(x)}{h(x)}$ nữa nằm sau dấu "," ta tách thế nào, khá là đơn giản. Nhân tất cả với mẫu thức là biết nó thôi	
<u>-Bước 4:</u>Ta khử nó thôi. Khử xong nó ra kết quả vậy nhiều người sẽ nghi ngờ, nhưng đây là calc x=1000,đương nhiên là có sai số rồi, bạn sẽ yên tâm sau bước 5	
- **<u>Bước 5:</u>**Kiểm tra lại: Ta nên kiểm tra lại giá trị đặc biệt ví dụ như là số π. Như vậy là OK rồi, giá trị nhỏ như π không lớn nên là khả năng làm tròn của nó sẽ thấp hơn.	

- **Bước 6:** Đọc số liệu: Ta cần nhìn vào màn hình, phải lưu ý khi đọc số liệu màn hình hiện là:

$$\left(\frac{3x^4+4x^3+2x^2+7x+1}{x^2+2x+3}-3x^2+2x+3\right)\left(x^2+2x+3\right)=19x+10$$

Hay: $\dfrac{3x^4+4x^3+2x^2+7x+1}{x^2+2x+3}-3x^2+2x+3+\dfrac{-19x-10}{x^2+2x+3}=0$

Chú ý: Khi làm thì các bạn đừng dại mà viết lại cái này ra giấy,ta nên nhớ là thành phần thương của phép chia sẽ nằm trong ngoặc thứ nhất, thành phần số dư sẽ nằm ngoài ngoặc. Như vậy kết quả phép chia sẽ là được $3x^2-2x-3$ dư $19x+10$.

Như vậy nếu tách biểu thức $3x^4+4x^3+2x^2+7x+1$ theo x^2+2x+3 thì ta sẽ được là

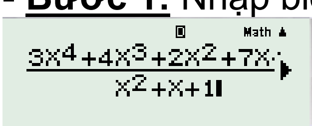
$$3x^4+4x^3+2x^2+7x+1=\left(x^2+2x+3\right)\left(3x^2-2x-3\right)+19x+10$$

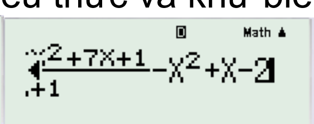
Đây chỉ là cái vặt thôi, kỹ thuật này còn có ưu việt hơn là mình có thể ép biểu thức thương theo ý mình. Thắc mắc vì sao thì các bạn hãy quan sát ở ví dụ 2:

VD2: Phân tích $3x^4+4x^3+2x^2+7x+1$ theo x^2+x+1 và x^2-x+2

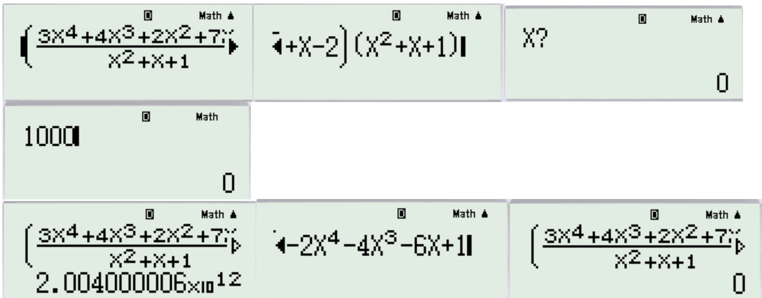
Khá là đơn giản với nguyên lý trên. Lúc này ta coi biểu thức chia là x^2+x+1, biểu thức thương là x^2-x+2 hoặc ngược lại và tiến hành phân tích

- **Bước 1:** Nhập biểu thức và khử biểu thức thương





-Bước 2: Tìm và khử biểu thức dư.



- **<u>Bước 3:</u>** Kiểm tra lại

- **<u>Bước 4:</u>** Đọc số liệu: Trên màn hình máy tính hiện

$$\left(\frac{3x^4+4x^3+2x^2+7x+1}{x^2+x+1}-x^2+x-2\right)\left(x^2+x+1\right)$$

$$-2x^4-4x^3-6x+1=0$$

Tức là sẽ có:

$$3x^4+4x^3+2x^2+7x+1$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2\right)+2x^4+4x^3+6x-1$$

<u>Bình luận:</u>

1.Thực ra với cách làm của ví dụ 2 ta không cần phải làm kỳ công như vậy mà nên làm theo kiểu truy tìm biểu thức m(x) với:

$$m(x)=3x^4+4x^3+2x^2+7x+1-\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2\right)$$

thì sẽ tìm được $m(x)=2x^4+4x^3+6x-1$.

2.Ta cũng có thể phân tích như sau bằng casio:

$$3x^4+4x^3+2x^2+7x+1$$

$$=3\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2\right)+4x^3-4x^2+4x-5$$

3. Chia thì nó khá thiên biến vạn hóa theo yêu cầu, nên là ta cần linh hoạt xử lý theo từng yêu cầu. Mỗi phép chia lại có một yêu cầu khác nhau, cần linh hoạt mà xử lý.

4. Đây là phương pháp mình nghĩ ra nhưng không dám nhận là sáng tạo khai sinh ra nó vì chắc hẳn nhiều người đã đã nghĩ ra nó rồi. Mình là người chia sẻ phương pháp này đầu tiên nên mong các bạn có thể gọi nó là " phương pháp chia có dư của Vích Bảo Nguyễn" để mình vui ^_^

CHỦ ĐỀ 04:

Kỹ thuật “Parabol nhỏ” trong bài toán nghiệm kép.

Tác giả: ĐOÀN TRÍ DŨNG

(Phương pháp này được xây dựng từ câu chuyện bó đũa...)

Ví dụ 1: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^2 - x + 2 + x\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x^3+x^2+2x-1} + \sqrt{3x^2-2x+3}$$

Phân tích

Dễ dàng sử dụng máy tính ta nhận thấy phương trình có nghiệm kép x = 1.

Tuy nhiên vấn đề khó ở đây là, nếu chuyển vế và tạo liên hợp theo dạng:

$$x^2 - x + 2 - \left(ax + b - x\sqrt{x^2+3}\right) + \left(ax + b - \sqrt{2x^3+x^2+2x-1}\right) +$$

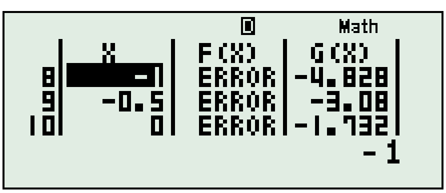
$$+\left(ax + b - \sqrt{3x^2-2x+3}\right) = 0$$

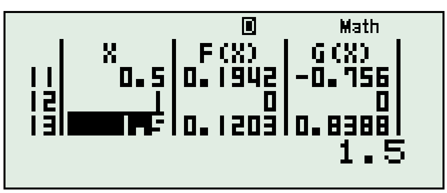
thì rất dễ bị âm sau khi liên hợp. Tốt nhất là không nên đánh liều. Ta suy nghĩ đến việc liên hợp căn bên trái với một trong hai căn bên phải. Tuy nhiên để biết chính xác căn nào khá mệt bởi với x = 1 thì cả 3 giá trị sau cùng nhận giá trị là 2:

$$x\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x^3+x^2+2x-1} = \sqrt{3x^2-2x+3} = 2$$

Thật khó đoán phải không nào. Khi đó ta sử dụng TABLE như sau: $\begin{cases} F(x) = x\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^3+x^2+2x-1} \\ G(x) = x\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3x^2-2x+3} \end{cases}$

So sánh các giá trị của F(x) và G(x) nhận được từ TABLE, ta thấy rõ ràng F(x) đem lại nghiệm kép còn G(x) thì không.





(Nếu quên để thầy nhắc lại: “Nghiệm kép thì hàm số không đổi dấu qua trục hoành, nghiệm đơn thì qua trục hoành hàm số sẽ đổi dấu, vậy là nhận ra chưa ^_^).

Do đó hướng đi bài toán đã quá rõ ràng rồi, giờ là giải thôi.

Bài giải

$$x^2 - x + 2 + x\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x - 1} + \sqrt{3x^2 - 2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + 2 - \sqrt{3x^2 - 2x + 3}\right) + \left(x\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x - 1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}{x^2 - x + 2 + \sqrt{3x^2 - 2x + 3}} + \frac{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}{x\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x - 1}} = 0$$

Chú ý: $2x^3 + x^2 + 2x \geq 1 > 0 \Leftrightarrow x\left(2x^2 + x + 2\right) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau trên tập số thực:

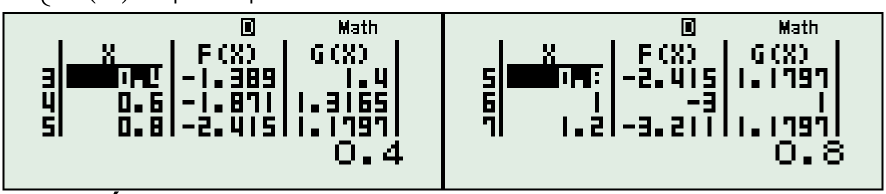
$$\left|x-1\right| + \sqrt{2x - x^2} + x^2 + 1 = \sqrt{6x^2 + 3}$$

Phân tích

Có trị tuyệt đối có vẻ khó khăn đây ta ☺. Đầu tiên cứ dò nghiệm đi, ta thấy có nghiệm kép x = 1.

Sử dụng TABLE nào, ai tinh tướng nhất trong cái phương trình này, ta đánh vào nó trước.

Xét: $\begin{cases} F\left(x\right) = \left|x-1\right| - \sqrt{6x^2+3} \\ G\left(x\right) = \left|x-1\right| + \sqrt{2x - x^2} \end{cases}$. Khi đó khảo sát TABLE:



Không thấy cái nghiệm kép nào phải không, tuy nhiên hãy nhìn kỹ đi, G(x) đang **tiếp xúc** đường thẳng y = 1.

Như vậy, $\left(\left|x-1\right| + \sqrt{2x - x^2} - 1\right)$ chính là biểu thức cần tìm.

Chú ý: Để kết nối, ta có thể sử dụng:

$$a + b = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$$

Bài giải

Ta có: $\left|x-1\right|+\sqrt{2x-x^2}+x^2+1=\sqrt{6x^2+3}$

$\Leftrightarrow\left(\left|x-1\right|+\sqrt{2x-x^2}-1\right)+\left(x^2+2-\sqrt{6x^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+2\left|x-1\right|\sqrt{2x-x^2}}-1\right)+\left(x^2+2-\sqrt{6x^2+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{2\left|x-1\right|\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1+2\left|x-1\right|\sqrt{2x-x^2}}+1}+\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}{x^2+2+\sqrt{6x^2+3}}=0\Leftrightarrow x=1$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Áp dụng 1: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{4x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=x\sqrt{x^2+1}+x^2+1$$

Áp dụng 2: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\left|x\right|+\sqrt{4-x^2}+2-\frac{7x-6}{x^2+x+3}=x+2\sqrt{\frac{\left(3-x\right)^3}{x^2+x+3}}$$

Áp dụng 3: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{4-x^2}+2\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2}=\left(x-1\right)^2+1-\left|x\right|$$

(Trích đề thi thử lần 2 – 2015 – Chuyên ĐHSP Vinh)

Câu chuyện bó đũa và bài học

Một ngày một người cha sắp khuất núi gọi các con đến và bảo các con bẻ một bó đũa. Nhưng không ai bẻ được. Người cha tháo bó đũa ra, bẻ từng chiếc một.

TABLE cả một phương trình ra hơi khó giải, hãy TABLE từng đoạn nhỏ một, bạn sẽ khám phá ra những điều bí mật không tưởng tuyệt vời.

Trong cuộc sống, không có ai hoàn thiện. Hãy đoàn kết cùng nhau vượt qua mọi khó khăn. Không ai sống cô đơn mãi một mình. Chúc các em thành công – **Đoàn Trí Dũng.**

CHỦ ĐỀ 05
PHƯƠNG PHÁP CASIO VẬN DỤNG CÔNG THỨC CARDANO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3
Tác giả: VÍCH BẢO NGUYỄN

Nền tảng của phương pháp: Sử dụng biến đổi tương đương sau:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

Mục tiêu của phương pháp:

- Bước 1: Đưa phương trình bậc 3 về dạng chuẩn:

$$x^3+mx+n=0$$

- Bước 2: Đặt $\begin{cases} a^3+b^3=n \\ -3ab=m \end{cases}$, khi đó ta biến đổi phương trình trên về dạng:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

- Bước 3: Tìm a và b: Chú ý rằng: $-3ab=m$

$$\Leftrightarrow b=\frac{m}{-3a}\Rightarrow a^3-\frac{m^3}{27a^3}=n\Leftrightarrow \left(a^3\right)^2-na^3-\frac{m^3}{27}=0$$

(Ta luôn tìm được a, b vì là nghiệm phương trình bậc 2).

Cách biến đổi phương trình bậc 3 dạng tổng quát về dạng chuẩn:

Xét phương trình: $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

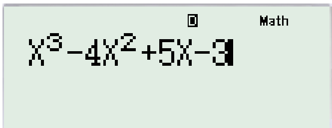
Để làm biến mất x^2, ta đặt ẩn phụ: $x=y+k$ với $k=\frac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^3-4x^2+5x-3=0\ (1)$

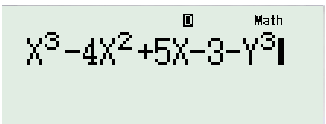
- **<u>Bước 1:</u>** Quy về dạng khuyết thành phần bình phương :

Ta có: $k=-\frac{-4}{3\times 1}=\frac{4}{3}$. Đặt $x=y+\frac{4}{3}$ phương trình (1) sẽ trở thành "dạng chuẩn". Để phân tích nhanh chóng (1) theo ẩn x, ta sẽ sử dụng casio.

- Đầu tiên là nhập biểu thức $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ vào máy tính, ta lưu ý sử dụng 2 công cụ lưu nghiệm trên máy tính là X,Y, việc ta cần làm la truy tìm biểu thức theo ẩn y:

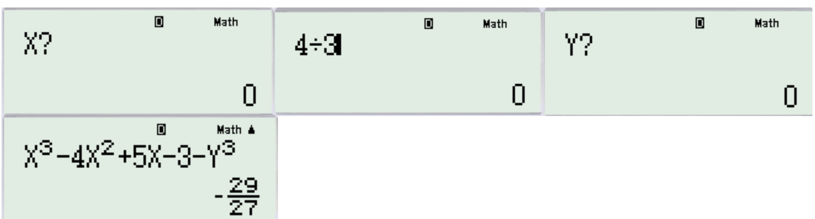


- Công việc tiếp theo là khử đi y^3 vì hệ số của nó bằng hệ số của x^3, ta trừ đi để làm mất nó :

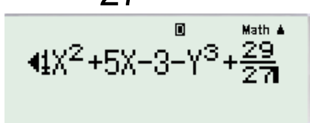


Còn 2 thành phần nữa là thành phần hệ số tự do và hệ số của y.

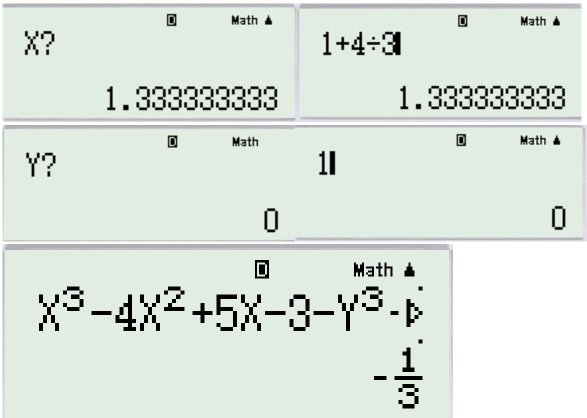
- Ta khử thệ số tự do bằng cách Calc X= k, trong bài toán này là X= $\frac{4}{3}$,Y=0



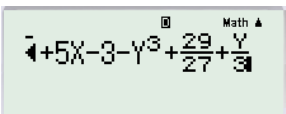
Như vậy hệ số tự do là $\frac{-29}{27}$ ta cộng thêm $\frac{29}{27}$ để khử đi hệ số tự do.



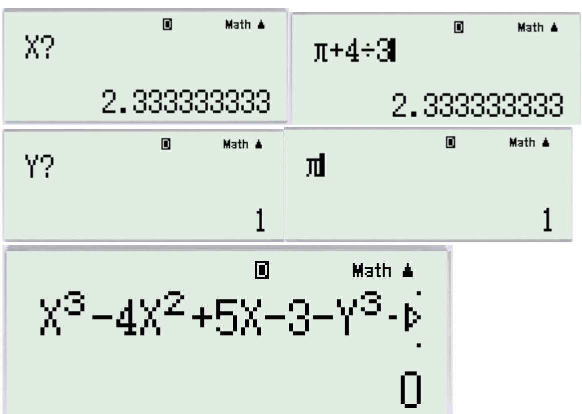
- Việc làm tiếp là khử đi thành phần y, ta Cacl X=1+k,Y=1 với bài toàn này thì cụ thể $X = 1 + \frac{4}{3}; Y = 1$ để tìm hệ số của y :



Như vậy hệ số của y là $-\frac{1}{3}$, ta sẽ cộng thêm $\frac{y}{3}$ để làm mất đi thành phần y:



- Bước cuối cùng là kiểm tra lại: Calc $X=\pi+k; Y=\pi$,

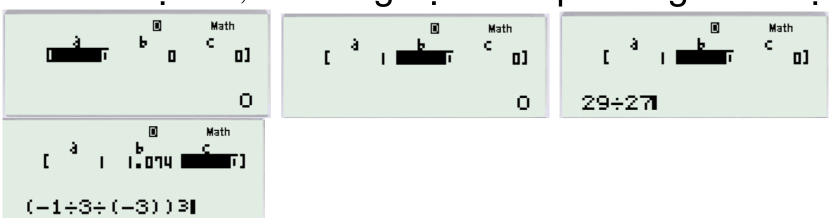


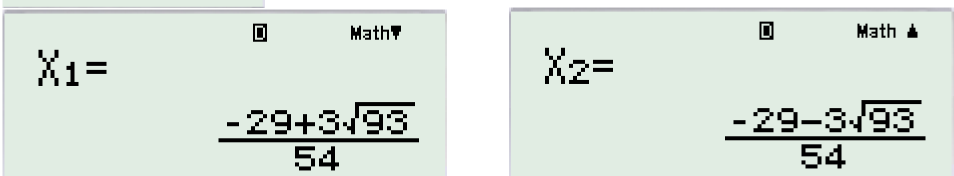
Bằng 0 tức là biểu thức luôn đúng rồi, tức là ta có $x^3-4x^2+5x-3-y^3+\frac{y}{3}+\frac{29}{27}=0, \forall x=y+\frac{4}{3}$ là luôn đúng.

Tức $x^3-4x^2+5x-3=y^3-\frac{y}{3}-\frac{29}{27}, \forall x=y+\frac{4}{3}$

-**<u>Bước 2:</u>** Sau khi đã quy về "dạng chuẩn" $x^3+mx+n=0$, ta đặt $\begin{cases} a^3+b^3=n \\ -3ab=m \end{cases}$, trường hợp bài toán này là phương trình sau khi quy về dạng mới là $y^3-\frac{y}{3}-\frac{29}{27}=0$, quy bài toàn về giải phương trình bậc 3 mới là $y^3-\frac{y}{3}-\frac{29}{27}=0$

Với bài toán cụ thể này là đặt $\begin{cases} a^3+b^3=\dfrac{-29}{27} \\ -3ab=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$, giải hệ này ta thu được a^3, b^3 là 2 nghiệm của phương trình bậc 2.





Có 2 nghiệm $a^3=\frac{-29+3\sqrt{93}}{54}\to A, b^3=\frac{-29-3\sqrt{93}}{54}\to B$

Như vậy ta được: $y^3-\frac{y}{3}-\frac{28}{27}=y^3+\sqrt[3]{A}^3+\sqrt[3]{B}^3-3y\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}$

$$=\left(y+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\left(y^2+\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{B}^2-y\sqrt[3]{A}-y\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}\right)=0$$

(Vận dụng đẳng thức
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$)

-**<u>Bước 3:</u>** Giải phương trình theo ẩn y:

Qua kiểm tra lại bằng công cụ EQN thì thấy được phương trình bậc 3 này có duy nhất một nghiệm, nên ta sẽ có được ngay là: $y+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=0$

$$\to y=-\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=-\sqrt[3]{\frac{-29-3\sqrt{93}}{54}}-\sqrt[3]{\frac{-29+3\sqrt{93}}{54}}$$

-<u>Bước 4:</u> Thế lại tìm x.

Từ đó rút ra được $x=\frac{4}{3}-\sqrt[3]{\frac{-29-3\sqrt{93}}{54}}-\sqrt[3]{\frac{-29+3\sqrt{93}}{54}}$,

Hay $x=\frac{4}{3}+\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{54}}$

<u>Lưu ý :</u>- Nếu mà giải phương trình bậc 2 không tìm được a^3,b^3 vì nó chỉ hiện số xấp xỷ, ta có thể xác định 2 thành phần đó bằng cách sau :

Nếu A>B: $A=\frac{A+B}{2}+\sqrt{\frac{(A-B)^2}{4}};B=\frac{A+B}{2}-\sqrt{\frac{(A-B)^2}{4}}$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^3-5x^2+x-1=0$

Ta làm lại thao tác như VD1 :

- <u>Bước 1:</u> Đặt $x=y+\frac{5}{3}$, ta đưa phương trình về "dạng chuẩn": $y^3-\frac{22}{3}y-\frac{232}{27}$

-<u>Bước 2:</u> Đặt $\begin{cases} a^3+b^3=\frac{-232}{27} \\ -3ab=\frac{-22}{3} \end{cases}$, giải hệ tìm a^3,b^3, đến đây thì gặp vướng mắc là máy tính không hiện ra nghiệm chính xác mà hiện ra dưới dạng làm tròn.

$x_1=-2{,}33368277\to A;x_2=-6{,}258909822\to B$

Ta phải xử lý như phần **Lưu ý**, Lưu 2 nghiệm vào A,B. Hai nghiệm đó sẽ lần lượt được xác định theo công thức phần **lưu ý**.

Ta có : $\frac{A+B}{2}=\frac{-116}{27};\frac{(A-B)^2}{4}=\frac{104}{27}$

Như vậy ta sẽ tìm được a^3,b^3 tương ứng là $\frac{-116}{27}+\sqrt{\frac{104}{27}}$

và $\frac{-116}{27}-\sqrt{\frac{104}{27}}\,\frac{-116}{27}-\sqrt{\frac{1289}{729}}$

- **<u>Bước 3:</u>** Giải phương trình theo ẩn y:

Từ bước 2 ta có $y=-\sqrt[3]{\frac{-116}{27}+\sqrt{\frac{104}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{-116}{27}-\sqrt{\frac{104}{27}}}$

-**<u>Bước 4:</u>** Từ y rút ra x:

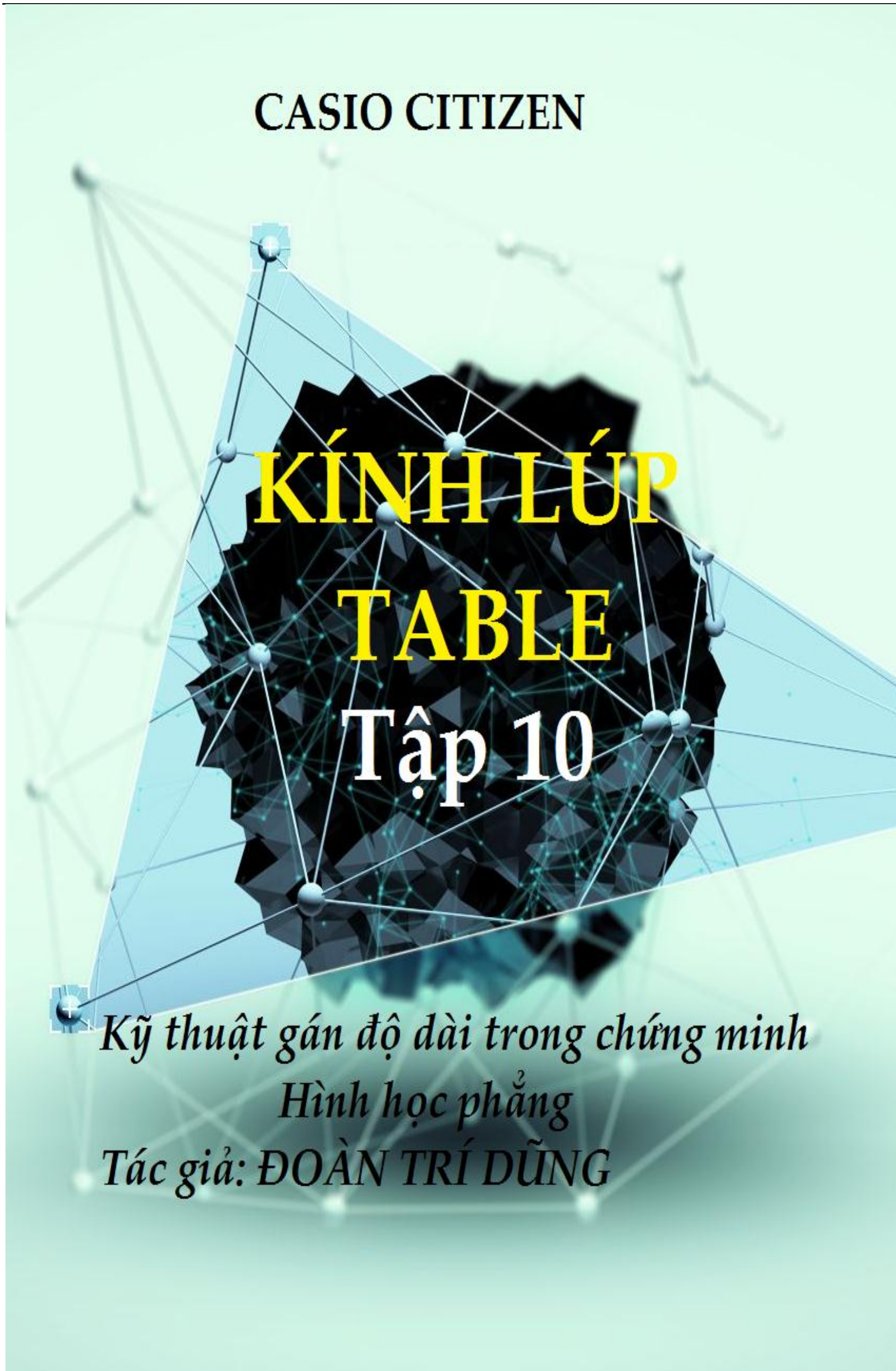
$x=\frac{5}{3}-\sqrt[3]{\frac{-116}{27}+\sqrt{\frac{104}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{-116}{27}-\sqrt{\frac{104}{27}}}$

hay $x=\frac{5}{3}+\sqrt[3]{\frac{116}{27}-\sqrt{\frac{104}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{116}{27}+\sqrt{\frac{104}{27}}}$

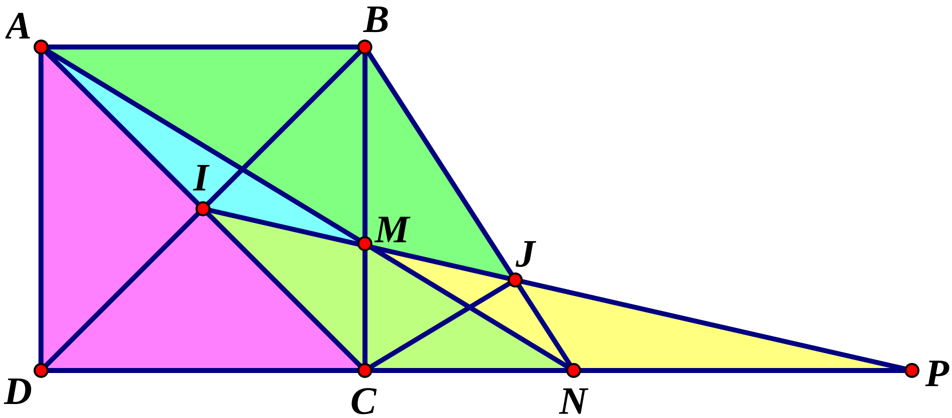
Với chiếc máy casio, việc vận dụng phương pháp Cardano giải phương trình bậc 3 khá dễ dàng với loại phương trình bậc 3 có 1 nghiệm lẻ duy nhất.

Hy vọng tài liệu này sẽ giúp ích các bạn.

~Ad casiomen **Vích Bảo Nguyễn** ~


CASIO CITIZEN
KÍNH LÚP
TABLE
Tập 10
Kỹ thuật gán độ dài trong chứng minh
Hình học phẳng
Tác giả: ĐOÀN TRÍ DŨNG

Bài 1: Hình vuông ABCD. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng BC. IM và AN cắt DC kéo dài tại P và N. BN cắt PM tại J. Chứng minh $CJ \perp BN$.



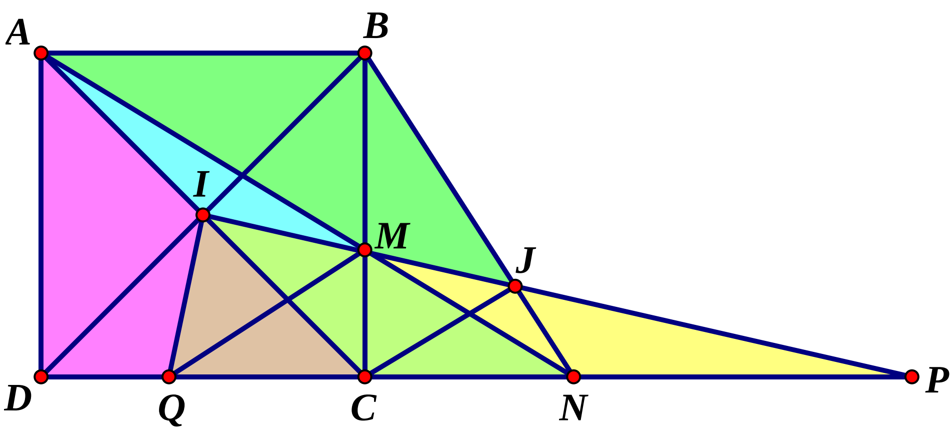
Cách 1: Hình học thuần túy Menelaus:

Về định lý Menelaus mời bạn đọc xem Wikipedia hoặc Google.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{JB}{JN}\dfrac{MC}{MB}\dfrac{PN}{PC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{JB}{JN} = \dfrac{MB}{MC}\dfrac{PC}{PN} \\ \dfrac{IA}{IC}\dfrac{MN}{MA}\dfrac{PC}{PN} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{PC}{PN} = \dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MB}{MC} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{JB}{JN} = \dfrac{MB^2}{MC^2} = \dfrac{AB^2}{CN^2} = \dfrac{BC^2}{CN^2}$

Tới đây bạn đọc hoàn toàn có thể chứng minh $CJ \perp BN$.

Cách 2: Gọi điểm phụ để chứng minh tứ giác nội tiếp:



Lấy Q sao cho QC = BM. Ta có QIMC là tứ giác nội tiếp.

Do vậy $\angle MIC = \angle MQC$.

Mặt khác $\dfrac{QC}{MC} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AB}{CN} = \dfrac{BC}{CN} \Rightarrow \Delta QCM \backsim \Delta BCN$.

Vậy $\angle MIC = \angle MQC = \angle CBN \Rightarrow ICJB$ là tứ giác nội tiếp vậy $CJ \perp BN$.

Tuy nhiên cái khó là làm sao đoán được điểm Q.

Cách 3: Gán độ dài DC = x, CM = y. Ta chứng minh IBJC là tứ giác nội tiếp. Thật vậy: $\frac{CN}{BC} = \frac{CN}{AB} = \frac{CM}{BM} = \frac{y}{x-y} = \tan\angle CBN$.

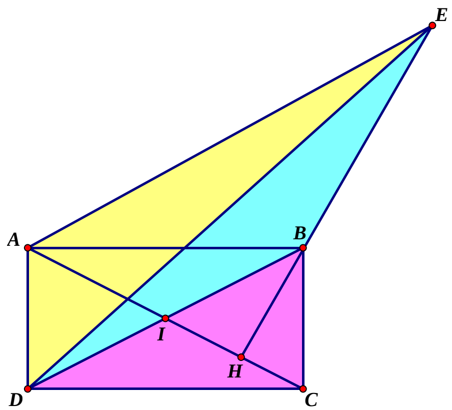
Mặt khác: $IM^2 = CM^2 + CI^2 - 2CM.CI.\frac{1}{\sqrt{2}} = y^2 + \frac{x^2}{2} - xy$.

Do đó: $\cos\angle CIM = \frac{CI^2 + IM^2 - CM^2}{2CI.IM} = \frac{x-y}{\sqrt{2y^2 + x^2 - 2xy}} \Leftrightarrow \tan\angle CIM = \frac{y}{x-y}$.

Vậy ta có $\angle CBN = \angle CIM \Rightarrow JBIC$ là tứ giác nội tiếp vậy $CJ \perp BN$.

Hay không các em? Tiếp nhé!

Bài 2: Hình chữ nhật ABCD có BH vuông góc AC. Trên tia đối tia BH lấy E sao cho BE = AC. Chứng minh $\angle ADE = 45^0$.



Về cách sử dụng bằng hình học thuần túy, xin gợi ý gọi F là trung điểm của DE. Về cách gán độ dài, đặt $AD = x, CD = y$.

Ta có: $AE^2 = EH^2 + AH^2$

$\Leftrightarrow AE^2 = \frac{AB^4}{AC^2} + (AC + BH)^2$

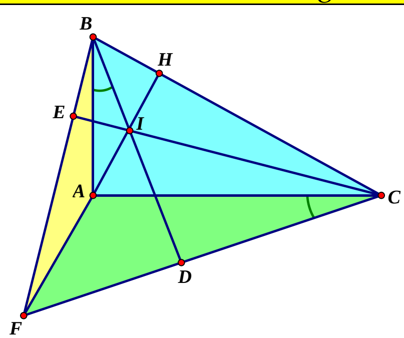
$\Leftrightarrow AE^2 = x^2 + 2xy + 2y^2$.

Mặt khác áp dụng theo định lý hàm số cos ta có:

$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD.BE.\cos\angle DBE = 2(x+y)^2$.

Đến đây dùng định lý hàm số cos cho tam giác ADE ta có đpcm.

Bài 3: Tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Gọi F đối xứng với H qua A. Gọi I là trực tâm tam giác FBC. Chứng minh I là trung điểm AH.



Đặt $BH = x, CH = y \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$.

$AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2AB.BI\cos\angle ABI$

$\Leftrightarrow AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2AB.BI\cos\angle ACF$.

Mặt khác $IH^2 = BI^2 - BH^2$.

Giả sử: $AI^2 = IH^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + BH^2 = 2AB.BI\frac{AC^2 + CF^2 - FA^2}{2AC.CF}$

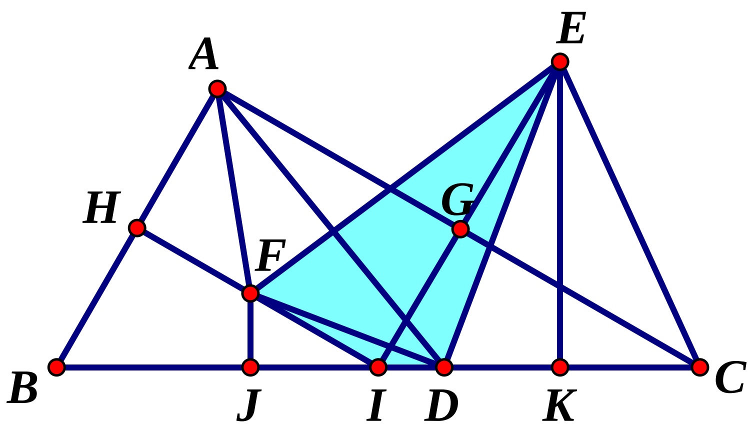
$$\Leftrightarrow AB^2+BH^2=\frac{AB}{AC}\frac{BI}{CF}\left(AC^2+CH^2+4FA^2-FA^2\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2+BH^2=\frac{AB}{AC}\frac{BH}{2AH}\left(AC^2+CH^2+3HA^2\right).$$

Thay: $BH=x, CH=y, AH=\sqrt{xy}, AB=\sqrt{x^2+xy}, AC=\sqrt{y^2+xy}$ ta thấy đẳng thức luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Gợi ý cho các bạn thử sức chứng minh hình phẳng: Gọi thêm trung điểm của BH. Quá khó lường phải không!

Bài 4: Tam giác vuông ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Lấy D trên đoạn thẳng MC. Gọi E và F là tâm ngoại tiếp các tam giác DAC và DAB. Chứng minh tứ giác EIMF nội tiếp.



Trước hết dễ dàng chứng minh được AHIG là hình chữ nhật nên $\angle FIE=90^0$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $\angle FDE=90^0$.

Thật vậy, sài tích vô hướng ta có: $\overrightarrow{DF}\overrightarrow{DE}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IF}\right)\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IE}\right)=0$

$\Leftrightarrow DI^2+\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IE}=0\Leftrightarrow DI^2+DI.JI-DI.IK=0\Leftrightarrow DI+JI=IK\Leftrightarrow DJ=IK$

Chẳng khó khăn tý nào, gán $BI=IC=x, ID=y$.

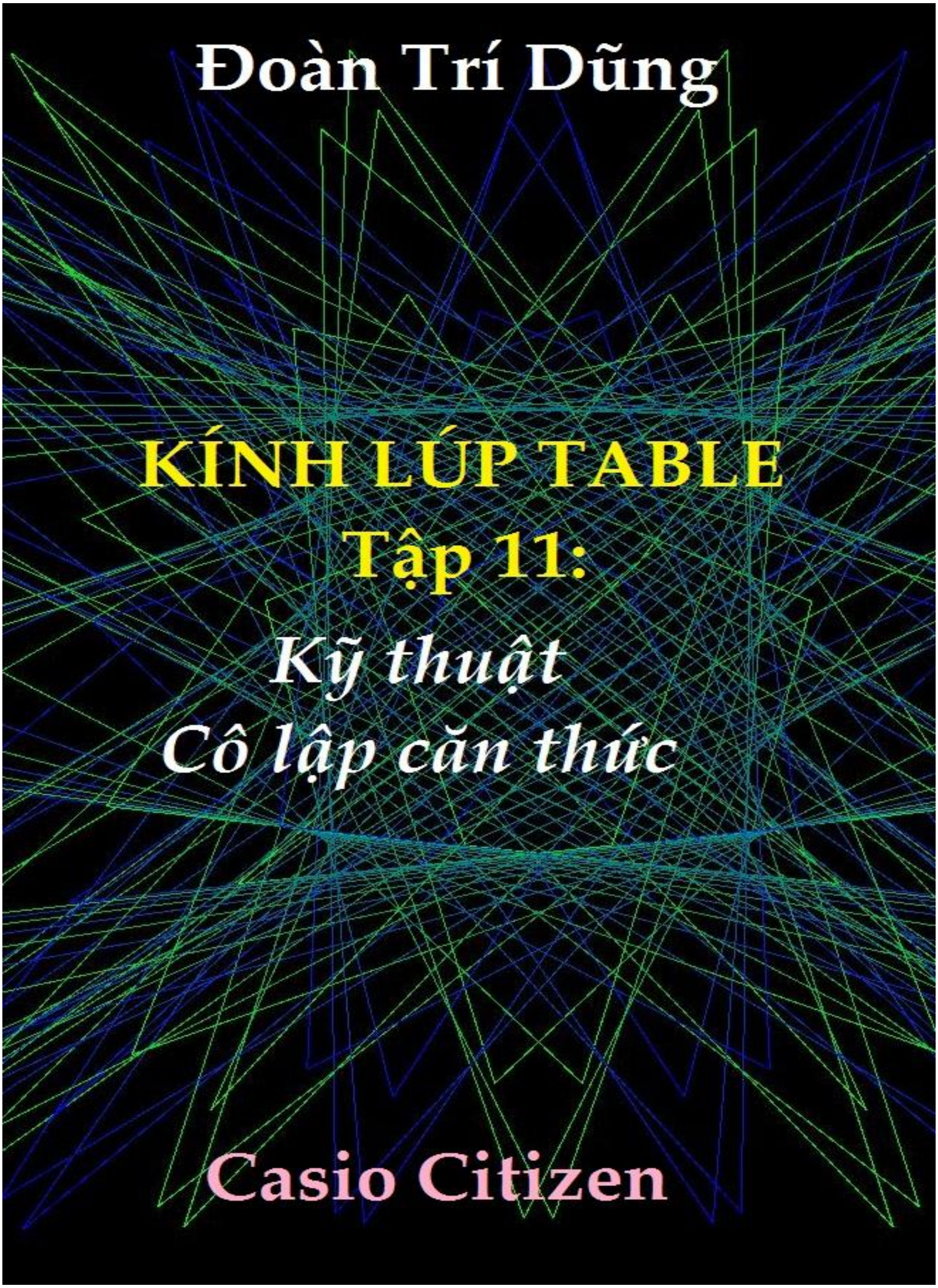
Ta có: $DJ=\frac{BI+ID}{2}=\frac{x+y}{2}, IK=ID+DK=y+\frac{IC-ID}{2}=y+\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{2}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

LỜI KẾT

Trên đây tôi đã chứng minh 4 bài toán hay và khó, khá kinh điển trong hình học phẳng. Hy vọng sau khi đọc xong bài viết này, bạn đọc sẽ trở nên tỏa sáng hơn với hình học phẳng và hình học phẳng Oxy.

Thân ái – Casio Man – Đoàn Trí Dũng


Đoàn Trí Dũng
KÍNH LÚP TABLE
Tập 11:
Kỹ thuật
Cô lập căn thức
Casio Citizen

Cô lập căn thức

Tác giả: Đoàn Trí Dũng

A. NGUYÊN TẮC CƠ BẢN

Nếu một phương trình có các nghiệm $a,b,c,...$ và khi đó thay vào biểu thức ta được $\sqrt{A}=\alpha,\beta,\delta,...$ khi đó ta phân tích:

$$\left(\sqrt{A}-\alpha\right)\left(\sqrt{A}-\beta\right)\left(\sqrt{A}-\delta\right)...$$

Ta sẽ thấy tốc độ giải bài nhanh đáng kể ☺.

B. ÁP DỤNG

BÀI 1: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$5x^2+46x+106=(5x+25)\sqrt{5x+16}+3\sqrt{x+4}$$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được 2 nghiệm $x=0, x=-3$.

- Xét: $\begin{cases} x=0\Rightarrow\sqrt{5x+16}=4 \\ x=-3\Rightarrow\sqrt{5x+16}=1 \end{cases}$.
- Xét: $\left(\sqrt{5x+16}-4\right)\left(\sqrt{5x+16}-1\right)=5x+20-5\sqrt{5x+16}$.
- Xét: $\begin{cases} x=0\Rightarrow\sqrt{x+4}=2 \\ x=-3\Rightarrow\sqrt{x+4}=1 \end{cases}$.
- Xét: $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}-1\right)=x+6-3\sqrt{x+4}$.

Tách bài toán nào: $5x^2+46x+106=(5x+25)\sqrt{5x+16}+3\sqrt{x+4}$

$$\Leftrightarrow\left(x+6-3\sqrt{x+4}\right)+(x+5)\left(5x+20-5\sqrt{5x+16}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}-1\right)+(x+5)\left(\sqrt{5x+16}-4\right)\left(\sqrt{5x+16}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}+\frac{25x(x+3)(x+5)}{\left(\sqrt{5x+16}+4\right)\left(\sqrt{5x+16}+1\right)}=0$$

Bài 2: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^2-3x-4+(x+2)\sqrt{x+3}-(x-1)\sqrt{3x+4}=0$$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được 1 nghiệm $x=1$ và 1 nghiệm vô tỷ thỏa mãn đánh giá: $x=\sqrt{x+3}, x+1=\sqrt{3x+4}$.

- $x=1 \Rightarrow \sqrt{x+3}=2$ do đó có nhân tử:

$$\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=3x+3-(x+2)\sqrt{x+3}$$

- Chú ý với $x=1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=\sqrt{7}$ khá xấu.
- Do đó ta xét: $\left(x+1-\sqrt{3x+4}\right)(x-1)=x^2-1-(x-1)\sqrt{3x+4}$.

Như vậy: $x^2-3x-4+(x+2)\sqrt{x+3}-(x-1)\sqrt{3x+4}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-1-(x-1)\sqrt{3x+4}-\left(3x+3-(x+2)\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+4}\right)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x-3)(x-1)}{\left(x+\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{(x^2-x-3)(x-1)}{x+1+\sqrt{3x+4}}=0$$

Bài 3: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^3+4x^2+7x+10=(x^2+4x+7)\sqrt{x^2+3}+2(x-2)\sqrt{2x-1}$$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được nghiệm kép $x=1$.

- Xét $\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2=x^2+7-4\sqrt{x^2+3}$.
- Xét $\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=2x-2\sqrt{2x-1}$.

Bài toán này đòi hỏi phải phân tích cẩn thận. Ta tạo ra lượng nhân tử $x^2+7-4\sqrt{x^2+3}$ trước:

$$x^3+4x^2+7x+10=\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}+2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3+7x-4x\sqrt{x^2+3}\right)+4x^2+10-\left(x^2+7\right)\sqrt{x^2+3}-2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2+4\left(x^2+3\right)-\left(x^2+7\right)\sqrt{x^2+3}-2-2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2-\sqrt{x^2+3}\left(x^2+7-4\sqrt{x^2+3}\right)-2-2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2-\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2-2-2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2-\left(2x-1\right)\sqrt{2x-1}+3\sqrt{2x-1}-2=0$$

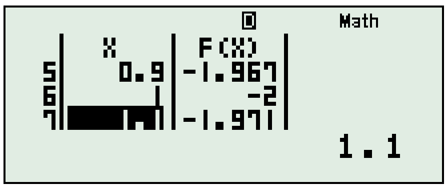
$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2-\left(\sqrt{2x-1}^3-3\sqrt{2x-1}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\left(2+\sqrt{2x-1}\right)=0$$

Vì $\sqrt{x^2+3}-x>0$ do đó $x=1$.

Cách 2: Tư duy bằng Parabol nhỏ:

Xét hàm số $F(x)=2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}$ và quan sát tập trung tại vị trí $x=1$. Ta thấy hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y=-2$.



Vậy $2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}+2$ có nghiệm kép.

Ta có: $x^3+4x^2+7x+10=\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}+2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}-\left(x^3+4x^2+7x+12\right)\right)+\left(2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}+2\right)=0$$

Đến đây sài CASIO chia máy:

$\dfrac{2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}+2}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}$ CALC 2 = $2+\sqrt{3}$, xét $\dfrac{2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}+2}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}-\sqrt{2x-1}$ CALC 100 được kết quả 2.

$\dfrac{\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}-\left(x^3+4x^2+7x+12\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2}$ CALC 0 được $\sqrt{3}$. Xét tiếp $\dfrac{\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}-\left(x^3+4x^2+7x+12\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2}-\sqrt{x^2+3}$ CALC 100 được kết quả -100. Như vậy ta có thể viết lại:

$$\left(\left(x^2+4x+7\right)\sqrt{x^2+3}-\left(x^3+4x^2+7x+12\right)\right)+\left(2\left(x-2\right)\sqrt{2x-1}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\left(2+\sqrt{2x-1}\right)=0$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: $x^2-3x-19+3\left(x+3\right)\sqrt{3-x}+3\sqrt{x+2}=0$

Bài 2: $21x^2-x-7-\left(3x^2+4x-4\right)\sqrt{7x+3}-\left(x+1\right)\sqrt{3x-1}=0$

Bài 3: $2x^2-9x+4+\left(x+2\right)\sqrt{x+2}-2\sqrt{2x-3}=0$