

## MỤC LỤC

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| ◆CHƯƠNG ⑧. QUAN HỆ VUÔNG GÓC.....                        | 2  |
| ▶BÀI ①. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.....                   | 2  |
| .....(A). Tóm tắt kiến thức                              |    |
| 2                                                        |    |
| .....(B). Phân dạng toán cơ bản                          |    |
| 2                                                        |    |
| •Dạng ①: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian.....  | 2  |
| •Dạng ②: Hai đường thẳng vuông góc trong không gian..... | 3  |
| .....(C). Dạng toán rèn luyện                            |    |
| 4                                                        |    |
| •Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....   | 4  |
| •Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....                  | 44 |
| •Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....               | 72 |

## ◆ CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

### ▶ BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

#### Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

##### 1. GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG

###### Định nghĩa

- ✓ Góc giữa hai đường thẳng  $a, b$  trong không gian, kí hiệu  $(a, b)$ , là góc giữa hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$  cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với  $a$  và  $b$ .

###### Nhận xét

- ✓ a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  ta có thể lấy điểm  $O$  thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua  $O$  và song song với đường thẳng còn lại.
- ✓ b) Với hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bất kì:  $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$ .

##### 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

###### Định nghĩa

#### Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

##### • Dạng 1: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

###### Phương pháp

###### Định nghĩa

- ✓ Góc giữa hai đường thẳng  $a, b$  trong không gian, kí hiệu  $(a, b)$ , là góc giữa hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$  cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với  $a$  và  $b$ .

###### Chú ý:

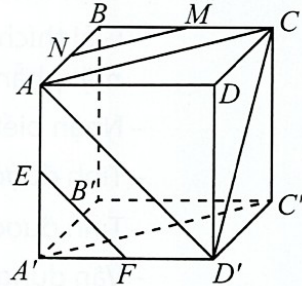
- ✓ a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng  $a, b$  ta có thể lấy một điểm  $O$  nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.
- ✓ b) Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ  $0^\circ$  đến  $90^\circ$ .

##### Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt đều là hình vuông và  $M, N, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, BA, AA', A'D'$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

- $A'C'$  và  $BC$ ;
- $MN$  và  $EF$ .

### Lời giải



Hình 2

- Ta có  $AC \parallel A'C'$ , suy ra  $(A'C', BC) = (AC, BC) = \angle ACB = 45^\circ$  (tam giác  $ACB$  vuông cân tại  $B$ ).
- Ta có  $AC \parallel MN, AD' \parallel EF$ , suy ra  $(MN, EF) = (AC, AD') = \angle CAD' = 60^\circ$  (tam giác  $ACD'$  có ba cạnh bằng nhau).

### •Dạng 2: Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

✍ **Phương pháp**

✍ **Định nghĩa**

- ✓ Trong không gian, hai đường thẳng  $a, b$  được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .
- ✓ Hai đường thẳng  $a, b$  vuông góc được kí hiệu là  $a \perp b$  hoặc  $b \perp a$ .
- ✍ **Chú ý:**
- ✓ a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- ✓ b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia.
- ✓ c) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba  $c$  thì ta chưa kết luận được  $a \parallel b$  như trong hình học phẳng.

### 📖 Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng  $AB \perp CC', AC \perp B'D'$ .

### Lời giải

Ta có  $CC' \parallel BB'$ , suy ra  $(AB, CC') = (AB, BB') = \angle ABB' = 90^\circ$ . Vậy  $AB \perp CC'$ .

Ta có  $B'D' \parallel BD$ , suy ra  $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$  (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau). Vậy  $AC \perp B'D'$ .

### ©. Dạng toán rèn luyện

#### • Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1:** Trong không gian, cho đường thẳng  $d$  và điểm  $O$ . Qua  $O$  có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $d$ ?

- A.** 3.                      **B.** vô số.                      **C.** 1.                      **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trong không gian, có vô số đường thẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Vì vậy chọn đáp án B

**Câu 2:** Trong không gian cho trước điểm  $M$  và đường thẳng  $\Delta$ . Các đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $\Delta$  thì:

- A.** vuông góc với nhau.                      **B.** song song với nhau.  
**C.** cùng vuông góc với một mặt phẳng.                      **D.** cùng thuộc một mặt phẳng.

**Lời giải**

**Chọn D**

Suy ra từ tính chất 1 theo SGK hình học 11 trang 100.

**Câu 3:** Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.  
**B.** Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau  
**C.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.  
**D.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

**Lời giải**

Sử dụng định lý 
$$\begin{cases} a \perp b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \perp c.$$

**Câu 4:** Trong không gian, cho 3 đường thẳng  $a, b, c$  phân biệt và mặt phẳng  $(P)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Nếu  $a \perp c$  và  $(P) \perp c$  thì  $a \parallel (P)$ .

- B.** Nếu  $a \perp c$  và  $b \perp c$  thì  $a \parallel b$ .
- C.** Nếu  $a \perp b$  và  $b \perp c$  thì  $a \perp c$ .
- D.** Nếu  $a \perp b$  thì  $a$  và  $b$  cắt nhau hoặc chéo nhau.

### Lời giải

#### Chọn D

Theo kiến thức SGK có bốn vị trí tương đối của hai đường thẳng mà nếu hai đường thẳng trùng nhau hoặc song song thì chúng không vuông góc với nhau do đó nếu  $a \perp b$  thì  $a$  và  $b$  cắt nhau hoặc chéo nhau.

**Câu 5:** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** Qua một điểm  $O$  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- B.** Qua một điểm  $O$  cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng  $\Delta$  cho trước.
- C.** Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
- D.** Qua một điểm  $O$  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

### Lời giải

#### Chọn D

Qua một điểm  $O$  cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước. Các đường thẳng này cùng nằm trên mặt phẳng qua  $O$  và vuông góc với đường thẳng ấy.

Vậy D **sai**.

**Câu 6:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

- A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- C.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- D.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

### Lời giải

#### Chọn C

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể song song hoặc chéo nhau.

Đáp án C chỉ đúng trong mặt phẳng.

**Câu 7:** Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A.** Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B.** Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- C.** Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D.** Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

### Lời giải

#### Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  ta có  $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$ . Dễ thấy  $AA'$  và  $AD$  cắt nhau.

Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

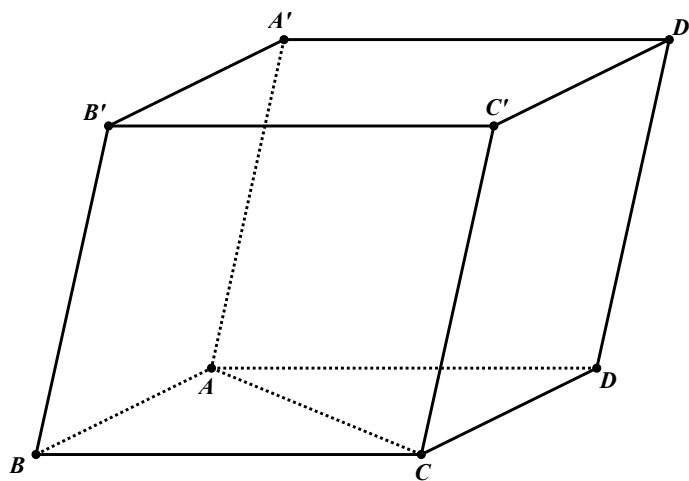
Đáp án **D** sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

**Câu 8:** Trong hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.**  $BB' \perp BD$ .
- B.**  $A'C' \perp BD$ .
- C.**  $A'B \perp DC'$ .
- D.**  $BC' \perp A'D$ .

### Lời giải

#### Chọn A



Vì hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác  $ABCD$ ,  $A'B'BA$ ,  $B'C'CB$  đều là hình thoi nên ta có  $AC \perp BD$  mà  $AC \parallel A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$  (B đúng).

$A'B \perp AB'$  mà  $AB' \parallel DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$  (C đúng).

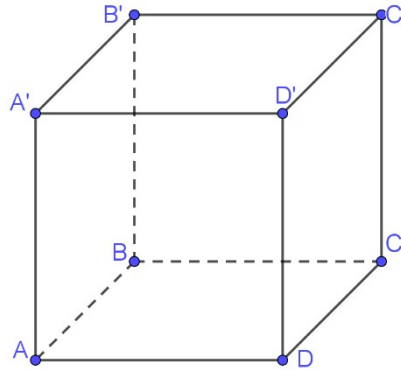
$BC' \perp B'C$  mà  $B'C \parallel A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$  (D đúng).

**Câu 9:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng  $BC'$ ?

- A.**  $A'D$ ,                      **B.**  $AC$ ,                      **C.**  $BB'$ ,                      **D.**  $AD'$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



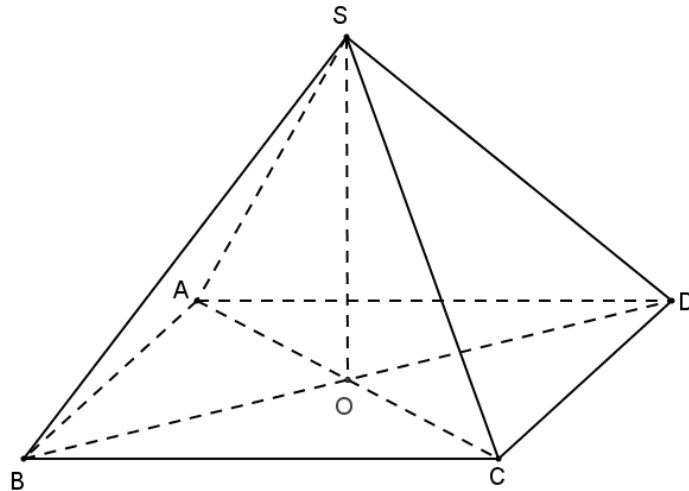
Ta có:  $A'D \parallel B'C$ ,  $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

**Câu 10:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A.**  $AC \perp SD$ ,                      **B.**  $BD \perp AC$ ,                      **C.**  $BD \perp SA$ ,                      **D.**  $AC \perp SA$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có tam giác  $SAC$  cân tại  $S$  và  $SO$  là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.

Do đó  $SO \perp AC$ .

Trong tam giác vuông  $SOA$  thì  $AC$  và  $SA$  không thể vuông tại  $A$ .

**Câu 11:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'B$ .

A.  $60^\circ$

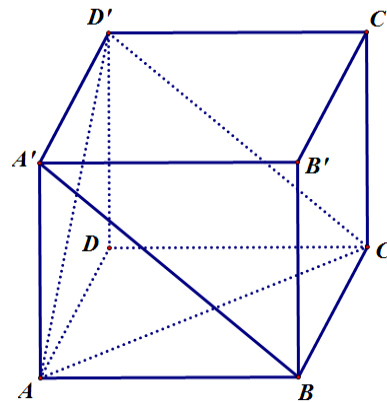
B.  $45^\circ$

C.  $75^\circ$

D.  $90^\circ$

### Lời giải

Chọn A



Do  $A'BCD'$  là hình bình hành nên  $A'B \parallel D'C$ . Suy ra góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'B$

bằng góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $D'C$  và đó chính là góc  $\widehat{ACD'} = 60^\circ$  (do  $\triangle ACD'$  đều).

**Câu 12:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$  bằng:

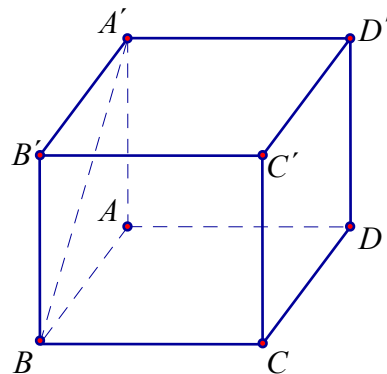
A.  $45^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

### Lời giải



Có  $CD \parallel AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$  (do  $ABB'A'$  là hình vuông).

**Câu 13:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

A.  $45^\circ$ .

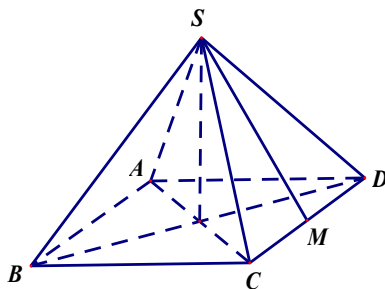
B.  $30^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $\arctan 2$ .

### Lời giải

Chọn A



Ta có  $AB \parallel CD$  nên  $(\angle AB; SC) = (\angle CD; SC) = \angle SCM$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Tam giác  $SCM$  vuông tại  $M$  và có  $SC = a\sqrt{2}$ ,  $CM = a$  nên là tam giác vuông cân tại  $M$  nên  $\angle SCM = 45^\circ$ . Vậy  $(\angle AB; SC) = 45^\circ$ .

**Câu 14:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $BD$  bằng.

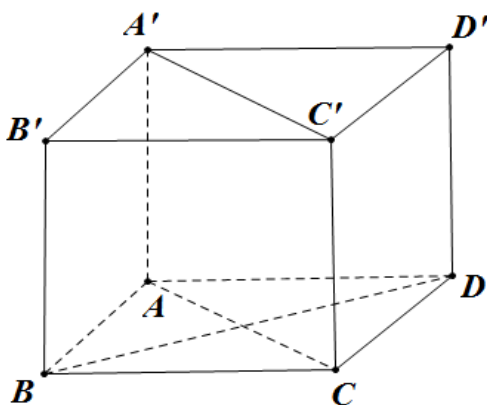
**A.**  $60^\circ$ .

**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $45^\circ$ .

**D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có:  $(\angle A'C'; BD) = (\angle AC; BD) = 90^\circ$

**Câu 15:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$  là

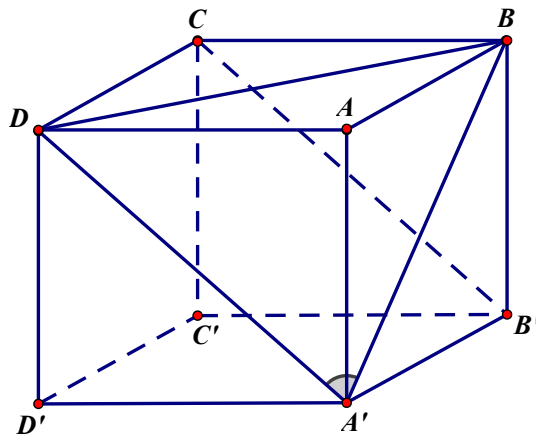
**A.**  $90^\circ$ .

**B.**  $60^\circ$ .

**C.**  $30^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có  $B'C \parallel A'D \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'D}) = \widehat{DA'B}$ .

Xét  $\triangle DA'B$  có  $A'D = A'B = BD$  nên  $\triangle DA'B$  là tam giác đều.

Vậy  $\widehat{DA'B} = 60^\circ$ .

**Câu 16:** Cho hình lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi  $C_1$  là trung điểm của  $CC'$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $BC_1$  và  $A'B'$ .

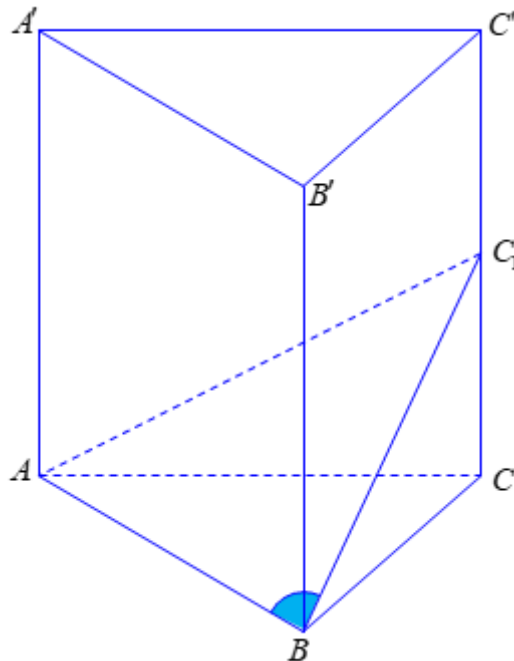
**A.**  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .

**Lời giải**



Ta có  $A'B' \parallel AB \Rightarrow (\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{ABC_1}$ .

Tam giác  $ABC_1$  có  $AB=1$ ;  $AC_1=BC_1=\sqrt{2}$  và  $\cos B = \frac{AB^2 + BC_1^2 - AC_1^2}{2AB \cdot BC_1}$   
 $\Leftrightarrow \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng:  
**A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $45^\circ$ .                      **D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

$S$

$I$

$A$

$D$

$B$

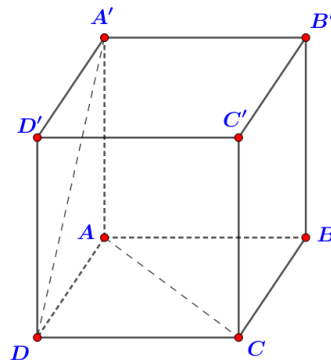
$J$

$C$

Ta có  $\left. \begin{array}{l} IJ \parallel SB \\ CD \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow (IJ, CD) = (SB, AB) = \angle SBA = 60^\circ$

(vì tam giác  $SAB$  là tam giác đều cạnh  $a$ ).

**Câu 18:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$  bằng



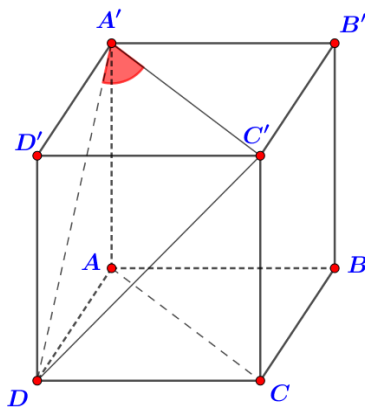
**A.**  $45^\circ$ .

**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có:  $\angle(AC, A'D) = \angle(A'C', A'D) = \angle A'C'D = 60^\circ$ .

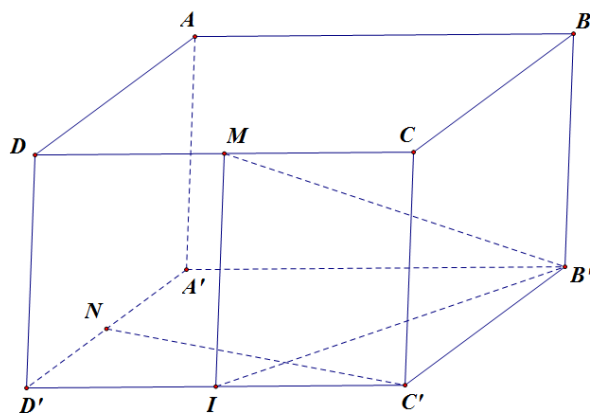
Vì  $A'D = A'C' = C'D$ .

**Câu 19:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  và  $N$  là trung điểm của  $A'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $B'M$  và  $C'N$  bằng

**A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $45^\circ$ .                      **C.**  $60^\circ$ .                      **D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



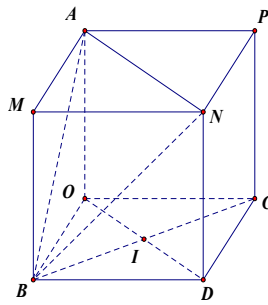
Gọi  $I$  là trung điểm của  $C'D'$  khi đó  $IB'$  là hình chiếu vuông góc của  $B'M$  trên  $(A'B'C'D')$ . Mặt khác ta có  $\angle B'C' + \angle NC'B' = \angle NC'D' + \angle NC'B' = \angle C'D'B' = 90^\circ \Rightarrow C'N \perp IB'$ . Do đó  $C'N \perp B'M$ . Vậy góc giữa  $B'M$  và  $C'N$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 20:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA = OB = OC = a$ ;  $OA, OB, OC$  vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OI$ .

**A.**  $45^\circ$ .                      **B.**  $30^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Vì tứ diện  $OABC$  có  $OA = OB = OC = a$ ;  $OA, OB, OC$  vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có thể dựng hình lập phương  $AMNP.OBDC$  như hình vẽ với  $I$  là trung điểm  $BC$  nên  $\{I\} = OD \cap BC$ .

Cạnh của hình lập phương trên bằng  $a$  nên  $AB = AN = NB = a\sqrt{2}$  vậy tam giác  $ABN$  đều.

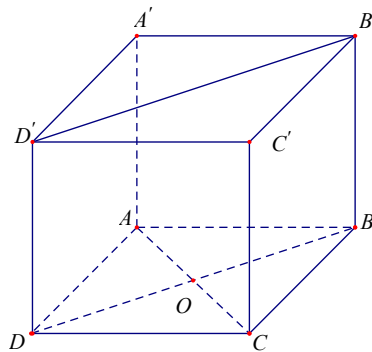
Dễ thấy  $OI \parallel AN$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OI$  bằng góc giữa  $AB$  và  $AN$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 21:** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật và  $\angle A'DA = 40^\circ$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$  là

- A.  $40^\circ$ .                      B.  $20^\circ$ .                      C.  $50^\circ$ .                      D.  $80^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $BD \parallel B'D' \Rightarrow (\angle AC; B'D') = (\angle AC; BD)$ .

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Vì  $\angle A'DA = 40^\circ \Rightarrow \angle A'DB = \angle A'DA = 40^\circ \Rightarrow \angle A'DB = 40^\circ \Rightarrow \angle A'DB = 40^\circ$

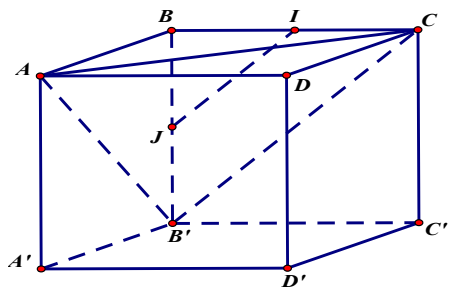
Vậy  $(\angle AC; B'D') = 80^\circ$ .

**Câu 22:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $BB'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $IJ$  bằng

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Vì  $IJ \parallel B'C$  nên  $(IJ, AC) = (B'C, AC)$ .

Mà  $AC, AB', CB'$  là đường chéo của các hình vuông bằng nhau nên  $AC = AB' = CB'$ .

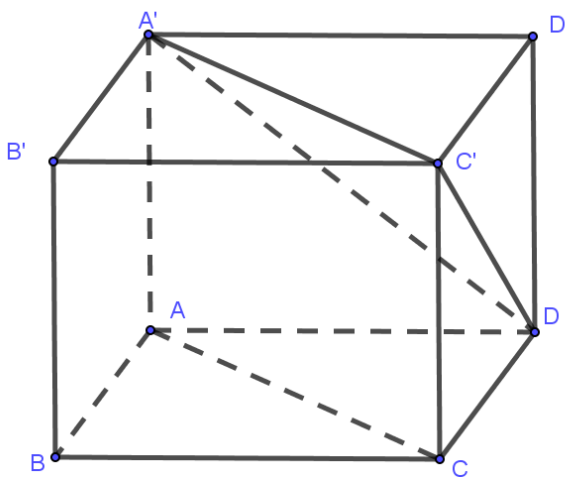
$\Rightarrow \triangle ACB'$  đều. Vậy  $(IJ, AC) = (B'C, AC) = \angle ACB' = 60^\circ$ .

**Câu 23:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$  bằng

- A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $45^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có  $AC \parallel A'C'$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $DA'$ .

Mà  $A'C' = DA' = DC'$  (các đường chéo của hình vuông).

Suy ra  $\triangle A'C'D$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle A'C'D = 60^\circ$ .

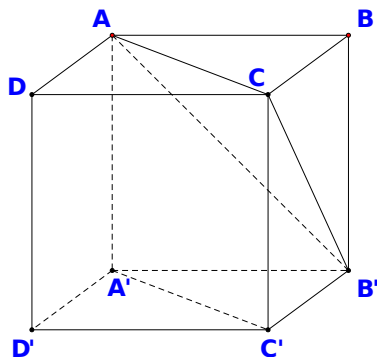
Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 24:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C'$ .

- A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $45^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Giả sử hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là  $a$ .

Do  $AC \parallel A'C'$  nên  $(AB', A'C') = (AB', AC)$ .

Ta có:  $AB' = AC = CB' = a\sqrt{2} \Rightarrow$  Tam giác  $AB'C$  đều nên  $\angle AB'C = 60^\circ$ .

$\Rightarrow (AB', A'C') = (AB', AC) = \angle AB'C = 60^\circ$ .

**Câu 25:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CD'$  bằng

**A.**  $60^\circ$ .

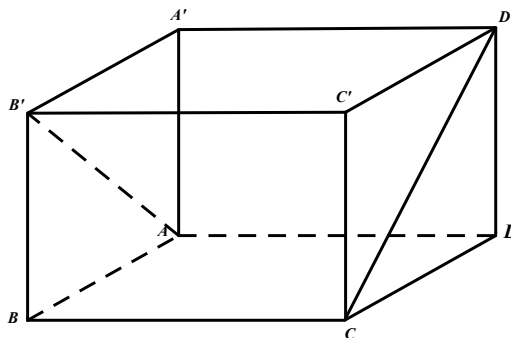
**B.**  $45^\circ$ .

**C.**  $30^\circ$ .

**D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có:  $CD' \parallel AB'$ .

$\Rightarrow (AB', CD') = (\angle D, CD') = 90^\circ$

(vì  $CDD'C'$  là hình vuông nên hai đường chéo vuông góc).

**Câu 26:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$  và  $SA \perp BC$ . Góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$  bằng

**A.**  $90^\circ$ .

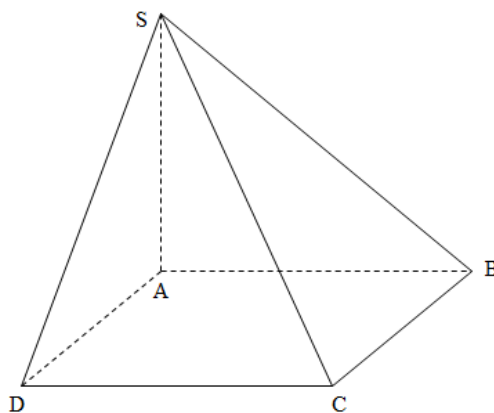
**B.**  $60^\circ$ .

**C.**  $45^\circ$ .

**D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

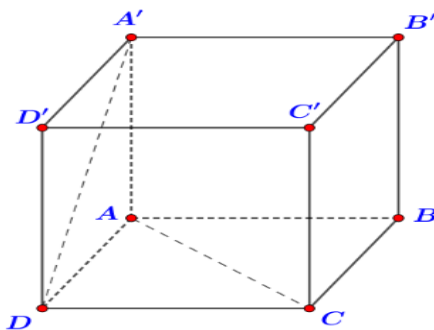


$AD \parallel BC, SA \perp BC \Rightarrow SA \perp AD$  hay  $\triangle SAD$  vuông tại  $A$ .

$AD \parallel BC, SD \cap AD = D \Rightarrow (\angle SD, BC) = (\angle SD, AD) = \angle SDA$ .

$\triangle SAD$  vuông tại  $A \Rightarrow \tan \angle SDA = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SDA = 60^\circ$ .

**Câu 27:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$  bằng



**A.**  $30^\circ$ .

**B.**  $60^\circ$ .

**C.**  $90^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi cạnh hình lập phương là  $a$ .

Ta có  $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \angle C'A'D$ .

Vì  $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$  nên tam giác  $A'C'D$  là tam giác đều.

Suy ra  $\angle C'A'D = 60^\circ$ .

**Câu 28:** Cho hình lăng trụ đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BC'$  và  $B'D'$  bằng

**A.**  $30^\circ$ .

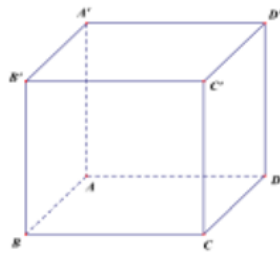
**B.**  $45^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

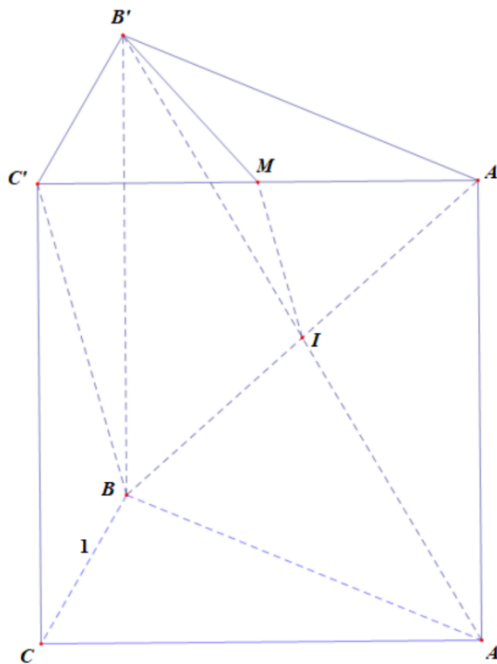


Ta có  $(BC', B'D') = (BC', BD) = \angle BDC'$ , xét  $\triangle BDC'$  có  $BD, BC', DC'$  đều là các đường chéo của hình vuông cạnh bằng  $a$  nên  $\triangle BDC'$  là tam giác đều. Do đó  $(BC', B'D') = (BC', BD) = \angle BDC' = 60^\circ$ .

**Câu 29:** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 1, AA' = \sqrt{2}$ . Tính góc giữa  $AB'$  và  $BC'$

**A.**  $30^\circ$ .      **B.**  $45^\circ$ .      **C.**  $120^\circ$ .      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**



Gọi  $I$  là tâm của hình chữ nhật  $ABB'A'$  và  $M$  là trung điểm của  $A'C'$ .

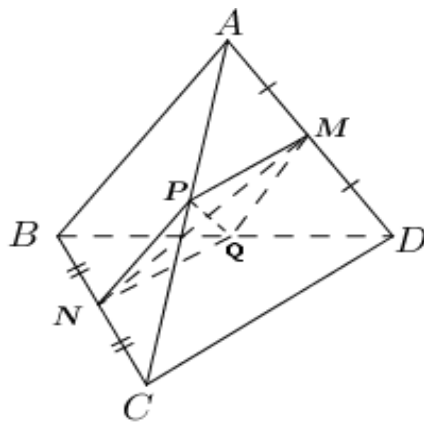
Có  $IM = IB' = B'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$  suy ra  $(AB', BC') = (AB', IM) = \angle MIB' = 60^\circ$ .

**Câu 30:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Biết  $MN = \sqrt{3}a$ , góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

**A.**  $45^\circ$ .      **B.**  $90^\circ$ .      **C.**  $60^\circ$ .      **D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khi đó ta có

$$PM \parallel NQ \parallel CD$$

$$PM = NQ = \frac{CD}{2}$$

là hình bình hành.

Ta cũng có  $MQ \parallel NP \parallel AB, MQ = NP = \frac{AB}{2}$ .

Do  $AB = CD = 2a \Rightarrow PM = MQ = QN = NP = a$ .

Gọi  $(AB, CD) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = |\cos(\angle MPN)|$ . Áp dụng định lí Côsin ta có

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos(\angle MPN)$$

$$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos(\angle MPN)$$

$$\Rightarrow \cos(\angle MPN) = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{nên } \cos \alpha = |\cos(\angle MPN)| = \frac{1}{2} \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$$

**Câu 31:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng

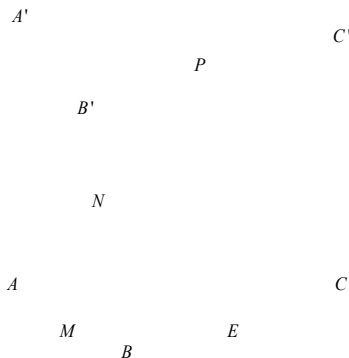
**A.**  $90^\circ$ .

**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**



**Chọn C**

Gọi  $M, N, P, E$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB, BB', B'C', BC$ .

Suy ra  $MN \parallel AB'$  và  $NP \parallel BC'$ . Khi đó góc giữa đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  là góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $NP$ .

Ta có: 
$$MN = NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

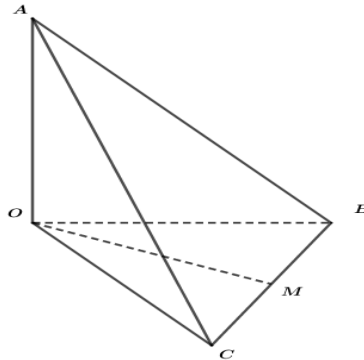
Xét tam giác  $PEM$  vuông tại  $E$ , 
$$MP^2 = PE^2 + ME^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $MNP$ , ta có

$$\cos MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc  $MNP$  bằng  $120^\circ$  nên góc giữa đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 32:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $AB$  bằng



**A.**  $90^\circ$ .

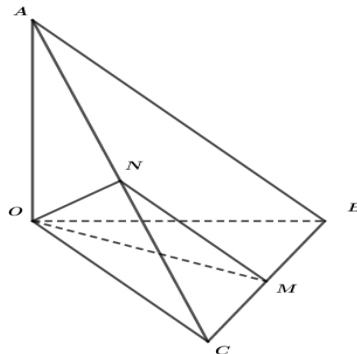
**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Đặt  $OA = a$  suy ra  $OB = OC = a$  và  $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

Gọi  $N$  là trung điểm  $AC$  ta có  $MN \parallel AB$  và  $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc  $(\vec{OM}, \vec{AB}) = (\vec{OM}, \vec{MN})$ . Xét  $\triangle OMN$

Trong tam giác  $OMN$  có  $ON = OM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  nên  $OMN$  là tam giác đều

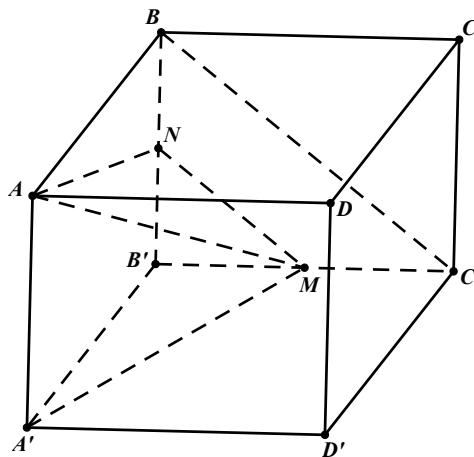
Suy ra  $\angle OMN = 60^\circ$ . Vậy  $(\vec{OM}, \vec{AB}) = (\vec{OM}, \vec{MN}) = 60^\circ$ .

**Câu 33:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ ; gọi  $M$  là trung điểm của  $B'C'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $BC'$  bằng

- A.**  $45^\circ$ .      **B.**  $90^\circ$ .      **C.**  $30^\circ$ .      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Giả sử cạnh của hình lập phương là  $a > 0$ .

Gọi  $N$  là trung điểm đoạn thẳng  $BB'$ . Khi đó,  $MN \parallel BC'$  nên  $(\vec{AM}, \vec{BC'}) = (\vec{AM}, \vec{MN})$ .

Xét tam giác  $A'B'M$  vuông tại  $B'$  ta có:  $A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

Xét tam giác  $AA'M$  vuông tại  $A'$  ta có:  $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$ .

Có  $AN = A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $MN = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

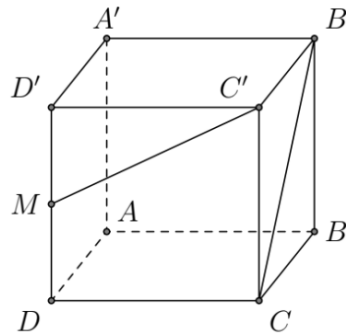
Trong tam giác  $AMN$  ta có:

$$\cos \angle AMN = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot MA \cdot MN} = \frac{\frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4} \cdot \frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra  $\angle AMN = 45^\circ$ .

Vậy  $(AM, BC') = (AM, MN) = \angle AMN = 45^\circ$ .

**Câu 34:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $DD'$  (Tham khảo hình vẽ). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng  $B'C$  và  $C'M$



**A.**  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

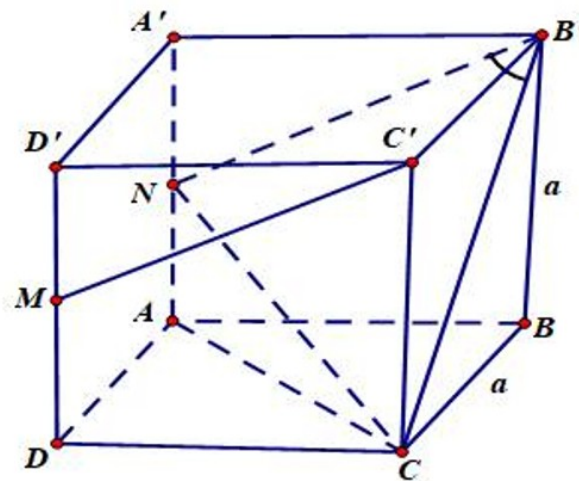
**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**D.**  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $N$  là trung điểm của  $AA' \Rightarrow B'N \parallel C'M \Rightarrow (B'C, C'M) = (B'C, B'N)$

Xét tam giác  $B'NC$  có  $B'N = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $B'C = a\sqrt{2}$ ;  $NC = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$

$$\cos (B'C, C'M) = |\cos \angle B'NC| = \frac{|B'N^2 + B'C^2 - NC^2|}{2B'N \cdot B'C} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Vậy

**Câu 35:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AD$ .

Giả sử  $AB = CD = a$  và  $PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  là

**A.**  $90^\circ$ .

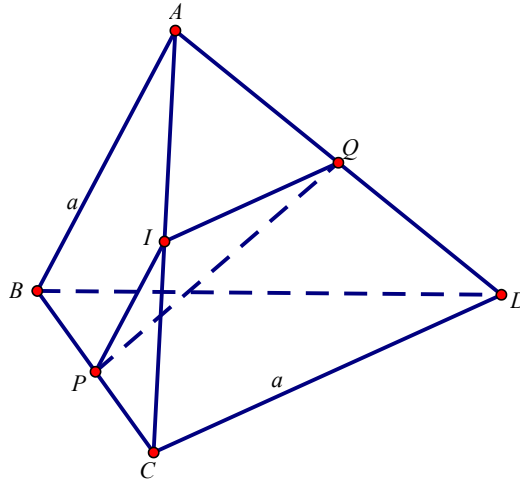
**B.**  $45^\circ$ .

**C.**  $30^\circ$ .

**D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ , khi đó  $\begin{cases} IP \parallel AB \\ IQ \parallel CD \end{cases}$  do  $IP, IQ$  lần lượt là các đường trung bình của tam giác  $CAB$  và  $ACD$ .

Suy ra góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  là góc giữa hai đường thẳng  $IP$  và  $IQ$ .

Xét tam giác  $IPQ$ , ta có

$$\cos \widehat{PIQ} = \frac{IP^2 + IQ^2 - PQ^2}{2IP \cdot IQ} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

suy ra  $\widehat{PIQ} = 120^\circ$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  có số đo là  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

**Câu 36:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  ta được kết quả:

**A.**  $90^\circ$ .

**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

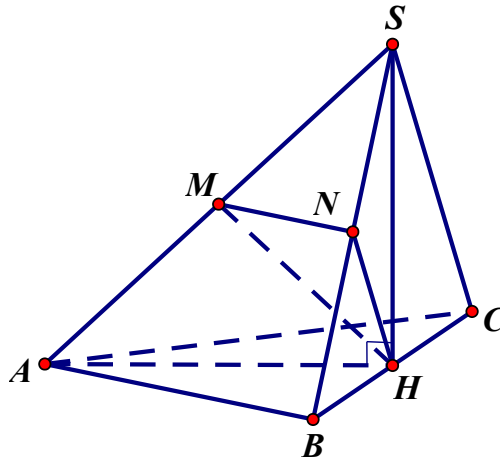
**Lời giải**

\* Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ , theo đầu bài  $SA = SB = SC$  và tam giác  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  ta có  $H$  là trung điểm của

$BC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$  ta có:  $\begin{cases} MN \parallel AB \\ HN \parallel SC \end{cases} \Rightarrow$  Góc giữa  $AB$  và  $SC$  là góc giữa  $MN$  và  $HN$ .

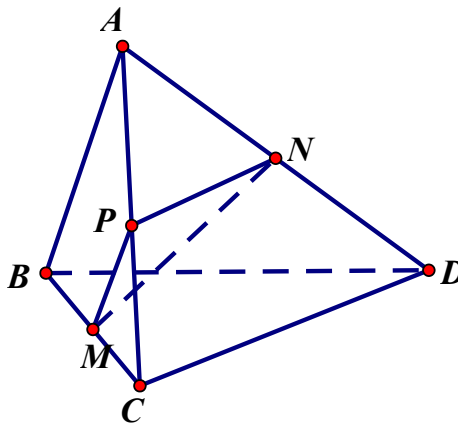
Xét tam giác  $\triangle MNH$  ta có:  $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; HN = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}; MH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$  ( Do  $\triangle SHA$  vuông tại  $H$  )

$\Rightarrow$  tam giác  $\triangle MNH$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle MNH = 60^\circ$ . Vậy góc cần tìm là  $60^\circ$ .



- Câu 37:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa  $AB$  và  $CD$ .
- A.**  $45^\circ$ .      **B.**  $30^\circ$ .      **C.**  $90^\circ$ .      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**



Kẻ  $MP \parallel AB, NP \parallel CD$  nên góc giữa  $AB$  và  $CD$  là góc giữa  $MP$  và  $NP$ .

$$\cos \angle MPN = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle MPN = 120^\circ.$$

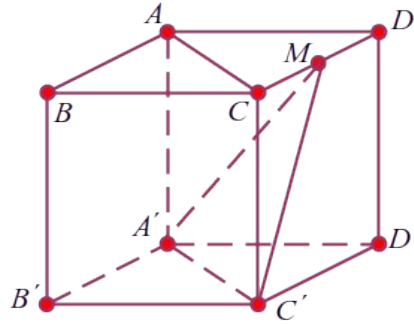
Vậy góc giữa  $AB$  và  $CD$  bằng  $60^\circ$ .

- Câu 38:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  trung điểm các cạnh  $CD$ .

cosin của góc giữa  $AC$  và  $C'M$  là

- A.  $0$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Lời giải**



Ta có  $AC \parallel A'C'$  nên góc giữa  $AC$  và  $C'M$  cũng bằng góc giữa  $A'C'$  và  $C'M$  là  $\angle A'C'M$ .

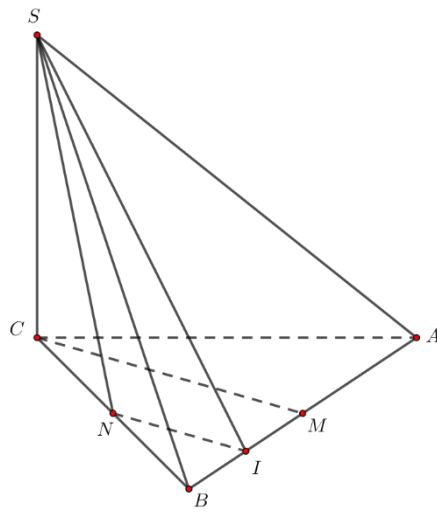
Gọi cạnh của hình lập phương có độ dài là  $a$ . Khi đó  $A'C' = a\sqrt{2}$ ,  $C'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  ( trong tam giác vuông  $CC'M$  có  $CM = \frac{a}{2}$ ,  $A'M = \frac{3a}{2}$  ( trong tam giác vuông  $A'MD$ ,  $MD = \frac{a}{2}$ ,  $A'D = a\sqrt{2}$  ).

Xét tam giác  $A'MC'$  ta có  $\cos \angle A'C'M = \frac{(A'C')^2 + C'M^2 - A'M^2}{2A'C' \cdot C'M} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 39:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a = 4\sqrt{2}\text{cm}$ , cạnh bên  $SC$  vuông góc với đáy và  $SC = 2\text{cm}$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Góc giữa hai đường thẳng  $SN$  và  $CM$  là

- A.  $30^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $45^\circ$ .      D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BM$ , ta có  $NI \parallel CM$  nên góc giữa  $SN$  và  $CM$  là góc giữa  $SN$  và  $NI$ . Xét tam giác  $SNI$  có  $SN = \sqrt{SC^2 + CN^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$ ;

$$NI = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6};$$

$$CI = \sqrt{CM^2 + MI^2} = \sqrt{24+2} = \sqrt{26} \Rightarrow SI = \sqrt{SC^2 + CI^2} = \sqrt{4+26} = \sqrt{30}.$$

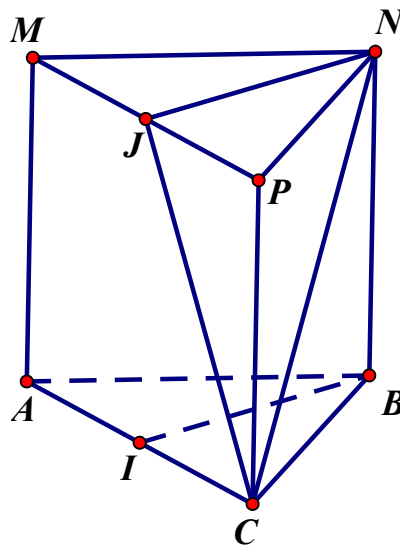
$$\cos \angle SNI = \frac{SN^2 + NI^2 - SI^2}{2SN \cdot NI} = \frac{12+6-30}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-12}{3\sqrt{2} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle SNI = 135^\circ.$$

Vậy góc giữa  $SN$  và  $CM$  bằng  $45^\circ$ .

**Câu 40:** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.MNP$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Cosin của góc giữa hai đường thẳng  $NC$  và  $IB$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$ .      C.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

**Lời giải**

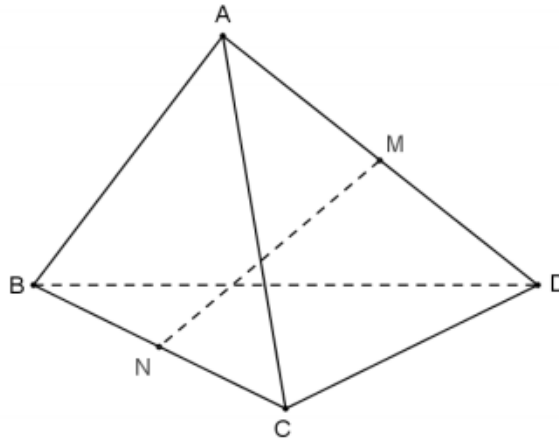


Gọi  $J$  là trung điểm của  $MP$ . Góc giữa hai đường thẳng  $NC$  và  $IB$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $NC$  và  $NJ$ .

Ta có  $JN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $NC^2 = NP^2 + PC^2 = 2a^2$ ,  $JC^2 = JP^2 + PC^2 = \frac{5a^2}{4}$ .

Xét tam giác  $NJC$  có:  $\cos \angle JNC = \frac{JN^2 + NC^2 - JC^2}{2 \cdot JN \cdot NC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

**Câu 41:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Xác định độ dài đoạn thẳng  $MN$  để góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $MN$  bằng  $30^\circ$ .



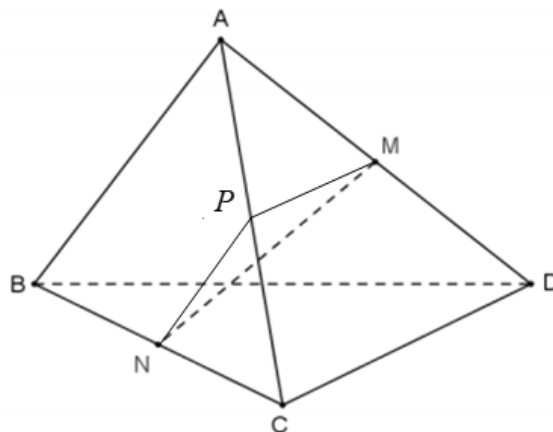
**A.**  $MN = \frac{a}{2}$ .

**B.**  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**C.**  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**D.**  $MN = \frac{a}{4}$ .

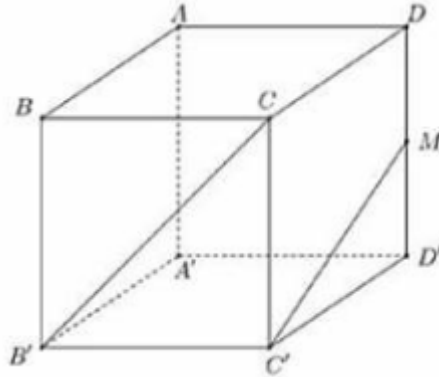
**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$ . Suy ra  $PM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = PN$ . Do đó tam giác  $PMN$  cân tại  $P$ . Lại có góc giữa  $AB$  và  $MN$  bằng  $30^\circ$  nên góc giữa  $MN$  và  $PN$  bằng  $30^\circ$ . Vậy tam giác  $PMN$  là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ .

Ta có  $PN \cdot \sqrt{3} = MN$  nên  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 42:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $DD'$  (tham khảo hình vẽ dưới đây). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $B'C$  và  $C'M$ .



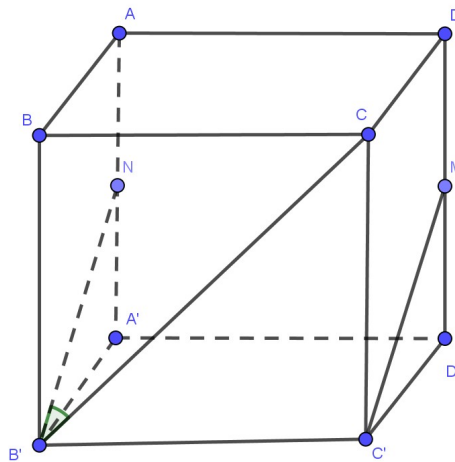
**A.**  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ .

**B.**  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**C.**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**D.**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**



Kẻ  $B'N$  song song với  $C'M$ . Ta được  $(B'C; C'M) = (B'C; B'N) = \angle B'NC$

Ta có  $B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ ,  $B'N = \sqrt{AB'^2 + A'N^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ,  
 $CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \frac{3}{2}a$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong  $\triangle B'NC$ , ta được

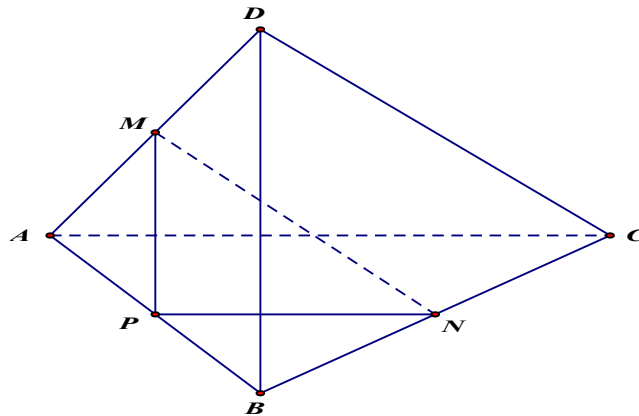
$$\cos \angle B'NC = \frac{B'N^2 + B'C^2 - NC^2}{2 \cdot B'N \cdot B'C} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

**Câu 43:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = 3a, BD = 4a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Biết  $AC$  vuông góc  $BD$ . Tính  $MN$ .

- A.  $MN = \frac{5a}{2}$  .      B.  $MN = \frac{7a}{2}$  .      C.  $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$  .      D.  $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $P$  là trung điểm  $AB$

Ta có  $\begin{cases} AC \parallel PN \\ BD \parallel PM \end{cases} \Rightarrow PN \perp PM$  và  $PN = \frac{AC}{2} = \frac{3a}{2}; PM = \frac{BD}{2} = 2a$

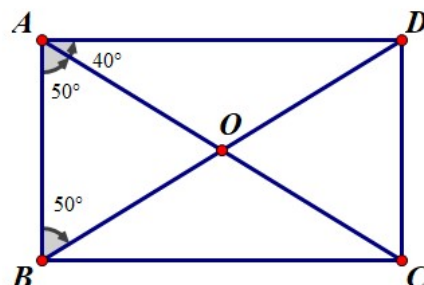
$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{5a}{2}$$

**Câu 44:** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật và  $\angle A'DA = 40^\circ$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AC, B'D'$  là

- A.  $40^\circ$       B.  $20^\circ$  .      C.  $50^\circ$  .      D.  $80^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn D**



Vì  $BD \parallel B'D'$  nên  $(\widehat{AC; B'D'}) = (\widehat{AC; BD}) = \widehat{AOB} = 80^\circ$  với O là tâm hình chữ nhật ABCD.

**Câu 45:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Góc giữa hai đường thẳng  $CD'$  và  $A'C'$  bằng.

A.  $30^\circ$ .

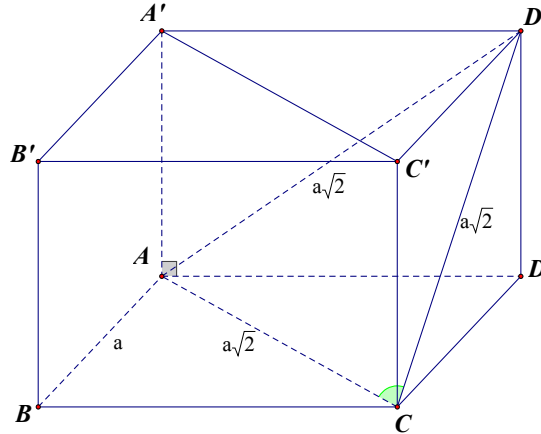
B.  $90^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta thấy  $A'C' \parallel AC \Rightarrow (\widehat{CD'; A'C'}) = (\widehat{CD'; AC}) = \varphi$

Do các mặt của hình lập phương bằng nhau nên các đường chéo  $AC = CD' = AD' = a\sqrt{2}$

Suy ra  $\Delta ACD'$  đều nên  $(\widehat{CD'; A'C'}) = (\widehat{CD'; AC}) = \varphi = 60^\circ$ .

**Câu 46:** Cho tứ diện ABCD có  $AB = AC = AD = 1$ ;  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ;  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ ;  $\widehat{CAD} = 120^\circ$ . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

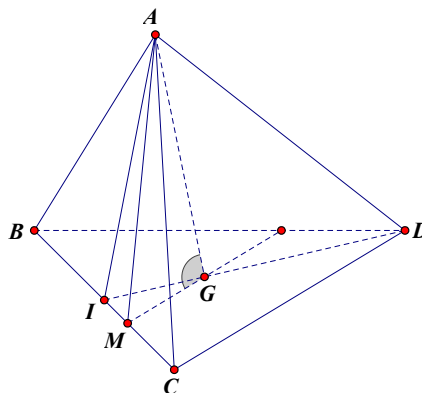
A.  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .

B.  $\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{1}{6}$ .

D.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Lời giải**



\* $\triangle ABC$  đều  $\Rightarrow BC = 1$ .

\* $\triangle ACD$  cân tại  $A$  có  $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$ .

\* $\triangle ABD$  vuông cân tại  $A$  có  $BD = \sqrt{2}$ .

\* $\triangle BCD$  có  $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$  vuông tại  $B$ .

Dựng đường thẳng  $d$  qua  $G$  và song song  $CD$ , cắt  $BC$  tại  $M$ .

Ta có  $MG \parallel CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ , xét  $\triangle BDI$  vuông tại  $B$  có  $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$ .

Ta có  $\frac{IM}{IC} = \frac{MG}{CD} = \frac{IG}{ID} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM = \frac{1}{3} \cdot IC = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{6}; \quad MG = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{\sqrt{3}}{3};$   
 $IG = \frac{1}{3} \cdot ID = \frac{1}{2}$ .

Xét  $\triangle AIM$  vuông tại  $I$  có  $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ .

$$\cos \angle AID = \frac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2AI \cdot ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2AI \cdot IG \cdot \cos \angle AID} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Xét  $\triangle AMG$  có

$$\cos (AG, MG) = |\cos \angle AGM| = \left| \frac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2 \cdot AG \cdot GM} \right| = \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| = \frac{1}{6}$$

**Câu 47:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $4a$ , lấy  $H, K$  lần lượt trên các cạnh  $AB, AD$  sao cho  $BH = 3HA, AK = 3KD$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  tại  $H$  lấy điểm  $S$  sao cho  $\angle SBH = 30^\circ$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $CH$  và  $BK$ . Tính  $\cos$  của góc giữa hai đường thẳng  $SE$  và  $BC$ .

A.  $\frac{28}{5\sqrt{39}}$ .

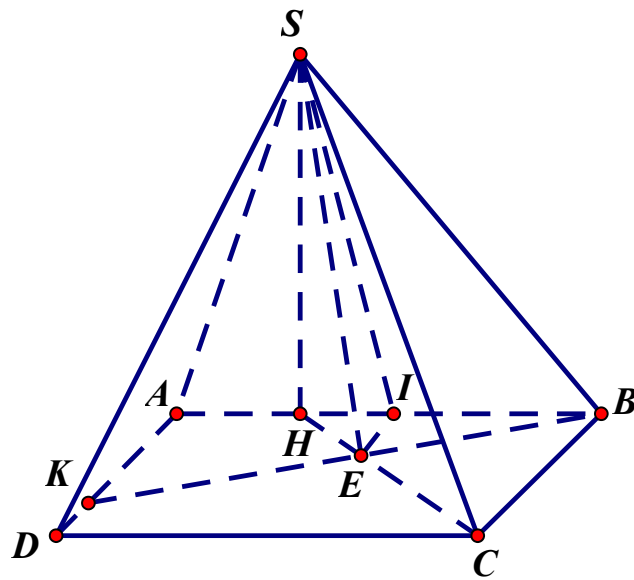
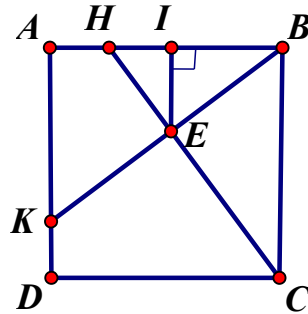
B.  $\frac{18}{5\sqrt{39}}$ .

C.  $\frac{36}{5\sqrt{39}}$ .

D.  $\frac{9}{5\sqrt{39}}$ .

**Lời giải**

Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $E$  lên  $AB$  ta có  $\angle ABD = \angle BCH$ ,  
 $\Rightarrow \angle ABD = \angle BCH \Rightarrow \angle HEB = 90^\circ$ .



Ta có:  $\cos(\angle SE; BC) = \cos(\angle SE; EI) = |\cos \angle SEI|$ ,  $SH = BH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$ .

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HB} \Rightarrow HE = \frac{HB^2}{HC} = \frac{9a}{5}, \quad SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{81a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{39}}{5}.$$

$$\frac{HE}{HB} = \frac{HI}{HE} \Rightarrow HI = \frac{HE^2}{HB} = \frac{27a}{25}, \quad SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{27a}{25}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{651}}{25}.$$

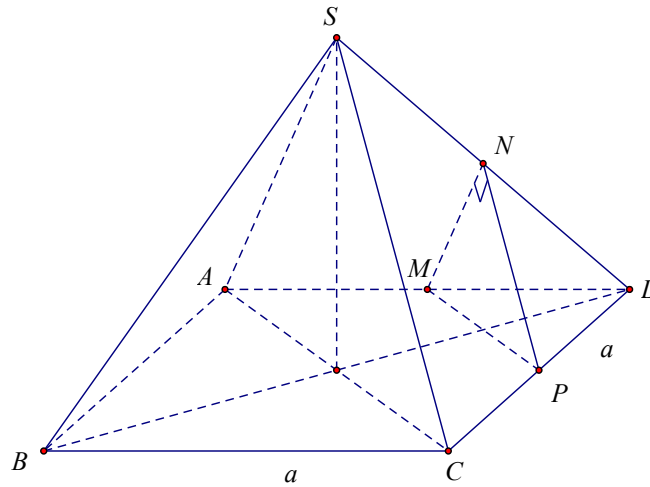
$$\frac{EI}{BC} = \frac{HI}{HB} = \frac{9}{25} \Rightarrow EI = \frac{36a}{25}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $SEI$  ta được:

$$\cos \angle SEI = \frac{SE^2 + EI^2 - SI^2}{2 \cdot SE \cdot EI} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2 + \left(\frac{36a}{25}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{39}}{5} \cdot \frac{36a}{25}} = \frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

- Câu 48:** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SD$ . Số đo của góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $SC$  là
- A.**  $45^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có:  $NP \parallel SC \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP)$ .

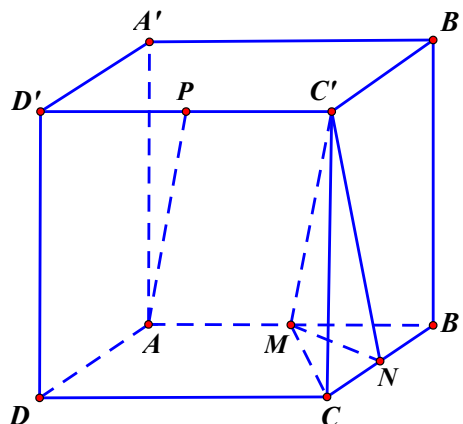
Xét tam giác  $MNP$  ta có:  $MN = \frac{a}{2}$ ,  $NP = \frac{a}{2}$ ,  $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow MN^2 + NP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = MP^2 \Rightarrow \Delta MNP \text{ vuông tại } N$$

$$\Rightarrow \angle MNP = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = 90^\circ.$$

- Câu 49:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, C'D'$ . Xác định góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $AP$ .
- A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$                       **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có tứ giác  $AMC'P$  là hình bình hành nên  $AP \parallel MC'$   
 $\Rightarrow (\angle MN, AP) = (\angle MN, MC') = \angle NMC'$

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng  $a$ .

Xét tam giác  $C'CM$  vuông tại  $C$  có

$$C'M = \sqrt{C'C^2 + MC^2} = \sqrt{C'C^2 + BC^2 + MB^2} = \frac{3a}{2}$$

Xét tam giác  $C'CN$  vuông tại  $C$  có  $C'N = \sqrt{C'C^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$

Mà  $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

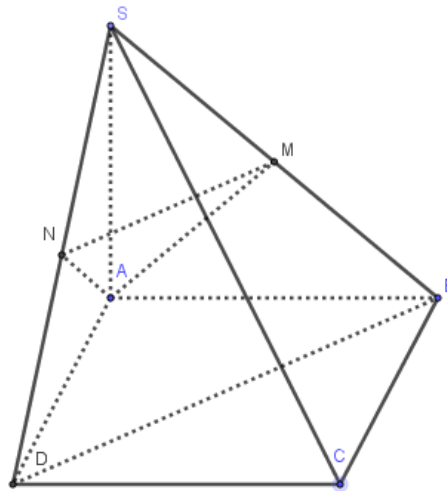
Xét tam giác  $C'CM$  có  $\cos \angle NMC' = \frac{MC'^2 + MN^2 - C'N^2}{2MC' \cdot MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \angle NMC' = 45^\circ \Rightarrow (\angle MN, AP) = 45^\circ$$

**Câu 50:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SB$ . Góc giữa  $AM$  và  $BD$  là

- A.**  $60^\circ$  .                      **B.**  $30^\circ$  .                      **C.**  $90^\circ$  .                      **D.**  $45^\circ$  .

**Lời giải**



Gọi  $N$  là trung điểm  $SD$  khi đó  $MN \parallel BD$ , suy ra  $(\angle BD, AM) = (\angle MN, AM) = \angle AMN$

$$AN = AM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ suy ra } \triangle AMN \text{ là tam giác đều, nên } \angle AMN = 60^\circ$$

**Câu 51:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính giá trị của  $\cos(\angle AB, DM)$

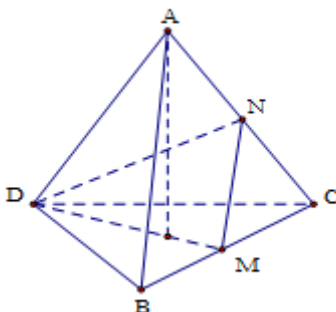
**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**C.**  $\frac{1}{2}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**



Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng  $a$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$ .

Khi đó:  $(\vec{AB}, \vec{DM}) = (\vec{MN}, \vec{DM})$

Ta có:  $MN = \frac{a}{2}, DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$\cos \angle NMD = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy  $\cos(\vec{AB}, \vec{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 52:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, C'D'$ . Xác định góc giữa  $MN$  và  $AP$ .

**A.**  $60^\circ$ .

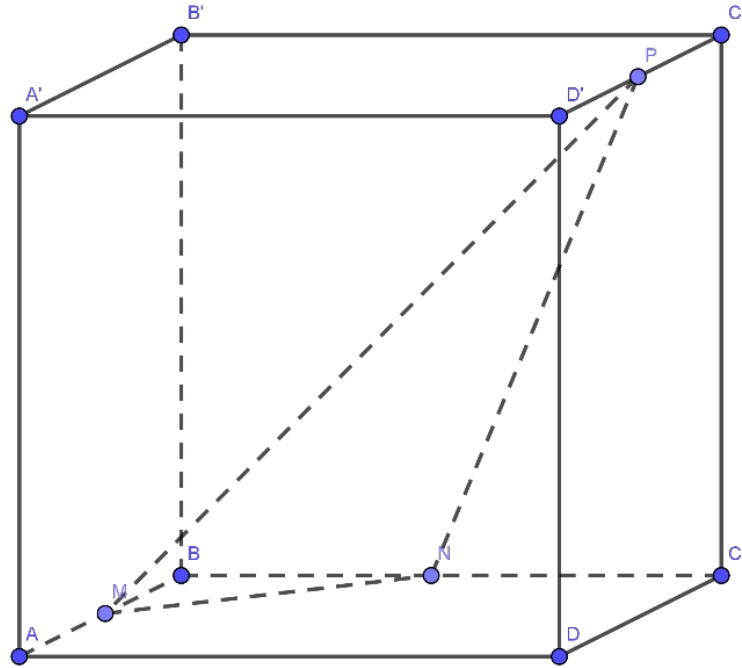
**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $90^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $MN$  song song  $AC$  (Đường trung bình)

$$(MN, AP) = (AC, AP)$$

Giả sử hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài các cạnh bằng 1

Xét tam giác  $APC$  có:

$$PC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad AP = \sqrt{1^2 + \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{3}{2}.$$

Theo định lý hàm cos trong tam giác  $APC$  ta có:

$$\cos \angle PAC = \frac{2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4}}{2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle PAC = 45^\circ$$

**Câu 53:** Cho tứ diện  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a; BC = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng

**A.**  $0^\circ$ .

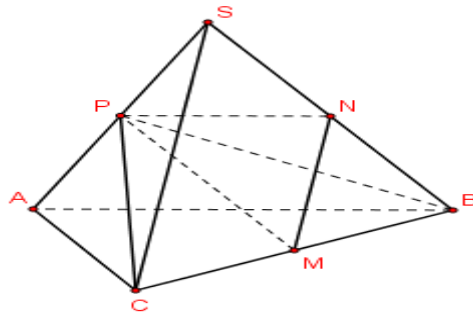
**B.**  $120^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, SB, SA$ .

Góc giữa  $AB$  và  $SC$  là góc giữa  $PN$  và  $MN$ .

$$MN = \frac{a}{2} = NP$$

$$PC = BP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM = \sqrt{PC^2 - CM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra tam giác  $MNP$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle MNP = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa  $AB$  và  $SC$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 54:** Cho lăng trụ đều  $ABC.DEF$  có cạnh đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $2a$ . Tính  $\cos$  của góc tạo bởi hai đường thẳng  $AC$  và  $BF$ .

**A.**  $\frac{\sqrt{5}}{10}$

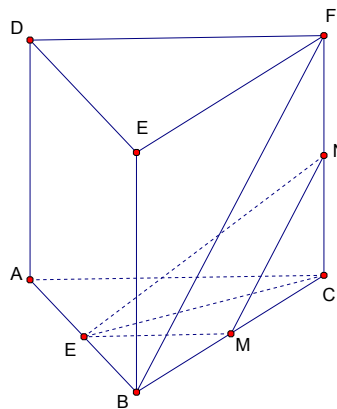
**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

**C.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**D.**  $\frac{\sqrt{3}}{10}$

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $M, N, E$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $BC, CF, AB$ .

Khi đó:  $\begin{cases} MN \parallel BF \\ ME \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (AC; BF) = (MN; ME)$ .

Tính góc  $\angle EMN$ .

Xét tam giác  $MNE$ , ta có:

$$MN = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$ME = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$NE = \sqrt{EC^2 + NC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\cos \angle EMN = \frac{ME^2 + MN^2 - EN^2}{2ME \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Suy ra:

$$\text{Vậy } \cos(AC; BF) = |\cos \angle EMN| = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

**Câu 55:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DM$ ?

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

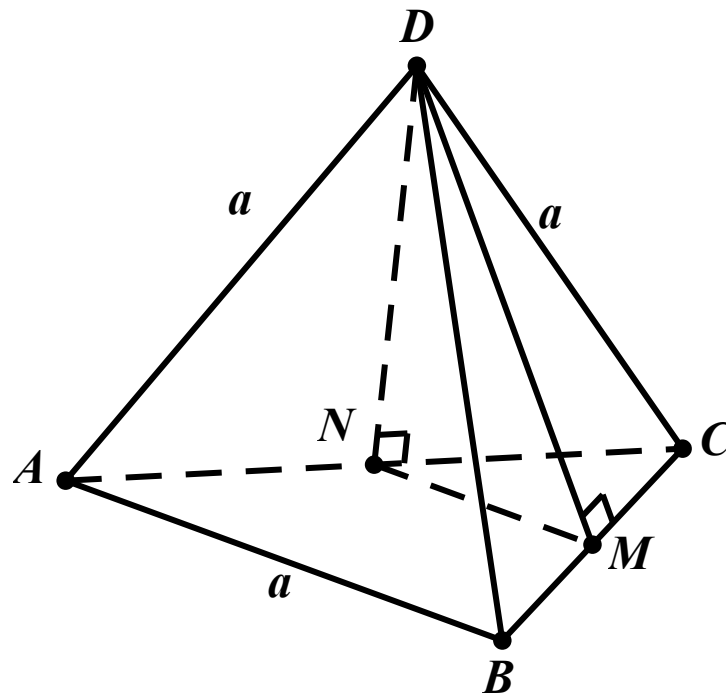
**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó,  $AB \parallel MN$  nên  $(DM, AB) = (DM, MN)$ .

Dễ dàng tính được  $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và  $MN = \frac{a}{2}$ .

Trong tam giác  $DMN$ , ta có

$$\cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Vì  $\cos \widehat{DMN} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$  nên  $\cos(DM, MN) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

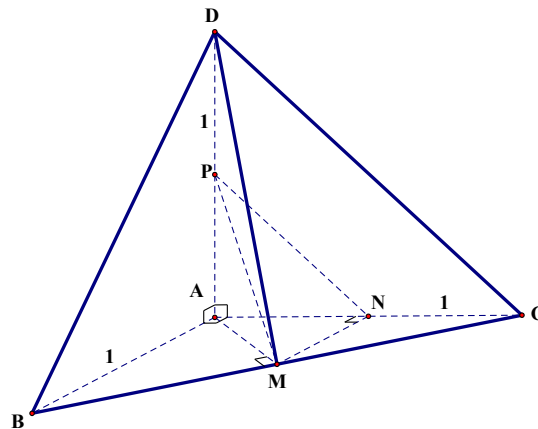
Vậy  $\cos(DM, AB) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 56:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau, biết  $AB = AC = AD = 1$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

**A.**  $45^\circ$ .      **B.**  $60^\circ$ .      **C.**  $30^\circ$ .      **D.**  $90^\circ$ .

Lời giải

**Chọn D**



Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AC, AD$ .

Trong  $\triangle ABC$ , có  $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \end{cases}$  (Tính chất đường trung bình)

Trong  $\triangle ACD$ , có  $\begin{cases} NP \parallel CD \\ NP = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$  (Tính chất đường trung bình)

Trong  $\triangle AMP$ , có  $MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ta có 
$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB; CD) = (MN; NP) = \widehat{MNP}$$

Áp dụng định lý Cosin cho  $\triangle MNP$ , có

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2NP \cdot NM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$$

Hay  $(AB; CD) = 90^\circ$ .

**Câu 57:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = a$ ,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$ .

A.  $\sqrt{\frac{3}{10}}$ .

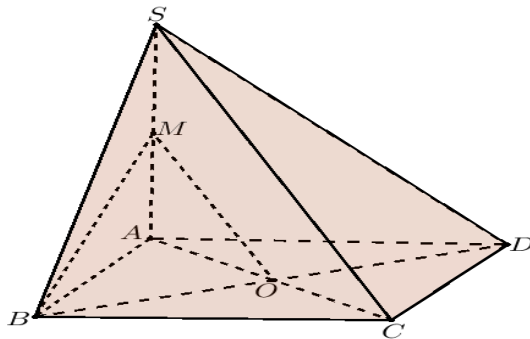
B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ .

D.  $\frac{\sqrt{3}}{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn. B.**



Kẻ  $OM \parallel SC \Rightarrow (\widehat{SC, BD}) = (\widehat{OM, BD})$

Ta có  $ABCD$  là hình chữ nhật có  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = BD = 2a$ .

$$BO = \frac{BD}{2} = a, \quad OM = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad BM = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos(\widehat{MOB}) = \frac{OM^2 + BO^2 - BM^2}{2OM \cdot BO} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(\widehat{SC, BD}) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 58:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ , góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng.

A.  $45^\circ$ .

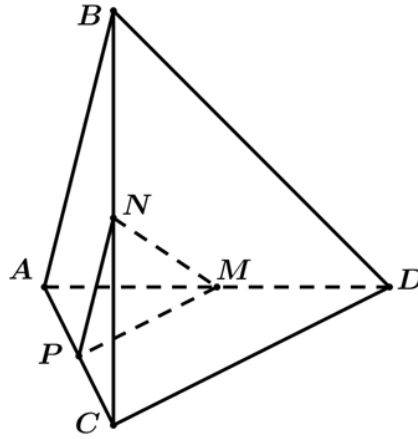
B.  $90^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

## Chọn C



Gọi  $P$  là trung điểm  $AC$ , ta có  $PM \parallel CD$  và  $PN \parallel AB$ , suy ra  $(\angle AB, CD) = (\angle PM, PN)$ .

Dễ thấy  $PM = PN = a$ .

Xét  $\triangle PMN$  ta có  $\cos \angle MPN = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle MPN = 120^\circ \Rightarrow (\angle AB, CD) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

**Câu 59:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ ,  $SA = a, AB = a, BC = a\sqrt{2}$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Côsin của góc giữa đường thẳng  $AI$  và  $SC$  là?

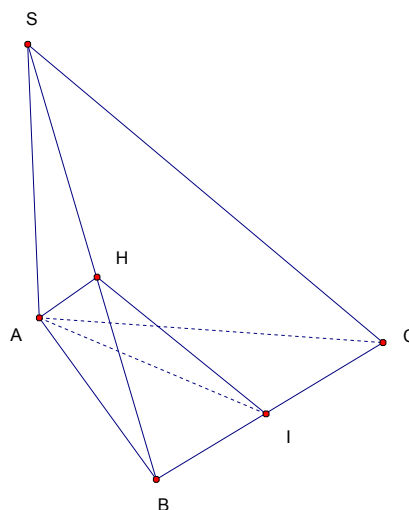
A.  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

B.  $\frac{2}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

**Lời giải**



Gọi  $H$  là trung điểm  $SB$  ta có  $SC \parallel HI$

Góc giữa đường thẳng  $AI$  và  $SC$  bằng góc giữa đường thẳng  $AI$  và  $HI$

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{AB^2 + SA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$HI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

$AI^2 = AH^2 + HI^2$  suy ra tam giác  $AHI$  vuông tại  $H$

$$\cos \angle AIH = \frac{HI}{AI} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Côsin của góc giữa đường thẳng  $AI$  và  $SC$  là  $\cos \angle AIH = \sqrt{\frac{2}{3}}$

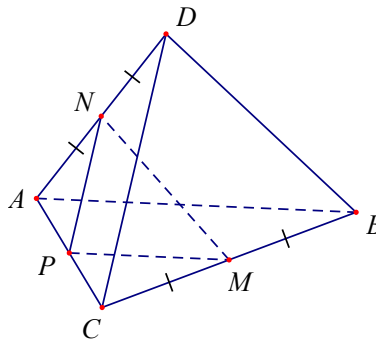
**Câu 60:** Cho tứ diện  $ABCD$  gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết

$AB = CD = a, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**A.**  $30^\circ$ . **B.**  $90^\circ$ . **C.**  $60^\circ$ . **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$ , ta có:  $MP \parallel AB$ ,  $PN \parallel CD$  và  $MP = PN = \frac{a}{2}$ .

Do  $MP \parallel AB$  và  $PN \parallel CD$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $MP$  và  $PN$ .

Xét tam giác  $MPN$ , có  $\cos \angle MPN = \frac{MP^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot PN} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle MPN = 120^\circ$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng  $60^\circ$ .

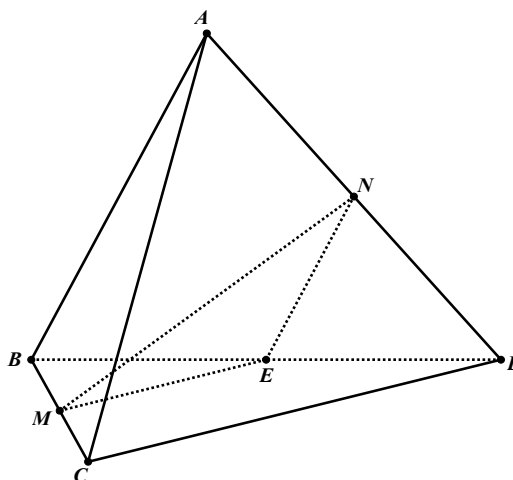
**Câu 61:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ . Biết

$AB = CD = a$  và  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

**A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$ .                      **C.**  $120^\circ$ .                      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $E$  lần lượt là trung điểm của  $BD$ . Vì  $\begin{cases} AB \parallel NE \\ CD \parallel ME \end{cases}$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $NE$  và  $ME$ .

$$\cos \angle MEN = \frac{ME^2 + NE^2 - MN^2}{2ME \cdot NE} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Trong tam giác  $MNE$  ta có:

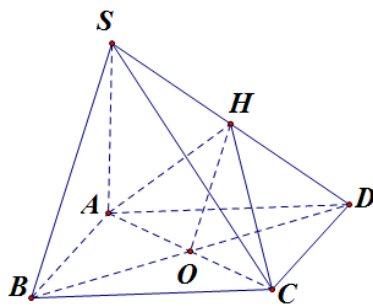
Suy ra  $\angle MEN = 120^\circ$ . Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  là  $60^\circ$ .

**Câu 62:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{2}$ ;  $SA = 2a$ ;  $SA \perp (ABCD)$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$ .

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .                      **B.**  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .                      **C.**  $\frac{1}{\sqrt{15}}$ .                      **D.**  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $H$  là trung điểm của  $SD \Rightarrow OH \parallel SB$ . Do đó  $(SB, AC) = (OH, AC)$ .

Tính được  $SB = \sqrt{5}a$ ;  $SD = a\sqrt{6}$ ;  $AC = a\sqrt{3}$ , suy ra  $OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  
 $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ ;

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } \cos \angle AOH = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ nên } \cos(SB, AC) = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $B'D'$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 63:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $AD'$ .

**A.**  $90^\circ$ .

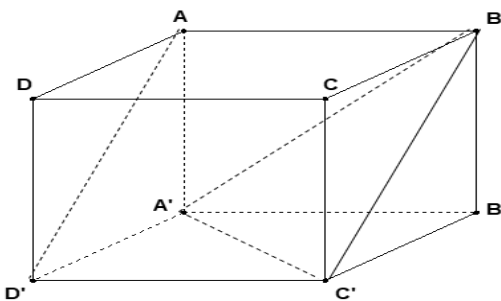
**B.**  $60^\circ$ .

**C.**  $45^\circ$ .

**D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Vì là hình lập phương  $\Rightarrow$  6 mặt đều là hình vuông bằng nhau nên các đường chéo của chúng đều bằng nhau

$$\Rightarrow A'C' = A'B = BC'$$

$$\Rightarrow \triangle A'C'B \text{ đều}$$

Ta có:  $AD' \parallel BC' \Rightarrow (A'B; AD') = (A'B; BC') = \angle A'BC' = 60^\circ$

## •Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

**Câu 1:** Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt  $a, b, c$ . Xác định tính đúng sai các mệnh đề sau?

- a) Nếu  $a // b$  thì  $(a, c) = (c, b)$ .
- b) Nếu  $c // b$  thì  $(a, b) = (a, c)$ .
- c) Nếu  $a \perp c, b \perp c$  thì  $a // b$ .
- d) Nếu  $a \perp c$  thì  $(a, b) = (c, b)$ .

### Lời giải

- a) Mệnh đề đúng.
- b) Mệnh đề đúng.
- c) Mệnh đề sai, vì  $a, b$  có thể chéo nhau.
- d) Mệnh đề sai.

**Câu 2:** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Khi đó:

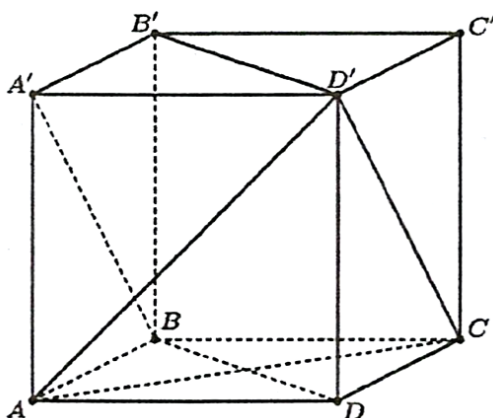
- a)  $BD // B'D'$
- b)  $(AC, B'D') = 90^\circ$
- c) Tam giác  $ACD'$  đều
- d)  $(AC, A'B) = 30^\circ$

### Lời giải

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**

Ta có:  $BB' // DD', BB' = DD' \Rightarrow BDD'B'$  là hình bình hành  $\Rightarrow BD // B'D'$ .

Vì vậy  $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$  (do  $AC$  và  $BD$  là hai đường chéo hình vuông  $ABCD$ ).



Ta có:  $\vec{AD'} \parallel \vec{BC}, \vec{AD'} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{ABCD'}$  là hình bình hành  $\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD'}$ .

Vì vậy  $(\vec{AC}, \vec{AB}) = (\vec{AC}, \vec{CD'})$ .

Gọi  $a$  là cạnh của hình lập phương thì  $\vec{AD'} = \vec{CD'} = \vec{AC} = a\sqrt{2}$  (đường chéo của hình vuông cạnh  $a$ ).

Suy ra tam giác  $\vec{ACD'}$  đều nên  $(\vec{AC}, \vec{CD'}) = \angle \vec{ACD'} = 60^\circ$ .

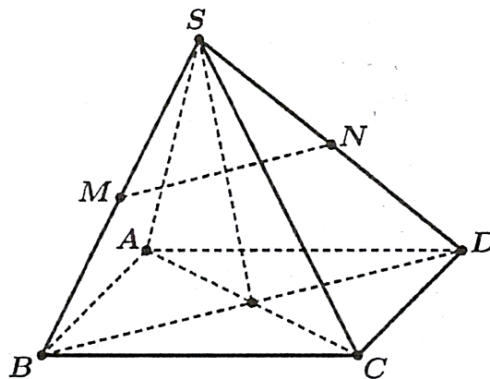
Vậy  $(\vec{AC}, \vec{AB}) = 60^\circ$ .

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi. Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của đoạn  $SB, SD$ . Khi đó:

- a)  $MN \parallel BD$ .
- b)  $MN$  và  $AC$  là hai đường thẳng chéo nhau.
- c)  $AC \perp BD$
- d)  $(MN, AC) = 90^\circ$

**Lời giải**

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng**



Xét tam giác  $SBD$  có  $MN$  là đường trung bình, suy ra  $MN \parallel BD$ . (1)

Mặt khác:  $AC \perp BD$  (hai đường chéo trong hình thoi). (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AC \perp MN$  hay  $(MN, AC) = 90^\circ$ .

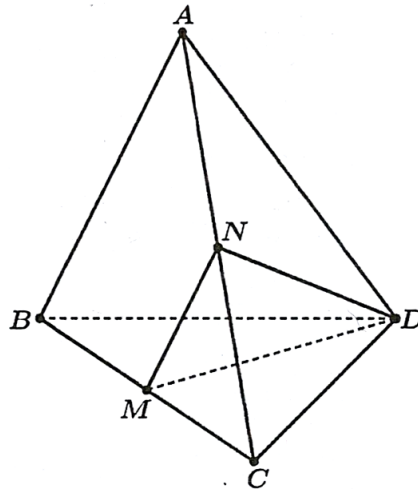
**Câu 4:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó:

- a)  $MN \parallel AB$
- b)  $MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- c)  $(AB, DM) = (MN, DM)$

d)  $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

### Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai



Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$  nên  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB (*) \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Vì  $\triangle BCD$  và  $\triangle ACD$  là các tam giác đều cạnh bằng  $a$  nên  $MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Từ (\*) suy ra:  $(AB, DM) = (MN, DM)$ .

Xét  $\triangle MND$ , ta có:

$$\cos \angle MN = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$\Rightarrow \angle MN$  là góc nhọn.

Vậy  $(AB, DM) = (MN, DM) = \angle MN$  nên  $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$ . Biết  $AB = 2a, AD = DC = a$ , đồng thời

$SA \perp AB, SA \perp AD$  và  $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . Khi đó:

a)  $(SB, DC) = \angle BBA$

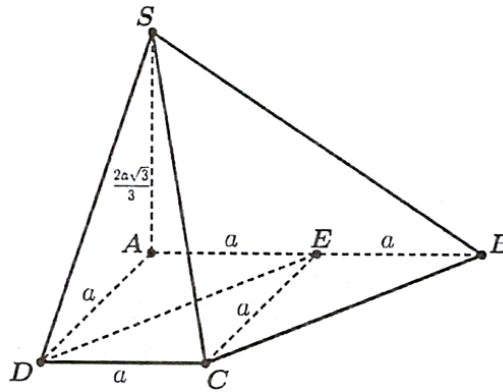
b)  $\tan \angle SBA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $DE \parallel BC$

d)  $(SD, BC) \approx 52,42^\circ$

### Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai



Vì  $CD \parallel AB$

$$\Rightarrow (SB, DC) = (SB, AB) = \angle SBA.$$

( $\triangle SAB$  vuông tại  $A$  nên  $\angle SBA < 90^\circ$ ).

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle SBA = 30^\circ.$$

Vậy  $(SB, DC) = \angle SBA = 30^\circ$ .

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$ .

Vì  $BE \parallel CD, BE = CD = a$  nên  $BCDE$  là hình bình hành  $\Rightarrow DE \parallel BC$ .

Khi đó:  $(SD, BC) = (SD, DE)$ .

Ta có:  $SE^2 = SA^2 + AE^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3}; SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{7a^2}{3};$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2a^2.$$

Suy ra  $SE = SD = \frac{a\sqrt{21}}{3}, DE = a\sqrt{2}$ .

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác  $SDE$ , ta được:

$$\cos \angle SDE = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD \cdot DE} = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow \angle SDE$$

là góc nhọn.

Vậy  $(SD, BC) = (SD, DE) = \angle SDE$ . Suy ra:  $(SD, BC) = \angle SDE \simeq 62,42^\circ$ .

**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ . Cho biết  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp AB, SA \perp AD$ . Khi đó:

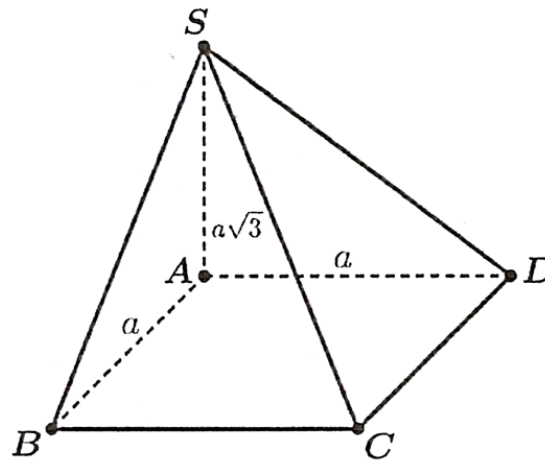
- a)  $(AB, SA) = 90^\circ$
- b)  $SA \perp CD$
- c)  $(SD, BC) = (SD, CD)$
- d)  $\angle SDA = 60^\circ$

### Lời giải

**a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng**

Vì  $CD \parallel AB$  (hai cạnh đối trong hình thoi) nên  $(CD, SA) = (AB, SA) = 90^\circ$ .

Vậy  $SA \perp CD$ .



Vì  $BC \parallel AD$  (hai cạnh đối trong hình thoi) nên  $(SD, BC) = (SD, AD)$ .

Tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$  có:

$$\tan \angle SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \angle SDA = 60^\circ.$$

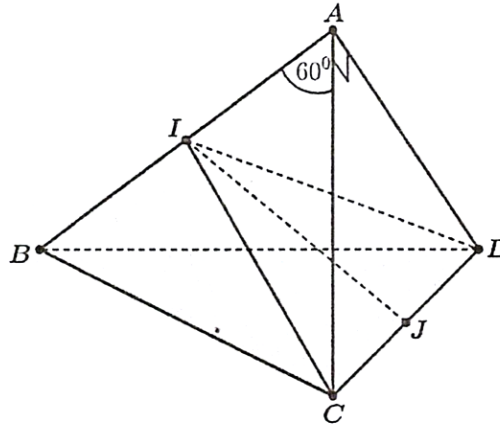
$$\Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \angle SDA = 60^\circ.$$

**Câu 7:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD = 1$  và  $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ, \angle CAD = 90^\circ$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó:

- a)  $CD = \sqrt{2}$   
 b) Tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $C$ .  
 c)  $IJ \perp AB$   
 d)  $IJ \perp CD$

### Lời giải

**a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng**



Các tam giác  $ABC$  và  $ABD$  cân tại  $A$  và có góc  $60^\circ$  nên hai tam giác  $ABC$  và  $ABD$  đều cạnh bằng 1.

Tam giác  $ACD$  vuông cân tại  $A$  có:

$$CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Tam giác  $BCD$  có:

$$BC^2 = 1, BD^2 = 1, CD^2 = 2$$

$$\text{hay } BC^2 + BD^2 = CD^2$$

suy ra tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $B$ .

Ta có:  $AJ = BJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  nên tam giác  $JAB$  cân tại  $J$ .

Mặt khác  $I$  là trung điểm  $AB$  nên  $IJ \perp AB$ .

Tam giác  $ABC$  và  $ABD$  đều cạnh 1 nên  $CI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Vì vậy tam giác  $ICD$  cân tại  $I$ , mà  $J$  là trung điểm  $CD$  nên  $IJ \perp CD$

**Câu 8:** Trong hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi đó:

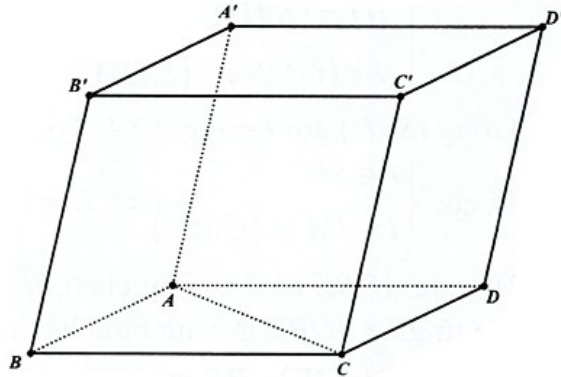
- a)  $ABCD$  là hình chữ nhật.  
 b)  $A'C' \perp BD$ .

c)  $\vec{AB} \perp \vec{DC'}$ .

d)  $\vec{BC'} \perp \vec{A'D}$ .

### Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Vì hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác  $ABCD, A'B'BA, B'C'CB$  đều là hình thoi.

$$AC \perp BD \text{ mà } AC \parallel A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD.$$

$$AB \perp A'B' \text{ mà } A'B' \parallel DC' \Rightarrow AB \perp DC'.$$

$$BC' \perp B'C \text{ mà } B'C \parallel A'D \Rightarrow BC' \perp A'D.$$

**Câu 9:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó:

a)  $NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

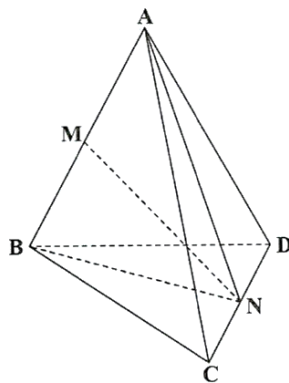
b)  $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

c)  $\vec{MN} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{3}$

d) Góc giữa đường thẳng  $MN$  và  $BC$  bằng  $45^\circ$

### Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng



$AN, BN$  lần lượt là các đường trung tuyến của hai tam giác đều  $\triangle ACD$  và

$\triangle BCD$  nên  $NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Do đó  $\triangle NAB$  cân tại  $N$  và  $MN \perp AB$ .

Xét  $\triangle AMN$  vuông tại  $M$ . Ta có:

$$MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Đặt  $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$ .

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{BC} = \vec{AM} \cdot \vec{BC} = (-\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}(a^2 - a \cdot b - a \cdot c - a \cdot b + b^2 + b \cdot c)$$

$$\text{Do } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = a^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \text{ và } a^2 = b^2 = c^2$$

$$\text{Suy ra } \vec{MN} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} \left( a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + a^2 + \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{a^2}{2}$$

Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $MN$  và  $BC$ .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } \varphi = 45^\circ.$$

**Câu 10:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông cạnh  $a$ . Khi đó:

a)  $BC' \parallel AD'$

b)  $(AD', B'C) = 90^\circ$



Ta có:  $\overline{AA'} \parallel \overline{C'C} \Rightarrow (\overline{A'B}, \overline{C'C}) = (\overline{A'B}, \overline{A'A}) = \widehat{AAB}$

Mà  $\triangle A'AB$  vuông cân tại  $A$  nên  $\widehat{AAB} = 45^\circ$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$

Ta có:  $\overline{A'C} \parallel \overline{MN} \Rightarrow (\overline{A'C}, \overline{MB}) = (\overline{MN}, \overline{MB}) = \widehat{BMN}$

Xét  $\triangle MNB$  có:

$$MB = MN = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{BMN} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \frac{7}{10} \Rightarrow \widehat{BMN} \approx 45,6^\circ.$$

**Câu 12:** Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt  $a, b, c$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Nếu  $a$  và  $b$  cùng vuông góc với  $c$  thì  $a \parallel b$ .

**b)** Nếu  $a \parallel b$  và  $c \perp a$  thì  $c \perp b$ .

**c)** Nếu góc giữa  $a$  và  $c$  bằng góc giữa  $b$  và  $c$  thì  $a \parallel b$ .

**d)** Nếu  $a$  và  $b$  cùng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha) \parallel c$  thì góc giữa  $a$  và  $c$  bằng góc giữa  $b$  và  $c$ .

### Lời giải

**a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai**

Nếu  $a$  và  $b$  cùng vuông góc với  $c$  thì  $a$  và  $b$  hoặc song song hoặc chéo nhau.

c sai do:

Giả sử hai đường thẳng  $a$  và  $b$  chéo nhau, ta dựng đường thẳng  $c$  là đường vuông góc chung của  $a$  và  $b$ . Khi đó góc giữa  $a$  và  $c$  bằng với góc giữa  $b$  và  $c$  và cùng bằng  $90^\circ$ , nhưng hiển nhiên hai đường thẳng  $a$  và  $b$  không song song.

d sai do: giả sử  $a$  vuông góc với  $c$ ,  $b$  song song với  $c$ , khi đó góc giữa  $a$  và  $c$  bằng  $90^\circ$ , còn góc giữa  $b$  và  $c$  bằng  $0^\circ$ .

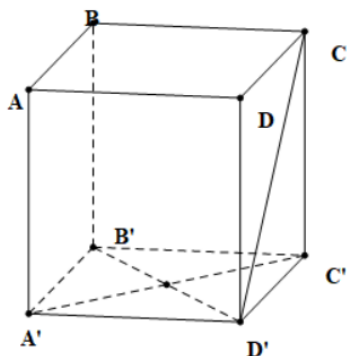
Do đó b đúng.

**Câu 13:** Cho hình lập phương  $ABCD A'B'C'D'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa hai đường thẳng  $B'D'$  và  $AA'$  bằng  $60^\circ$ .
- b) Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$  bằng  $90^\circ$ .
- c) Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $D'C$  bằng  $45^\circ$ .
- d) Góc giữa hai đường thẳng  $D'C$  và  $A'C'$  bằng  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng**



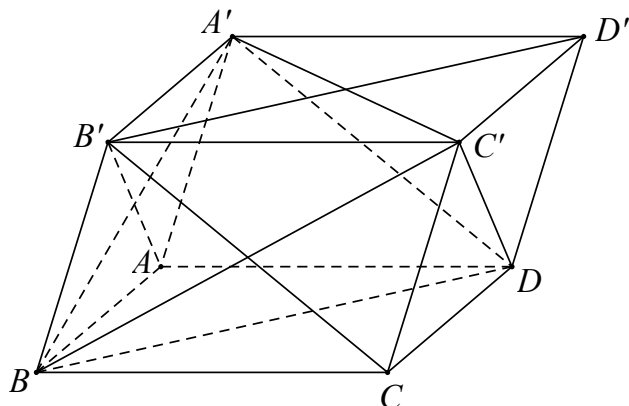
Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương nên góc giữa hai đường thẳng  $B'D'$  và  $AA'$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 14:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $A'C' \perp BD$ .
- b)  $BB' \perp BD$ .
- c)  $A'B \perp DC'$ .
- d)  $BC' \perp A'D$ .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng**



**Chú ý:** Hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau còn gọi là hình hộp thoi.

**a đúng** vì:

$$\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD$$

**b sai** vì:

$$\text{c đúng vì: } \begin{cases} A'B \perp AB' \\ AB' \parallel DC' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'$$

$$\text{d đúng vì: } \begin{cases} BC' \perp B'C \\ B'C \parallel A'D \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D$$

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $AD \perp SC$ .

b)  $SC \perp BD$ .

c)  $SO \perp BD$ .

d)  $SA \perp BD$ .

**Lời giải**

**a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD \Rightarrow \text{d đúng.}$$

**Câu 16:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $CD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $MN \perp SD$ .

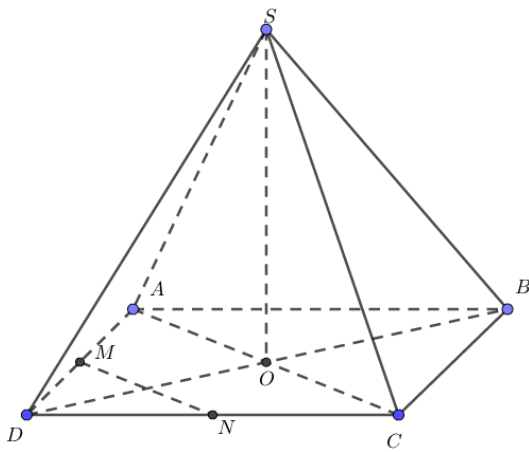
b)  $BD \perp MN$ .

c)  $BD \perp SA$ .

d)  $MN \perp SA$ .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**



Xét phương án A: Do  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases}$  và  $\vec{SD} = \vec{SO} + \frac{1}{2}\vec{BD}$  nên  $AC \perp SD$ , mà  $MN \parallel AC$  (tính chất đường trung bình) suy ra  $MN \perp SD$ .

Tương tự ta chứng minh được  $BD \perp MN$  và  $BD \perp SA$

Ta có tam giác  $SAC$  cân tại  $S$  và  $SO$  là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.

Do đó  $SO \perp AC$ , suy ra tam giác  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  nên  $AC$  và  $SA$  không thể vuông tại  $A$ .

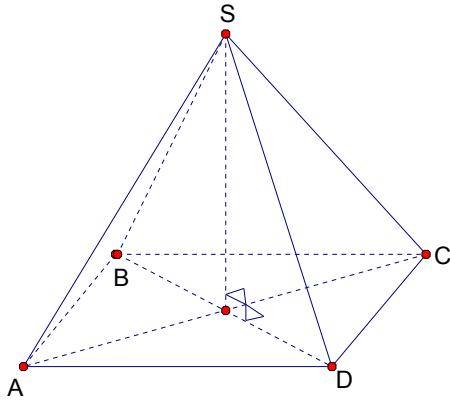
Mà theo tính chất đường trung bình ta có  $MN \parallel AC$ . Vậy  $MN$  không vuông góc với  $SA$ .

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $AC \perp SA$
- b)  $SD \perp AC$ .
- c)  $SA \perp BD$ .
- d)  $AC \perp BD$ .

**Lời giải**

**a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng**



Dễ thấy do  $SA = SC$  nên  $\triangle SAC$  cân  $S$  và  $SO \perp AC$ . Tương tự  $SO \perp BD$ .

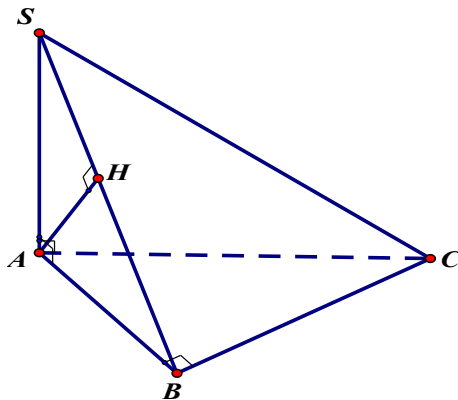
Do đó  $AC \perp SO$  nên  $AC$  không vuông góc với  $SA$ .

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ , cạnh  $SA$  vuông góc với đáy. Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $SAB$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $SA \perp BC$ .
- b)  $AH \perp BC$ .
- c)  $AH \perp AC$ .
- d)  $AH \perp SC$ .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng**



- ♦  $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ . Do đó  $SA \perp BC$  đúng.
- ♦  $BC \perp AB; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ . Do đó  $AH \perp BC$  đúng.
- ♦  $AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ . Do đó  $AH \perp SC$  đúng.

Vậy khẳng định sai là  $AH \perp AC$ .

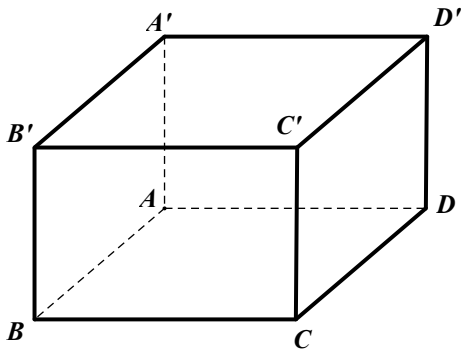
**Câu 19:** Trong hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $A'C' \perp BD$ .
- b)  $A'B \perp DC'$ .

- c)  $BC' \perp A'D$  .  
d)  $CB' \perp BD$  .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**



Xét lần lượt từng đáp án:

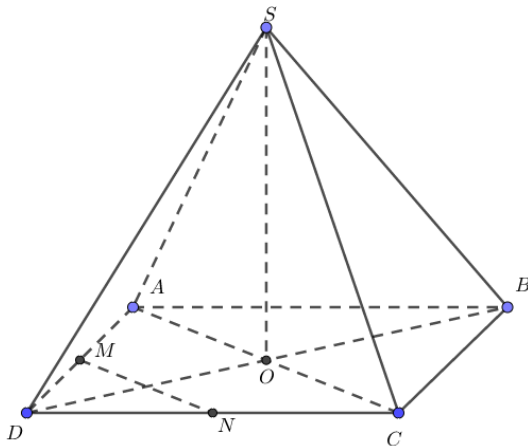
- a) Ta có:  $A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp BD$  .  
b) Ta có:  $A'B \perp (AB'C'D) \Rightarrow A'B \perp DC'$  .  
c) Ta có:  $BC' \perp (A'DCB') \Rightarrow BC' \perp A'D$  .  
d) Mệnh đề sai.

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $CD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $MN \perp SD$  .  
b)  $BD \perp MN$  .  
c)  $BD \perp SA$  .  
d)  $MN \perp SA$  .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**



Xét phương án A: Do  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases}$  và  $\vec{SD} = \vec{SO} + \frac{1}{2}\vec{BD}$  nên  $AC \perp SD$ , mà  $MN \parallel AC$  (tính chất đường trung bình) suy ra  $MN \perp SD$ .

Tương tự ta chứng minh được  $BD \perp MN$  và  $BD \perp SA$

Ta có tam giác  $SAC$  cân tại  $S$  và  $SO$  là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.

Do đó  $SO \perp AC$ , suy ra tam giác  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  nên  $AC$  và  $SA$  không thể vuông tại  $A$ .

Mà theo tính chất đường trung bình ta có  $MN \parallel AC$ . Vậy  $MN$  không vuông góc với  $SA$ .

**Câu 21:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và  $\triangle ABC$  vuông ở  $B$ ,  $AH$  là đường cao của  $\triangle SAB$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $SA \perp BC$
- b)  $AH \perp BC$
- c)  $AH \perp AC$
- d)  $AH \perp SC$ .

### Lời giải

**a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng**

Ta có  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BC$ .

Mà  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ :  $AB \perp BC$ .

$$\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB) \end{cases}; \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp SC \subset (SBC)$$

Nếu  $\begin{cases} AH \perp AC \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp AB \subset (SAB)$  thì  $\triangle ABC$  vuông tại A (Vô lý).

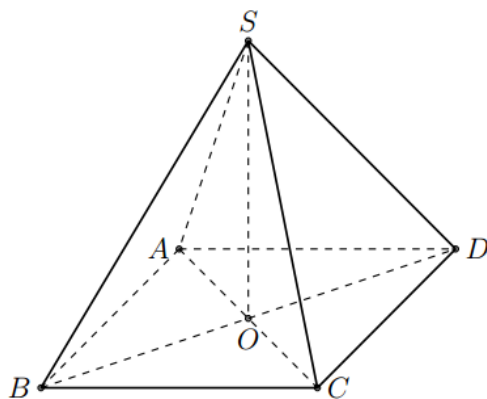
Vậy  $AH \perp AC$

**Câu 22:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa đường thẳng  $SA$  và  $BD$  bằng  $90^\circ$ .
- b) Góc giữa đường thẳng  $SB$  và  $AD$  bằng  $90^\circ$ .
- c) Góc giữa đường thẳng  $SC$  và  $AB$  bằng  $90^\circ$ .
- d) Góc giữa đường thẳng  $SD$  và  $BC$  bằng  $90^\circ$ .

### Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai



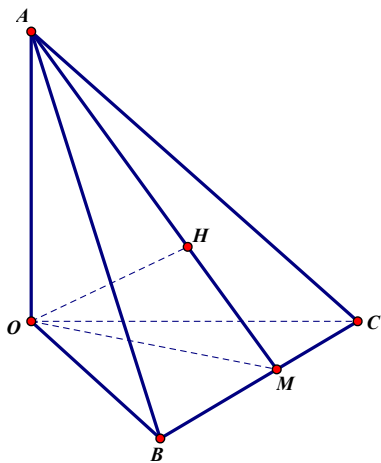
Gọi  $O = AC \cap BD$ . Do  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều nên  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SO$ .

Mặt khác  $BD \perp AC$ .

Suy ra  $DB \perp (SAC) \Rightarrow DB \perp SA$ .

Vậy góc giữa đường thẳng  $SA$  và  $BD$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 23:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau (hình bên dưới). Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $AH \perp (OBC)$ .

b)  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

c)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

d)  $OA \perp BC$ .

**Lời giải**

**a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng**

+ Vì  $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$  mà  $AH \perp (OBC) \Rightarrow O, A, H$  thẳng hàng  
 $\Rightarrow OH \perp (OBC)$ .

Ta lại có  $OH \perp (ABC)$ , từ đó suy ra  $(OBC) \equiv (ABC)$  (mâu thuẫn).

Vậy **a** sai.

+ Chứng minh **b** đúng.

Thật vậy, ta có  $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ .

Mà  $BC \perp OH$  (vì  $OH \perp (ABC) \supset BC$ )

$\Rightarrow BC \perp (OAH), AH \subset (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$ .

Tương tự  $BH \perp AC$ .

Suy ra  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

+ Chứng minh **c** đúng.

Thật vậy,

Gọi  $M = AH \cap BC$ .

Xét tam giác vuông  $OAM$  có  $OH \perp AM \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}$ .

Mà  $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OM$ . Tam giác vuông  $OBC$  có

$$OM \perp BC \Rightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

+ Chứng minh **d** đúng.

Thật vậy, ta có  $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ .

**Câu 24:** Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)**  $IJ \perp CD$ .

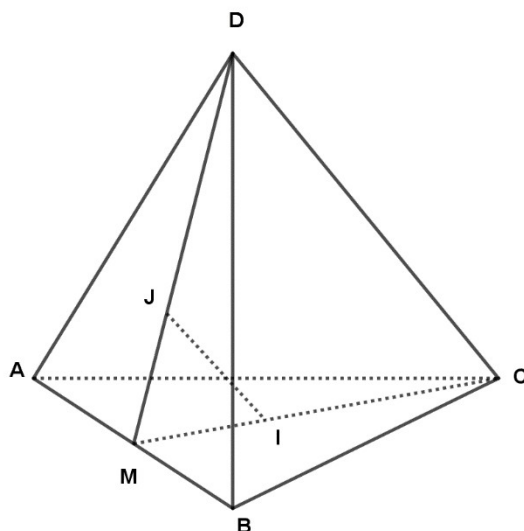
**b)**  $\frac{IJ}{DC} = \frac{1}{3}$ .

**c)**  $IJ \parallel CD$ .

d)  $IC$  và  $JD$  đồng quy tại một điểm.

**Lời giải**

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

Vì  $I, J$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC$  và  $ABD$  nên  $J \in DM, I \in CM$ .

Do đó  $IC$  và  $JD$  đồng quy tại  $M$ .

Xét tam giác  $MCD$  có  $\frac{MJ}{MD} = \frac{MI}{MC} = \frac{1}{3}$  nên  $IJ \parallel CD$  và  $\frac{IJ}{DC} = \frac{1}{3}$ .

Vậy mệnh đề  $IJ \perp CD$  là **sai**.

**Câu 25:** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông, hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAD)$  vuông góc với mặt đáy.  $AH, AK$  lần lượt là đường cao của tam giác  $SAB$ , tam giác  $SAD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $HK \perp SC$ .

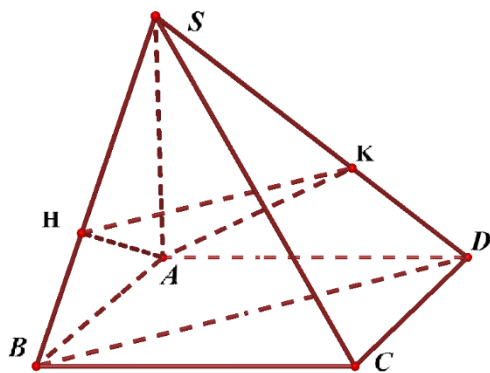
b)  $SA \perp AC$ .

c)  $BC \perp AH$ .

d)  $AK \perp BD$ .

**Lời giải**

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAD)$  vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$  nên  $SA \perp (ABCD)$ .

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$  nên đáp án b đúng.

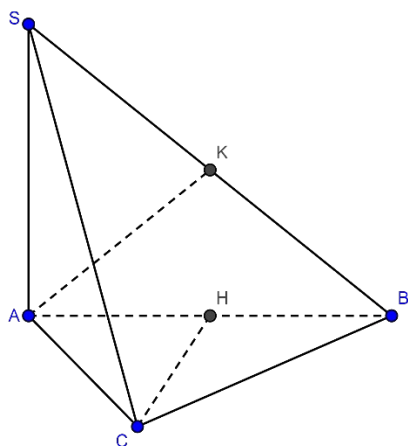
$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \end{cases}$  nên đáp án c đúng.

Mặt khác  $AH \perp SB$  nên suy ra  $AH \perp SC$ .

Tương tự, ta cũng được  $AK \perp SC$  nên  $SC \perp (AHK)$  hay  $SC \perp HK$  nên đáp án a cũng đúng.

Cuối cùng, nếu  $AK \perp BD$ , mà  $BD \perp SA$  nên  $BD \perp AD$ , điều này mâu thuẫn với giả thiết  $ABCD$  là hình vuông, vậy đáp án d sai.

**Câu 26:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có cạnh  $SA \perp (ABC)$  và đáy  $ABC$  là tam giác cân ở  $C$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $SB$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a)  $CH \perp SA$ .

b)  $CH \perp SB$ .

c)  $CH \perp AK$ .

d)  $AK \perp SB$ .

### Lời giải

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**

Do  $\triangle ABC$  cân tại  $C$  nên  $CH \perp AB$ . Suy ra  $CH \perp (SAB)$ . Vậy các câu A, B, C đúng nên D sai.

**Câu 27:** Cho tứ diện  $ABCD$  có các tam giác  $ABC, ABD, ACD$  là các tam giác vuông tại  $A$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)**  $BCD$  là tam giác nhọn.

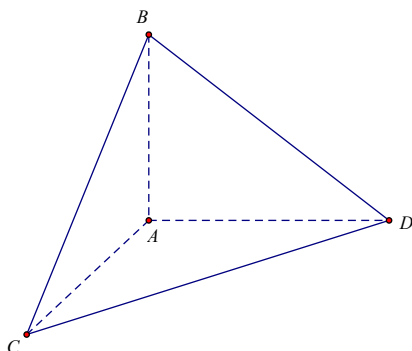
**b)**  $BCD$  là tam giác vuông.

**c)**  $AB \perp (BCD)$ .

**d)**  $AC \perp (BCD)$ .

### Lời giải

**a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai**



Cách 1:

$$\text{Ta có: } \cos \angle CBD = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{BC \cdot BD}.$$

$$\text{Do } BC^2 + BD^2 - CD^2 = AB^2 + AC^2 + AB^2 + AD^2 - (AC^2 + AD^2)$$

$$\Rightarrow BC^2 + BD^2 - CD^2 = 2AB^2 \Rightarrow \cos \angle CBD = \frac{2AB^2}{BC \cdot BD} > 0$$

$$\text{Tương tự: } \cos \angle BDC = \frac{2AD^2}{DB \cdot DC} > 0 \quad \text{và} \quad \cos \angle BCD = \frac{2AC^2}{BC \cdot CD} > 0$$

Vậy  $\triangle BCD$  là tam giác nhọn.

Nếu  $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD$  khi đó  $\triangle ABD$  có 2 góc vuông

Nếu  $AC \perp (BCD) \Rightarrow AC \perp BC$  khi đó  $\triangle ABC$  có 2 góc vuông

Nếu  $BCD$  là tam giác vuông ta giả sử vuông tại  $B$  thì  $CD^2 = BC^2 + BD^2$  do các tam giác  $ABC, ABD, ACD$  là các tam giác vuông tại  $A$  nên

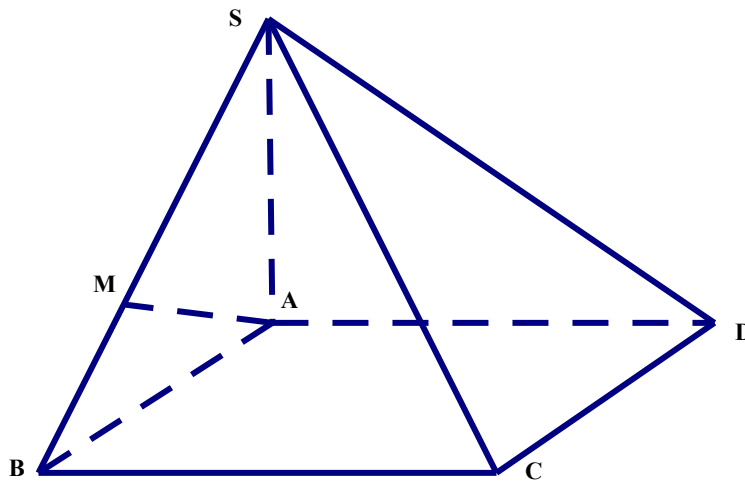
$$CD^2 = AC^2 + AD^2, BC^2 = AB^2 + AC^2, BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ khi đó } 2AB^2 = 0$$

**Câu 28:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $M \in SB$  sao cho  $MS = 3MB$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $AM \perp BC$ .
- b)  $AM \perp AD$ .
- c)  $CD \perp AM$ .
- d)  $CD \perp SD$ .

**Lời giải**

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Ta có

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM. \quad \text{Vậy a đúng.}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AM. \quad \text{Vậy b đúng.}$$

$$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD. \quad \text{Vậy d đúng.}$$

Do  $(CD, AM) = (AB, AM) < 90^\circ$ . Vậy c sai.

**Câu 29:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

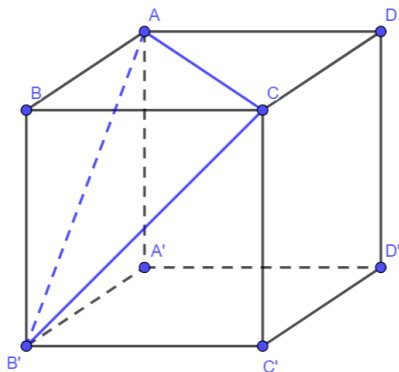
- a)  $AD \perp BB'$ .
- b)  $A'C' \perp DB$ .

c)  $A'D \perp AB$ .

d)  $AC \perp B'C$ .

### Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có

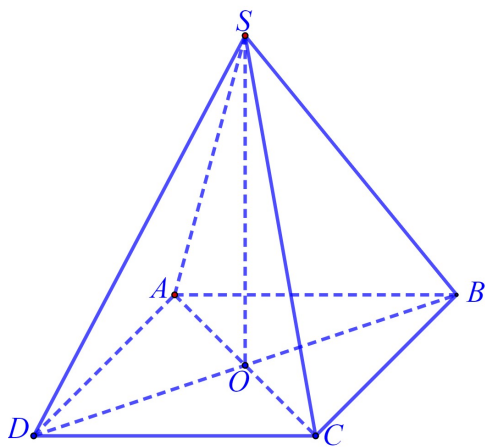
+)  $AD \parallel BC$  mà  $CB \perp BB'$  nên  $AD \perp BB'$ . Vậy khẳng định a đúng.

+)  $A'C' \parallel AC$  mà  $AC \perp DB$  nên  $A'C' \perp DB$ . Vậy khẳng định b đúng.

+)  $AB \perp (ADD'A')$  nên  $A'D \perp AB$ . Vậy khẳng định c đúng.

+)  $AC = AB' = B'C$  nên  $\angle CB' = 60^\circ$ . Suy ra góc giữa  $AC$  và  $B'C$  bằng  $60^\circ$ . Vậy khẳng định d sai.

**Câu 30:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$ , cạnh  $AB = a$ . Cạnh bên  $SA = \sqrt{2}.SC$  và  $SB = SD = a$  (hình vẽ tham khảo). Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a)  $SB \perp SD$ .

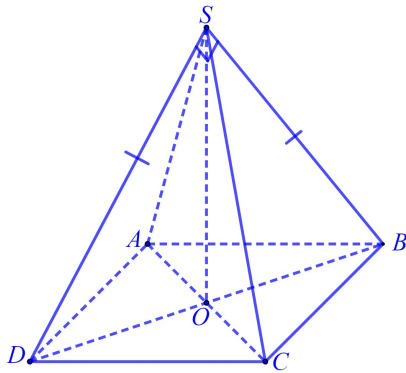
b)  $BD \perp SA$ .

c)  $BD \perp SO$ .

d)  $SO \perp AC$ .

### Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Theo giả thiết ta có  $\triangle SBD$  cân tại  $S$  nên  $SO \perp BD$  (1).

Mặt khác tứ giác  $ABCD$  là hình vuông nên  $AC \perp BD$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$  và  $BD \perp SA$ .

Xét  $\triangle SBD$  có  $SB = SD = a$  và  $BD = a\sqrt{2}$  suy ra  $\triangle SBD$  vuông tại  $S$  nên  $SB \perp SD$ .

$\triangle SAC$  có  $SA = \sqrt{2}.SC$  nên đường trung tuyến  $SO$  không vuông góc với  $AC$ .

Vậy khẳng định  $SO \perp AC$  sai.

**Câu 31:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$  và đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Gọi  $O$  là tâm của  $ABCD$  và  $I$  là trung điểm của  $SC$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $BC \perp SB$ .

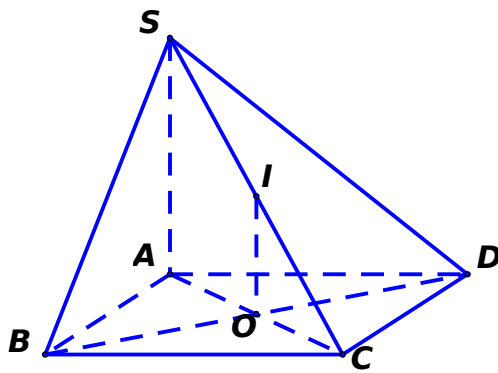
b)  $(SAC)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn  $BD$ .

c)  $OI \perp (ABCD)$ .

d) Tam giác  $SCD$  vuông ở  $D$ .

### Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



$$* BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

\*  $BD$  không vuông góc với  $AC$  nên  $BD$  không vuông góc với  $(SAC)$ .

$$* \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SA // OI \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD)$$

\*  $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$  nên  $\triangle SCD$  vuông ở  $D$ .

**Câu 32:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, SB$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $(IJK) // (SAC)$ .

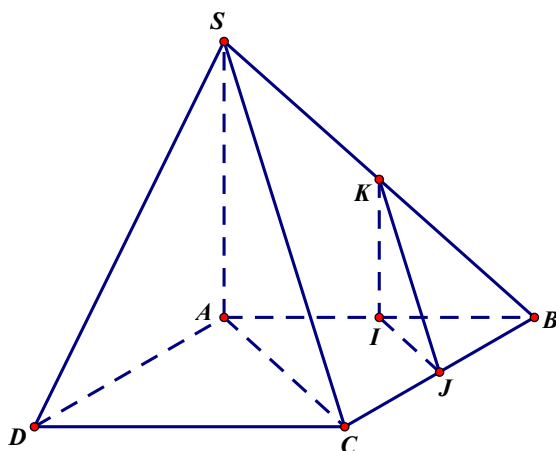
b) Góc giữa  $SC$  và  $BD$  là  $60^\circ$ .

c)  $BD \perp (IJK)$ .

d)  $BD \perp (SAC)$ .

**Lời giải**

**a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng**



a) Đúng vì  $IJ // AC, IK // SA$

b) Sai  $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

c) Đúng vì  $(IJK) \parallel (SAC)$

d) Đúng vì  $BD \perp AC, BD \perp SA$

**Câu 33:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = a$ ,  $\angle ASB = \angle BSC$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $SC \perp AB$ .

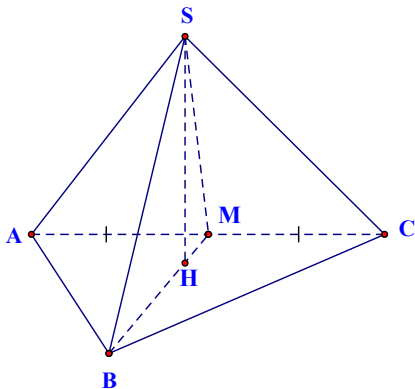
b)  $SB \perp AC$ .

c)  $SA \perp BC$ .

d)  $SA \perp SC$ .

**Lời giải**

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ ,  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Vì  $SA = SB = SC$  nên ta có  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Dễ thấy  $\triangle SAB = \triangle SBC \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$  cân tại  $B$ .

Khi đó  $BM$  vừa là đường trung tuyến vừa là đường trung trực cạnh  $AC$ .

Do vậy  $H \in BM$  suy ra  $\begin{cases} AC \perp BM \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBM) \Rightarrow SB \perp AC$ .

**Câu 34:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  đáy  $ABC$  vuông tại  $B$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $AA' \perp BC'$ .

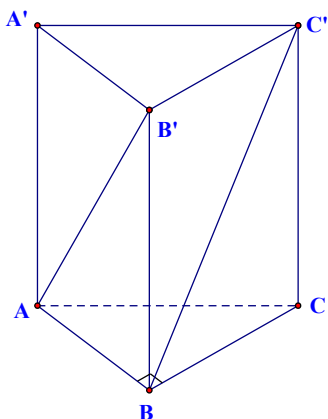
b)  $BC \perp AB'$ .

c)  $AA' \perp BC$ .

d)  $AB \perp BC'$ .

**Lời giải**

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Xét đáp án A, ta thấy  $AA' \parallel BB'$ , nếu  $AA' \perp BC'$  thì  $BB' \perp BC'$  (vô lý) do đó đáp án A sai.

Xét đáp án B, ta có 
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB') \Rightarrow BC \perp AB'$$
.

Xét đáp án C, dễ thấy  $AA' \perp BC$  (vì  $AA' \perp (ABC)$ ).

Xét đáp án D, ta có 
$$\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CBB') \Rightarrow AB \perp BC'$$
.

**Câu 35:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $mp(ABC)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$ .

b)  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

c)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

d)  $CH$  là đường cao của  $\Delta ABC$ .

**Lời giải**

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có  $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$  và  $OH \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$ .

Tương tự, ta có  $AB \perp CH$ , suy ra đáp án **a, d** đúng.

Ta có  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ , với  $I = AH \cap BC$ , suy ra đáp án **c** đúng.

**Câu 36:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp CD$  và  $AC \perp BD$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $mp(BCD)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $H$  là trực tâm tam giác  $BCD$ .
- b)  $CD \perp (ABH)$ .
- c)  $AD \perp BC$ .
- d)  $(BD, CH) = 90^\circ$

### Lời giải

**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng**

Ta có  $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$ . Tương tự  $BD \perp CH$

Suy ra  $H$  là trực tâm  $\triangle BCD$ . Suy ra đáp án **a, b, d** đúng.

Ta có  $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$ , suy ra **c** đúng.

**Câu 37:** Cho tứ diện  $OABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $(ABC)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $OA \perp BC$ .
- b)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .
- c)  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- d)  $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ .

### Lời giải

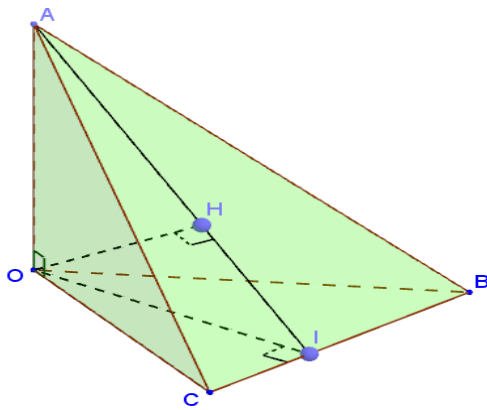
**a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai**

$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$  đáp án **a** đúng.

Tương tự chứng minh được  $OC \perp AB$ .

Hạ  $\begin{cases} OI \perp BC \\ OH \perp AI \end{cases}$ .

Ta có:  $\begin{cases} OI \perp BC \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC).$



$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \text{Đáp án b đúng.}$$

Ta có:  $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp HC (1).$  Tương tự  $BC \perp OH (2).$

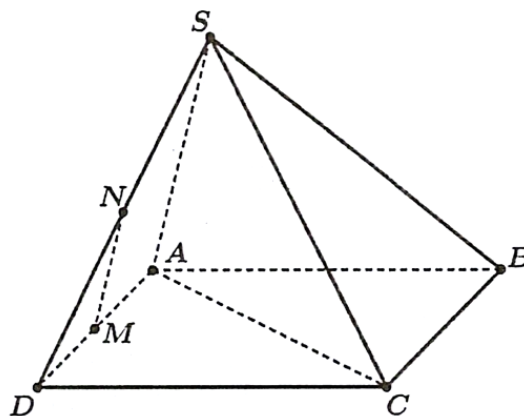
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow H$  là trực tâm  $\triangle ABC \Rightarrow$  Đáp án c đúng.

### •Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a\sqrt{2}$ , biết  $SA = a$ ,  $SC = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AD, SD$ . Tìm góc của hai đường thẳng  $MN$  và  $SC$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

### Lời giải



Vì  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SAD$  nên  $MN \parallel SA \Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC).$

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} = 2a. \end{aligned}$$

Xét tam giác  $SAC$ , ta có:

$$SA^2 + SC^2 = AC^2 \text{ (do } a^2 + (a\sqrt{3})^2 = (2a)^2 \text{)}$$

Suy ra tam giác  $SAC$  vuông tại  $S$ .

Vậy  $(MN, SC) = (SA, SC) = 90^\circ$  hay  $MN \perp SC$ .

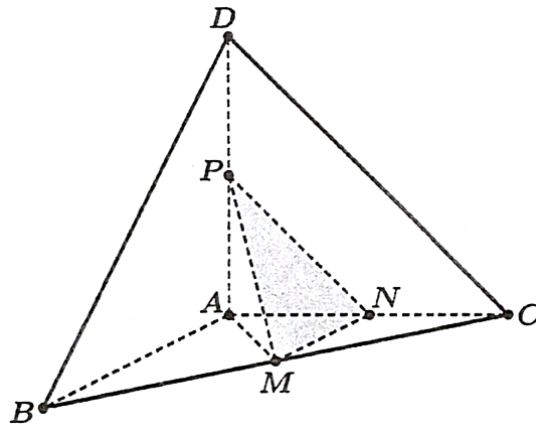
**Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau, biết  $AB = AC = AD = 1$ . Tìm góc của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

### Lời giải

Theo định lí Pythagore, ta tính được  $BC = CD = BD = \sqrt{2}$ .

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AC, AD$ .



Tam giác  $ABC$  có  $MN$  là đường trung bình

$$\text{nên } \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tam giác  $ACD$  có  $NP$  là đường trung bình

$$\text{nên } \begin{cases} NP \parallel CD \\ NP = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường trung tuyến  $AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Tam giác  $AMP$  vuông tại  $A$  có:

$$MP = \sqrt{AM^2 + AP^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: 
$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (MN, NP)$$

Tam giác  $MNP$  có:  $MN^2 = \frac{1}{4}, NP^2 = \frac{1}{4}, MP^2 = \frac{3}{4}$  hay  $MN^2 + NP^2 = MP^2$ .

Suy ra tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

Vậy  $(AB, CD) = (MN, NP) = 90^\circ$  hay  $AB \perp CD$ .

**Câu 3:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Tìm góc của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

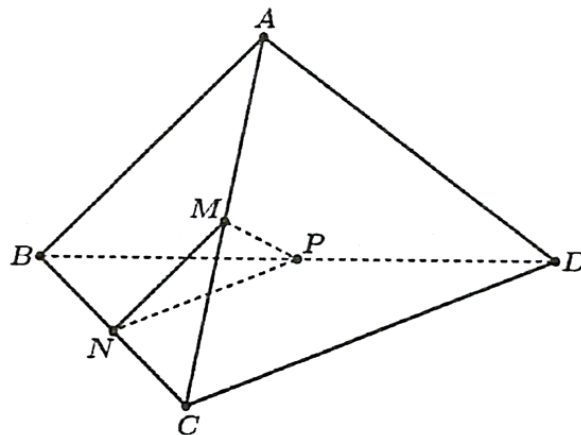
### Lời giải

Giả sử tứ diện đều có các cạnh bằng  $2a$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm  $AC, BC, BD$ .

Vì  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên 
$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{AB}{2} = a \end{cases}$$

Vì  $NP$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$  nên 
$$\begin{cases} NP \parallel CD \\ NP = \frac{CD}{2} = a \end{cases}$$

Suy ra  $(AB, CD) = (MN, NP)$



Các tam giác  $ABD, BCD$  là tam giác đều cạnh  $2a$  nên

$$AP = CP = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Tam giác  $ACP$  cân tại  $P$  có  $M$  là trung điểm  $AC$  nên  $MP \perp AC$ .

Suy ra  $MP = \sqrt{CP^2 - CM^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ .

Tam giác  $MNP$  có  $MN^2 = a^2, NP^2 = a^2, MP^2 = 2a^2$  hay  $MN^2 + NP^2 = MP^2$ .

Suy ra tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ . Vậy  $AB \perp CD$ .

**Câu 4:** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Tính góc giữa đường thẳng  $CD'$  với mỗi đường thẳng  $BB', AD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

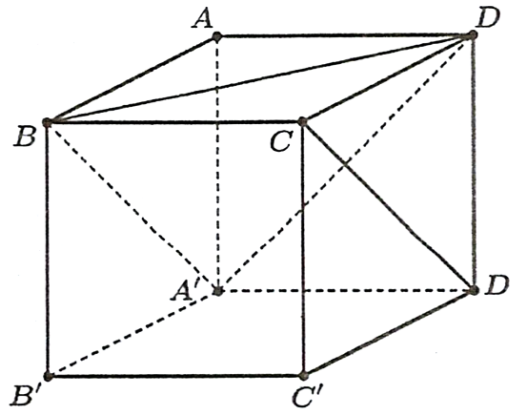
**Lời giải**

Vì  $BB' \parallel CC'$  nên  $(BB', CD') = (CC', CD') = \angle C'D'C = 45^\circ$  (do  $\triangle CC'D'$  vuông cân tại  $C'$ ).

Vì  $BC \parallel A'D', BC = A'D' \Rightarrow BCD'A'$  là hình bình hành.

Suy ra  $CD' \parallel A'B$ .

Ta có:  $(CD', AD) = (A'B, AD)$ .



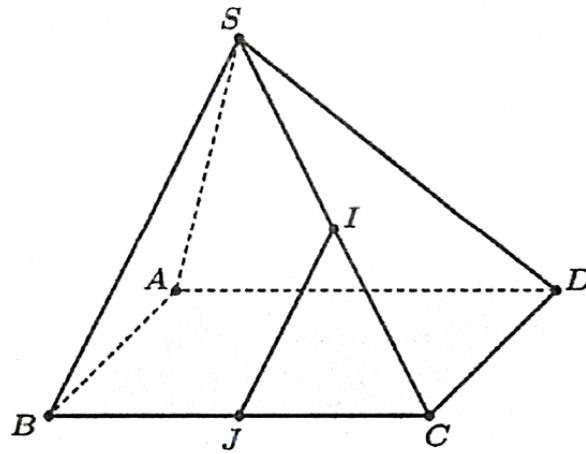
Giả sử cạnh của hình lập phương là  $a$ , tam giác  $A'BD$  có ba cạnh cùng bằng  $a\sqrt{2}$  (đường chéo trong các hình vuông cạnh  $a$ ). Suy ra tam giác  $A'BD$  đều.

Do vậy  $(CD', AD) = (A'B, AD) = \angle BAD = 60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Tìm số đo của góc  $(IJ, CD)$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Tứ giác  $ABCD$  có bốn cạnh bằng nhau nên  $ABCD$  là hình thoi, suy ra  $CD \parallel AB$ .

Ta có  $IJ$  là đường trung bình của tam giác  $SBC$  nên 
$$\begin{cases} IJ \parallel SB \\ IJ = \frac{1}{2} SB = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Do vậy  $(IJ, CD) = (AB, SB)$ .

Mặt khác, tam giác  $SAB$  có ba cạnh bằng nhau nên  $\angle SBA = 60^\circ$ .

Vậy  $(IJ, CD) = (AB, SB) = \angle SBA = 60^\circ$ .

**Câu 6:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với  $CD$ ,  $M$  là một điểm thuộc cạnh  $BC$  (không trùng  $B$  và  $C$ ). Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$  lần lượt cắt  $BD, AD, AC$  tại  $N, P, Q$ . Tứ giác  $MNPQ$  là hình gì?

**Trả lời:** hình chữ nhật....

### Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel AB, AB \subset (ABC) \\ (\alpha) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB$$

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel CD, CD \subset (BCD) \\ (\alpha) \cap (BCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD.$$

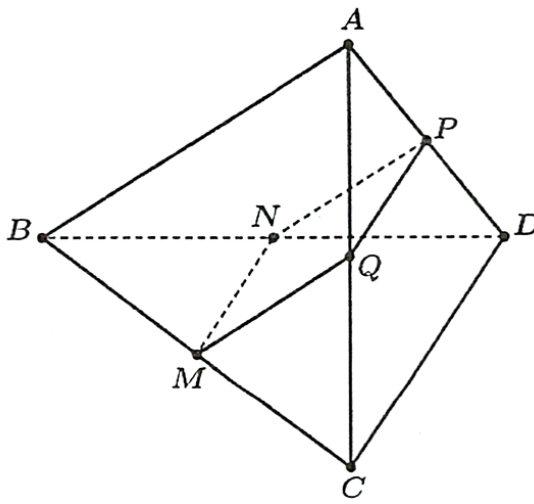
Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được

Tương tự ta có:  $NP \parallel AB, PQ \parallel CD$ .

Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

Mặt khác:  $(AB, CD) = (MQ, MN) = \angle MQN = 90^\circ$ .

Vậy tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.



**Câu 7:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = a, BD = 3a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Biết  $AC$  vuông góc với  $BD$ . Tính độ dài  $MN$ .

**Trả lời:**  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

### Lời giải

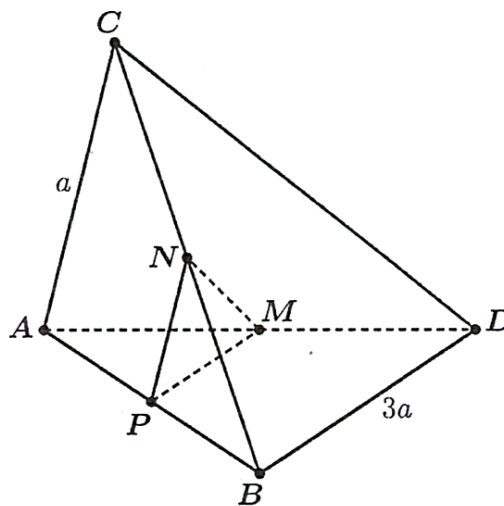
Gọi  $P$  là trung điểm đoạn  $AB$ ,

ta có  $NP$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow NP = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, NP \parallel AC.$$

Tương tự:  $MP$  là đường trung bình của  $\triangle ABD$

$$\Rightarrow MP = \frac{1}{2}BD = \frac{3a}{2}, MP \parallel BD.$$



Khi đó:  $(AC, BD) = (PN, PM) = \angle MPN = 90^\circ$  hay  $\triangle MNP$  vuông tại  $P$ .

Vì vậy

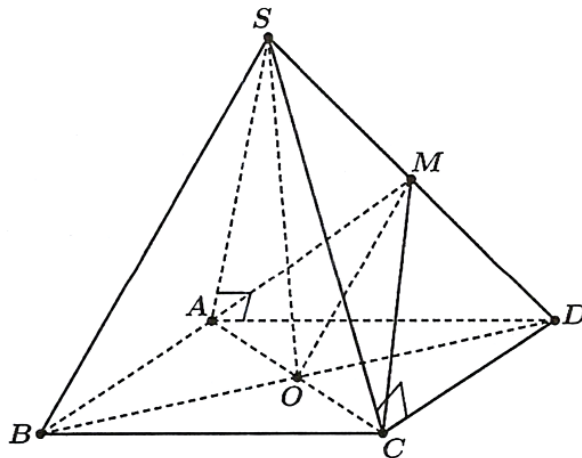
$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

**Câu 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Biết  $\angle SAD = \angle SCD = 90^\circ$ . Tìm góc của hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$ .

**Trả lời:**  $(SB, AC) = 90^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SD$ .

Khi đó  $OM$  là đường trung bình của tam giác  $SBD$  nên  $OM \parallel SB$ .

Do vậy  $(SB, AC) = (OM, AC)$ .

Tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$  có trung tuyến  $AM = \frac{SD}{2}$ ;

Tam giác  $SCD$  vuông tại  $C$  có trung tuyến  $CM = \frac{SD}{2}$ .

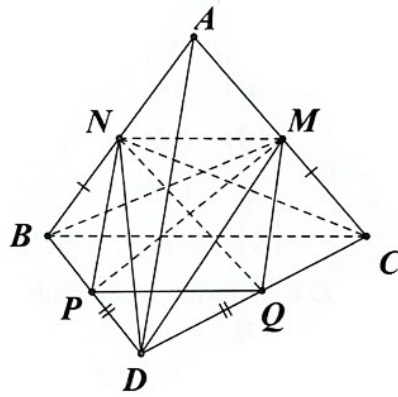
Suy ra tam giác  $MAC$  cân tại  $M$ , mà  $O$  là trung điểm  $AC$  nên

$OM \perp AC$  hay  $(OM, AC) = 90^\circ$ . Từ (1) và (2) suy ra  $(SB, AC) = 90^\circ$  hay  $SB \perp AC$ .

**Câu 9:** Cho tứ diện  $ABDC$  có  $AB = AC$  và  $DB = DC$ . Tìm góc của hai đường thẳng  $BC$  và  $AD$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AB, BD, CD$ .

Dễ dàng chứng minh được  $MNPQ$  là hình bình hành.

Dễ dàng chứng minh được  $\triangle MBD = \triangle NCD$  (c-c-c).

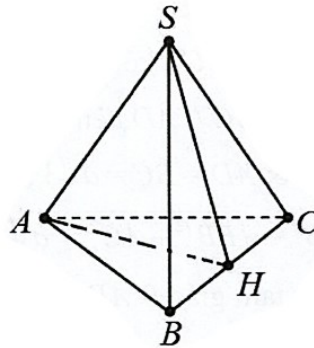
Suy ra hai trung tuyến tương ứng  $NQ = MP$ .

Suy ra  $MNPQ$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow MN \perp MQ$ . Mà  $AD \parallel MQ$  và  $BC \parallel MN$  nên  $AD \perp BC$ .

**Câu 10:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = AC, \angle SAC = \angle SAB$ . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

**Lời giải**



**Cách 1:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AS \cdot AC \cdot \cos \angle SAC - AS \cdot AB \cdot \cos \angle SAB = 0 \end{aligned}$$

Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$  bằng  $90^\circ$ .

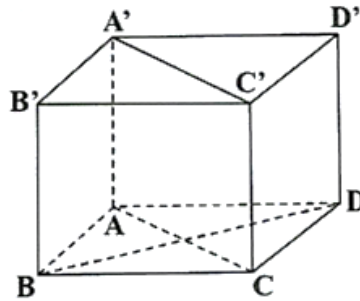
**Cách 2:**

Vì  $AB = AC$ ,  $\angle SAC = \angle SAB$  nên  $\Delta SAC = \Delta SAB$ , suy ra  $SB = SC$ , do đó hai tam giác  $ABC$  và  $SBC$  là tam giác cân. Chứng minh tương tự bài 1 (trang 194) ta được  $SA \perp BC$ .

**Câu 11:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $BD$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

**Lời giải**

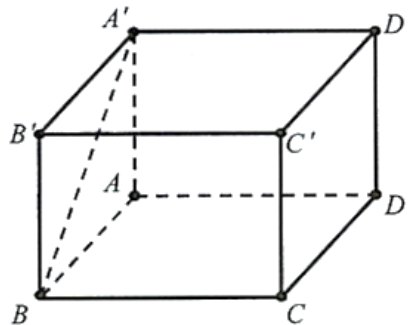


$AC \parallel A'C'$  nên  $(A'C'; BD) = (AC; BD) = 90^\circ$ .

**Câu 12:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$ .

**Trả lời:**  $45^\circ$

**Lời giải**

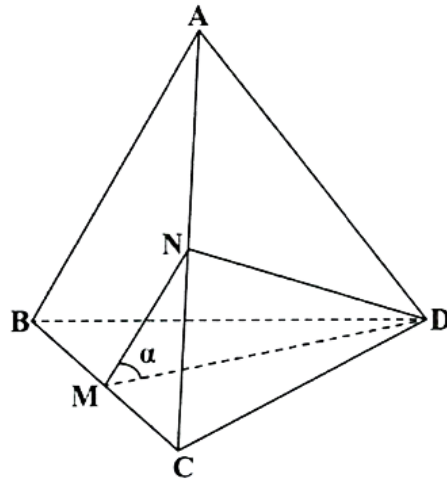


Có  $CD \parallel AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = \angle ABA' = 45^\circ$  (do  $ABB'A'$  là hình vuông).

**Câu 13:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Côsin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DM$  bằng?

**Trả lời:**  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

**Lời giải**



Kẻ  $MN \parallel AB$ , có  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$ .

Suy ra  $MN = \frac{AB}{2}$ .

Do đó:  $(AB, DM) = (MN, DM) = \angle DMN = \alpha$ .

Gọi tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ .

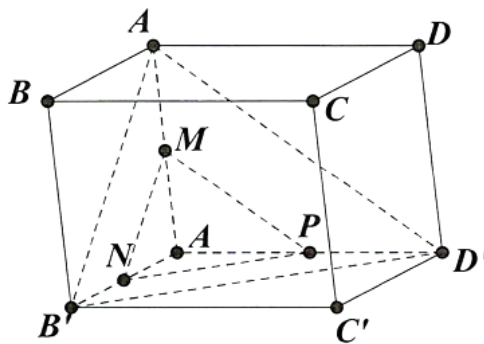
$$MN = \frac{a}{2}, DN = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{MN^2 + DM^2 - DN^2}{2 \cdot MN \cdot DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**Câu 14:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AA'$  và  $A'B'$ . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm cạnh  $AD'$ .

Vì  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  là hình lập phương cạnh  $a$  nên  $AB' = B'D' = D'A = a\sqrt{2}$ .

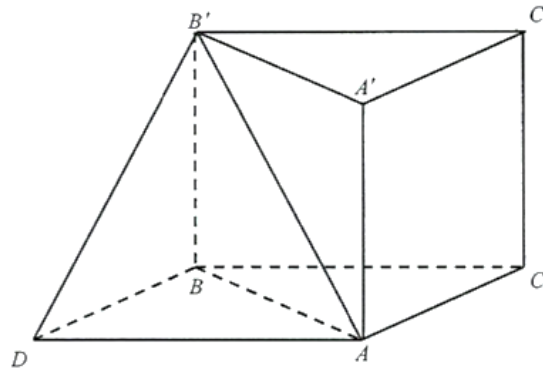
Suy ra  $MN = NP = PM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow (MN, BD) = (MN, NP) = 60^\circ$ .

**Câu 15:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân  $AB = AC = a$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$  và  $AA' \perp AB, AA' \perp AC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Trong  $(ABC)$ , kẻ  $AD$  sao cho  $ACBD$  là hình bình hành.

Ta có:  $BC \parallel AD$  nên  $(AB'; BC) = (AB'; AD) = \angle B'AD$ .

Ta có:  $AD = BC = a\sqrt{3}, AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{3}$ ,

$$DB' = \sqrt{BB'^2 + AC^2} = a\sqrt{3}.$$

Vậy tam giác  $B'AD$  đều nên  $\angle B'AD = 60^\circ$ .

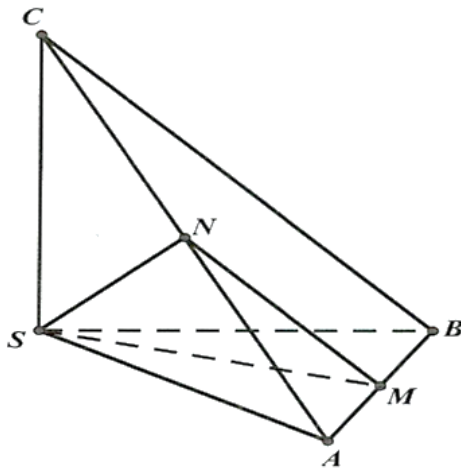
**Câu 16:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc với nhau và  $SA = SB = SC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $SM$  và  $BC$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó góc giữa  $SM$  và  $BC$  bằng góc giữa  $SM$  và  $MN$ .

Ta có:  $AB = BC = CA$



$$SM = \frac{1}{2} AB \quad (\text{trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền}).$$

$$SN = \frac{1}{2} AC \quad (\text{trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền}).$$

$$MN = \frac{1}{2} BC$$

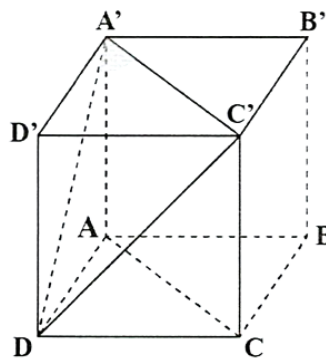
Suy ra  $SM = MN = SN$  hay tam giác  $SMN$  đều.

Do đó  $(SM; BC) = \angle SMN = 60^\circ$ .

**Câu 17:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$ ?

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



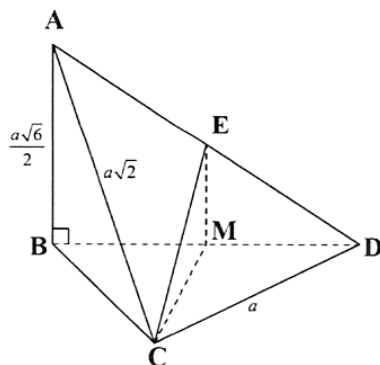
Ta có:  $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \angle DAC' = 60^\circ$ .

Vì  $A'D = A'C' = C'D$ .

**Câu 18:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với  $(BCD)$ . Biết tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  và  $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CE$ ?

**Trả lời:**  $45^\circ$

**Lời giải**



Ta có:  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm  $BD \Rightarrow ME \parallel AB$ ,

$$ME = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{6}}{4}, CM = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

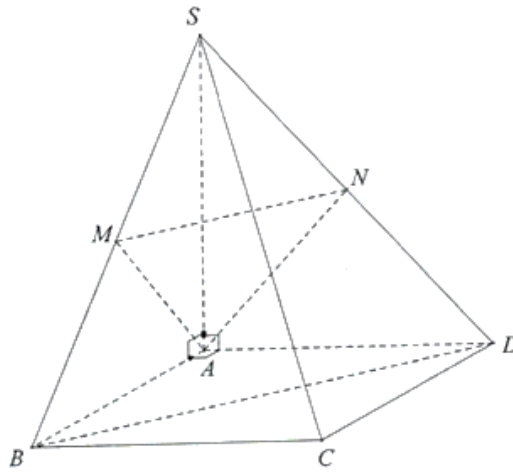
$\Rightarrow \triangle CME$  vuông cân tại  $M$ .

Ta có  $(AB, CE) = (EM, CE) = \angle CEM = 45^\circ$ .

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với  $AB$  và  $AD, SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Tính góc giữa  $AM$  và  $BD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $N$  là trung điểm của  $SD$  khi đó ta có  $MN \parallel BD \Rightarrow (AM, BD) = (AM, MN)$ .

Theo giả thiết ta có:  $AM = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  ;

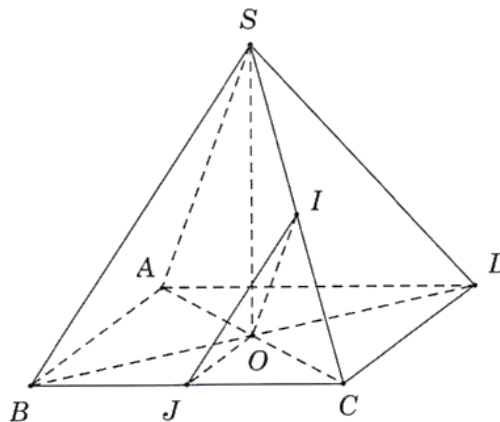
$$AN = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}; MN = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \triangle AMN$  đều  $\Rightarrow \angle AMN = 60^\circ$ . Vậy  $(AM, BD) = 60^\circ$ .

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng?

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $O$  là tâm của hình thoi  $ABCD$

$\Rightarrow OJ$  là đường trung bình của  $\triangle BCD$ . Suy ra  $\begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$ .

Vì  $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$ .

$$\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta IOJ \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases}$$

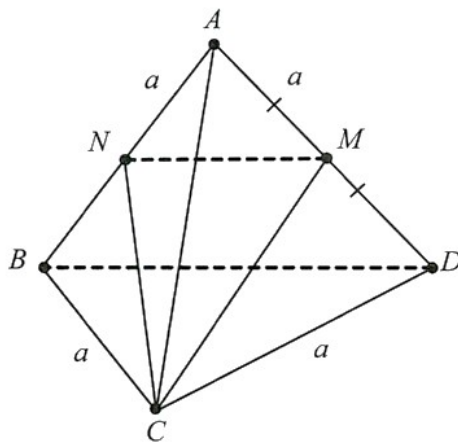
Xét tam giác  $IOJ$ , có đều.

Vậy  $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \angle IOJ = 60^\circ$ .

**Câu 21:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $MC$  và  $BD$ .

**Trả lời:**  $73,22^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $N$  là trung điểm  $AB$ . Ta có  $MN \parallel BD$  nên  $(MC, BD) = (MC, MN) = \angle MN$ .

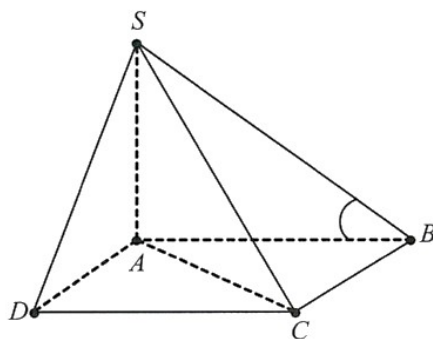
Xét  $\Delta MNC$  có  $CM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MN = \frac{a}{2}$ . Ta có:

$$\cos \angle MN = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \angle MN = 73,22^\circ$$

**Câu 22:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Biết  $SA \perp AB, SA \perp AC$  và  $SC = a\sqrt{5}$ . Tính góc giữa  $SB$  và  $CD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Ta có:  $AB \parallel CD$  nên  $(SB, CD) = (SB, AB) = \angle SBA$

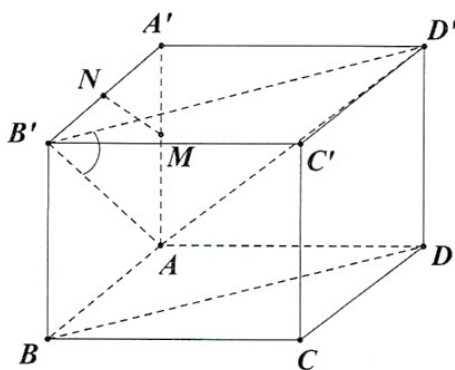
Ta có:  $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$ :  $\tan \angle B = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle B = 60^\circ$

**Câu 23:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AA'$  và  $A'B'$ . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

## Lời giải



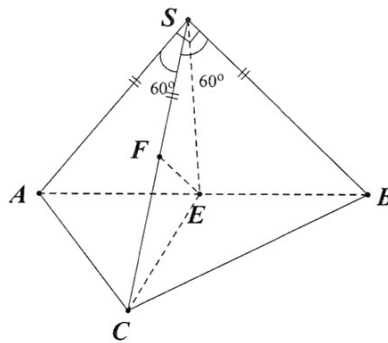
Ta có:  $MN \parallel B'A, BD \parallel B'D' \Rightarrow (MN, BD) = (B'A, B'D') = \angle B'D'$

Ta có:  $\triangle AB'D'$  đều nên  $\angle AB'D' = 60^\circ$ .

**Câu 24:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC, \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ, \angle BSA = 90^\circ$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $SC$ . Tính số đo góc của hai đường thẳng  $EF$  và  $SC$ .

**Trả lời:**  $90^\circ$

## Lời giải



Gọi  $SA = SB = SC = a$

Ta có:  $\triangle SAC, \triangle SBC$  cân và có 1 góc  $60^\circ$  nên là hai tam giác đều. Suy ra  $AC = BC = a$ .

$\triangle SAB$  vuông cân tại  $S$  nên  $AB = a\sqrt{2}$

Xét  $\triangle ABC$  có:  $AC = BC = a$  và  $AB = a\sqrt{2}$  nên  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $C$ .

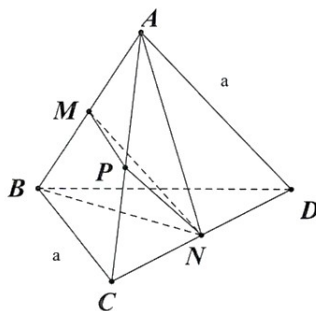
Suy ra  $CE = SE = \frac{AB}{2}$

$\triangle SCE$  cân tại  $E$  có  $EF$  là trung tuyến nên là đường cao  $\Rightarrow EF \perp SC$ .

**Câu 25:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm góc giữa đường thẳng  $MN$  và  $BC$ .

**Trả lời:**  $45^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$

Ta có:  $MP \parallel BC \Rightarrow (MN, BC) = (MN, MP) = \angle PMN$

Ta có:  $\triangle ABN$  cân tại  $N$  có  $NM$  là trung tuyến nên là đường cao

$$\Rightarrow MN = \sqrt{BN^2 - MB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\cos \widehat{PMN} = \frac{MP^2 + MN^2 - NP^2}{2 \cdot MP \cdot MN} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

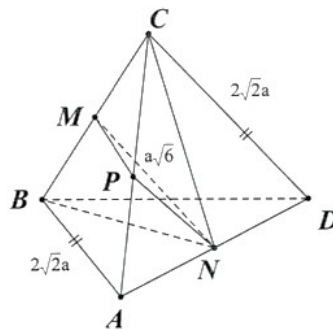
Xét  $\triangle MNP$  có:

Suy ra  $\widehat{PMN} = 45^\circ$ .

**Câu 26:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết  $AB = CD = 2\sqrt{2}a$  và  $MN = a\sqrt{6}$ . Tính góc giữa  $AB$  và  $CD$ .

**Trả lời:**  $60^\circ$

**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$ .

Ta có:  $MP \parallel BC \Rightarrow (AB, CD) = (MP, PN) \Rightarrow MP = NP = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}a = \sqrt{2}a$

Xét  $\triangle MNP$  có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MPN} &= \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP} \\ &= \frac{2(\sqrt{2}a)^2 - (a\sqrt{6})^2}{2 \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

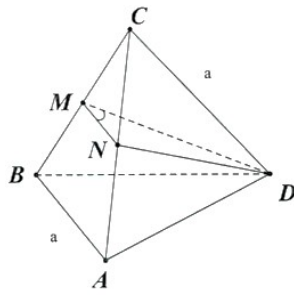
Suy ra  $\widehat{MPN} = 120^\circ$

Vậy  $(MP, PN) = 60^\circ$ .

**Câu 27:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DM$ .

**Trả lời:**  $(AB, MD) \approx 73,2^\circ$

**Lời giải**



Đặt  $AB = a$

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$

Ta có:  $MN \parallel AB \Rightarrow (AB, MD) = (MN, MD) \Rightarrow MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{a}{2}$

$$\cos \angle MND = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Xét  $\triangle MND$  có:

Suy ra  $\angle MND \approx 73,2^\circ$ . Vậy  $(AB, MD) \approx 73,2^\circ$ .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>