

DẠNG 4**Bài tập về phương trình Mũ – Logarit số 01**

Câu 1: Cho a, b là các số dương. Tìm x biết $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$.

- A. $x = a^4 b^7$. B. $x = a^7 b^4$. C. $x = a^{\frac{1}{4}} b^7$. D. $x = a^4 b^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 3: Bất phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^{x^2-3} < (3 - 2\sqrt{2})^{-2x}$ có nghiệm là:

- A. $-1 < x < 3$. B. $-3 < x < 1$. C. $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$.

Câu 4: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$.

- A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là:

- A. $x = 2$ B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = -3$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm S của phương trình: $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

- A. $S = \{3\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{4\}$.

Câu 8: Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 9: Tìm số nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x^2+1}} = 3^{2-4x}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 10: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a; b]$ ta có $a + b$ bằng:

- A. $a + b = 11$. B. $a + b = 9$. C. $a + b = 12$. D. $a + b = 10$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 12: Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng của $a + b$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{22}{3}$. D. 7.

- Câu 13:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2$ biết $x_1 < x_2$.
- A. $P = 0$. B. $P = \frac{8}{3}$. C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = 1$.
- Câu 14:** Cho số dương a thỏa mãn đẳng thức $\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a$, số các giá trị của a là
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 15:** Biết rằng phương trình $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$.
- A. $S = 252$. B. $S = 9$. C. $S = 180$. D. $S = 45$.
- Câu 16:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_9(x-1)^8 = \log_3(4x)$ là
- A. 3. B. -3. C. $2\sqrt{3}$. D. 2.
- Câu 17:** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ là:
- A. 630. B. $\frac{1}{125}$. C. $\frac{630}{625}$. D. $\frac{7}{125}$.
- Câu 18:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:
- A. Vô số. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 19:** Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\log \sin x + \log \cos x = -1$ và $\log(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log n - 1)$. Giá trị của n là
- A. 11. B. 12. C. 10. D. 15.
- Câu 20:** Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
- A. 6. B. 12. C. 2. D. 4.
- Câu 21:** Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi
- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.
- Câu 22:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 23:** Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị của biểu thức $|x_1 - x_2|$ là
- A. 3. B. 8. C. 2. D. 4.
- Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0; 2019]$ của tham số m để phương trình $4^x - (m+2018)2^x + (2019+3m) = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016

B. 2019.

C. 2013

D. 2018.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x - (m+3).2^{x+1} + m+9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 26: Cho phương trình $4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 27: Giả sử phương trình $\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0$ có một nghiệm dạng $x = 2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $b < 20$. Tính tổng $a + b + c^2$.

A. 10.

B. 11.

C. 18.

D. 27.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x| - m\log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (\sqrt{2}; 2)$.B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.C. $m \in (-\sqrt{2}; 2)$.D. $m \in (-2; \sqrt{2})$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m^*$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình có nghiệm?

A. 2021.

B. 2019.

C. 4038.

D. 2020.

Câu 30: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 31: Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9; +\infty)$.B. $(3; 9)$.C. $(-2; 0)$.D. $(1; 3)$.

Câu 32: Cho phương trình $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$.B. $S = 5$.C. $S = 6$.D. $S = 8$.

Câu 33: Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14.

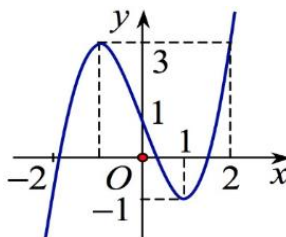
B. 15.

C. 13.

D. 16.

Câu 34: Phương trình $(1+\sqrt{2})^x + (1-2a)(\sqrt{2}-1)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.B. $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.C. $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.D. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

- Câu 35:** Trên đoạn $[0; 2019]$ có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9^x - 2(m+2) \cdot 3^x + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?
A. 2010. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 4.
- Câu 36:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. **B.** $m \in (-\infty; 0]$. **C.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$
- Câu 37:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.
- Câu 38:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.
- Câu 39:** Cho phương trình $4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $m \in (1; 3)$. **B.** $m \in (-5; -3)$. **C.** $m \in (-3; 0)$. **D.** $m \in (0; 1)$.
- Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt là
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.
- 
- Câu 41:** Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a) \cdot (2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng
A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 42:** Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} - (m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - 2m = 0$ có nghiệm là $[-a + 2\sqrt{b}; 0]$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $b - a$.
A. 1. **B.** -11. **C.** -1. **D.** 11.
- Câu 43:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$ (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.D	5.B	6.C	7.D	8.D	9.B	10.A
11.A	12.D	13.A	14.D	15.C	16.C	17.B	18.D	19.B	20.A
21.A	22.C	23.C	24.B	25.A	26.A	27.A	28.C	29.A	30.B
31.D	32.D	33.D	34.B	35.D	36.D	37.C	38.C	39.D	40.A
41.D	42.A	43.C							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

$$\text{Ta có } \log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7.$$

Câu 2: Chọn CĐiều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{4} \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tích } x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Câu 3: Chọn ATập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Nhận xét: } (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}.$$

$$\text{Phương trình: } (3 + 2\sqrt{2})^{x^2 - 3} < (3 - 2\sqrt{2})^{-2x} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{x^2 - 3} < (3 + 2\sqrt{2})^{2x}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Câu 4: Chọn DĐiều kiện: $x > 0$.

$$\log_2(x+1) + \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

So điều kiện nhận $x = 1$. Vậy tổng tất cả các nghiệm là 1.**Câu 5: Chọn B**Điều kiện xác định của phương trình là $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_3(2x+1)(x-3) = 2 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện của phương trình, suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 4$.**Câu 6: Chọn C**

$$\text{Ta có: } 2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{3(2x-1)} \Leftrightarrow 7x-1 = 3(2x-1) \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$.

Câu 7: Chọn D

$$\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3 \frac{2x+1}{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2x+1}{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 8: Chọn D

Do các số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự là cấp số nhân nên

$$(a + \log_4 3)^2 = (a + \log_2 3)(a + \log_8 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a \log_4 3 + \log_4^2 3 = a^2 + a \log_2 3 + a \log_8 3 + \log_2 3 \cdot \log_8 3$$

$$\Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2^2 3 = \frac{4}{3} a \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2^2 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} a = -\frac{1}{12} \log_2 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3.$$

Suy ra công bội của cấp số nhân là: $\frac{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_4 3}{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_2 3} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{3}.$

Câu 9: Chọn B

$$9^{\sqrt{x^2+1}} = 3^{2-4x} \Leftrightarrow 9^{\sqrt{x^2+1}} = 9^{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x^2+1 = 1-4x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 10: Chọn A

Điều kiện: $x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -6$

$$\text{Ta có: } 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+5x-6 \leq x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 11: Chọn A Điều kiện: $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}.$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2((x+2)|x-5|) = 3.$$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+2)(x-5) = 8 \\ x > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x-5) = -8 \\ x < 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 12: Chọn D

$$\text{Phương trình } \ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ m = \frac{x^2 - x + 4}{x} (*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ với $1 < x < 3$.

$$\text{Khi đó } f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ trên khoảng $(1; 3)$

x	1	2	3
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	4	3	$\frac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên khoảng $(1; 3)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (*) có nghiệm trên khoảng $(1; 3)$ khi và chỉ khi $3 \leq m < 4$ hay $m \in [3; 4)$. Do đó $a = 3$, $b = 4$.

Vậy $a + b = 7$.

Câu 13: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x + 2\log_3 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27 \end{cases}$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_2 = 27$.

$$\text{Vậy } P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2 = \log_3 \frac{1}{3} + \log_{27} 27 = 0.$$

Câu 14: Chọn D

$$\begin{aligned} \log_2 a + \log_3 a + \log_5 a &= \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a \\ \Leftrightarrow \log_2 a (1 + \log_3 2 + \log_5 2) &= (\log_2 a)^3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 a \left[1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 2 \cdot \log_5 2 (\log_2 a)^2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 0 \\ (\log_2 a)^2 = \frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 2 \cdot \log_5 2} \left(\alpha = \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 2 \cdot \log_5 2}} \text{ do } \log_3 2 > 0, \log_5 2 > 0 \right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (TM)} \\ a = 2^\alpha \text{ (TM)} \\ a = 2^{-\alpha} \text{ (TM)} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 15: Chọn C

Điều kiện xác định: $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_3 (3^{x+1} - 1) = 2x - \log_3 2$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3^{x+1} - 1) + \log_3 2 = 2x \Leftrightarrow 2(3^{x+1} - 1) = 3^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 = 0 \quad (1)$$

Do x_1, x_2 cũng là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo Viet, ta có: $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 \\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 2 \end{cases}$.

Ta có: $S = 27^{x_1} + 27^{x_2} = (3^{x_1} + 3^{x_2})^3 - 3 \cdot 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot (3^{x_1} + 3^{x_2}) = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$.

Câu 16: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

Ta có: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} (x+3) + \frac{1}{4} \log_9 (x-1)^8 = \log_3 (4x)$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+3) + \log_3 |x-1| = \log_3 (4x) \Leftrightarrow \log_3 [(x+3) \cdot |x-1|] = \log_3 (4x)$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot |x-1| = 4x \quad (1).$$

Nếu $0 < x < 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (1-x) = 4x \Leftrightarrow -x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2\sqrt{3} (tm) \\ x = -3 - 2\sqrt{3} (l) \end{cases}.$$

Nếu $x > 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (x-1) = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (tm) \\ x = -1 (l) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3 + 2\sqrt{3}; 3\}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $2\sqrt{3}$.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta có:

$$\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x)(\log_{5^2} x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_5 x} + 1\right) \cdot \frac{1}{4} \log_5^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2 x + \frac{3}{4} \log_5 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (tmdk)} \\ x = 5^{-4} = \frac{1}{625} \text{ (tmdk)} \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm là: $5 \cdot \frac{1}{625} = \frac{1}{125}$.

Câu 18: Chọn D

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-8 > 0 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \frac{x^2-2x+9}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $y = \frac{x^2-2x+9}{x}$ trên $(1; +\infty)$, ta có $y' = \frac{x^2-9}{x^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Bảng biến thiên

x	1	3	$+\infty$
y'	-	0	+
y	8	4	$+\infty$

Để thỏa mãn yêu cầu thì $4 < m < 8$ nên các giá trị nguyên của tham số m là 5, 6, 7.

Câu 19: Chọn B

Ta có $\log \sin x + \log \cos x = -1 \Leftrightarrow \log(\sin x \cos x) = -1 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{10}$.

Ta có $\log(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log n - 1)$

$$\Leftrightarrow 2\log(\sin x + \cos x) = \log n - \log 10 \Leftrightarrow \log(\sin x + \cos x)^2 = \log \frac{n}{10}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(1 + 2\sin x \cos x\right) = \log \frac{n}{10} \Leftrightarrow n = 10\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n = 12.$$

Câu 20: Chọn A

Điều kiện: $a, b > 0$ và $a - 4b > 0$

$$\text{Đặt } \log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 100^t \\ b = 40^t \\ a - 4b = 12 \cdot 16^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 100^t - 4 \cdot 40^t - 12 \cdot 16^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^t = -2 \text{ (l)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6.$$

Câu 21: Chọn A

Ta có phương trình: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$

Đặt: $2^x = t > 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 2mt + 2m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm thì phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn:

$$t_1 \cdot t_2 = 2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2m \Leftrightarrow 8 = 2m \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Ta

có

$$9 \cdot 3^{2x} - m \left(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3 \right) \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} - \frac{m}{3} \left(4\sqrt{x+1} + 3m + 3 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x+1, \text{ phương trình thành } 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{m}{3} \left(4\sqrt{t} + 3m + 3 \right) = 0 \quad (2).$$

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t = 0$.

$$\text{Với } t = 0 \text{ thay vào phương trình ta có } -m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Thử lại:

$$\text{Với } m = -2 \text{ phương trình thành } 3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) = 0$$

$$\text{Ta có } 3^t + \frac{1}{3^t} \geq 2, \forall t \in \mathbb{R} \text{ và } \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) \geq -2, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra } 3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên loại $m = -2$.

$$\text{Với } m = 1 \text{ phương trình (2) thành } 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) = 0 \quad (3)$$

Để thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Trên tập } [0; +\infty), (3) \Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) = 0.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) \text{ trên } [0; +\infty).$$

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 3^{-t} \cdot \ln 3 - \frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 3^{-t} \cdot \ln^2 3 + \frac{1}{3(\sqrt{t})^3} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm $t > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Suy ra trên $[0; +\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t = 0, t = 1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vậy chọn $m = 1$.

Câu 23: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2 - (m+2)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^m \end{cases}$.

Do $x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2^m = 6 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $|x_1 - x_2| = |4 - 2^1| = 2$.

Câu 24: Chọn B

Ta có $4^x + (m-1)2^x + (4+3m) = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + (m-1)t + 4+3m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2013$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 2019]$ suy ra $m \in \{0; 1; 2; \dots; 2012\}$

Câu 25: Chọn A

Đặt: $t = 2^x (x > 0 \Rightarrow t > 1)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 (*) \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases}$$

Phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 \cdot t_2 = m+9 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào hệ } (*) \text{ ta được } \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m+4 > 0 \\ m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 0 \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn A

$$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + m - 2 = 0(1). \text{ Đặt } t = 2^x (t > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0(2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^0 \leq 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \leq t_1 < t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \leq t_1 - 1 < t_2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m - 2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \geq 5 \end{cases}. \text{ Vậy } m = 5 \text{ thỏa yêu cầu.}$$

Câu 27: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Ta có:

$$\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \\ x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } a = 1; b = 5; c = 2 \Rightarrow a + b + c^2 = 10.$$

Câu 28: Chọn C

$$\text{Ta có: } \log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 |\cos x| - 2m \log |\cos x| - m^2 + 4 = 0$$

Đặt $\log |\cos x| = t$. Điều kiện: $t \leq 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0, t \leq 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) < 0 \\ m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) \geq 0 \\ \frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{-m^2 + 4}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4 < 0 \\ 2m^2 - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ -m^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2$$

Câu 29: Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = (2\sqrt{m + \log_2 x} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 \end{cases} (1)$

Đặt: $t = \log_2 x (t \leq 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m (2)$

Đặt: $g(t) = t^2 - t (t \in (-\infty; 0])$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

Ta có: $g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \leq 0$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0
$g'(t)$		-
$g(t)$	$+\infty$	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$ thì $m \geq 0$

Trường hợp 2: $\sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 \end{cases} (3)$$

Đặt: $t = \log_2 x (t \geq 1)$, phương trình (3) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 (4)$

Đặt: $g(t) = t^2 - 3t + 1, t \in [1; +\infty)$. Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \in [1; +\infty)$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$

Ta có bảng biến thiên:

t	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	-1	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$ thì $m \geq -\frac{5}{4}$

Kết hợp và, $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 30: Chọn B

$$16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - \frac{m}{4} \cdot 4^x + 5m^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4^x)^2 - m \cdot 4^x + 20m^2 - 176 = 0, (1).$$

Đặt $t = 4^x$ điều kiện $t > 0$ từ (1) ta có $4t^2 - m \cdot t + 20m^2 - 176 = 0, (*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1; x_2$ thì $x_1 + x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 1$. Nhưng vì phương trình (*) có

$$\frac{c}{a} = -\frac{176}{4} = -44 < 0 \text{ nên không có giá trị nào của } m \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 31: Chọn D

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m-1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m-1$ thì $3^{x_1} = 4m-1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1; 3)$.

Câu 32: Chọn D

Ta có $(m-5) \cdot 3^x + (2m-2) \cdot 2^x \cdot \sqrt{3^x} + (1-m) \cdot 4^x = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (m-5) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + (2m-2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + 1-m = 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x, \text{ điều kiện } t > 0.$$

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2 + (2m-2)t + 1-m = 0, (2)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > 3 \\ m < 1 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 \Leftrightarrow m \in (3; 5).$$

Vậy $a = 3, b = 5$ nên $a + b = 8$.

Câu 33: Chọn D

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2 \cdot 3^{x^2+1} \Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$; (1) $\Leftrightarrow t + m \cdot \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0$ (2)

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

(2) $\Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = -2t + 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	5	9	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10; 10)$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 34: Chọn B

Vì $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 1$. Đặt $t = (1 + \sqrt{2})^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0$ (1).

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2 .

$$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}.$$

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})^{x_1 - x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Chọn D

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2(m+2)t + 3m - 2 = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm số số nguyên $m \in [0; 2019]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Hay phương trình (1) có:
$$\begin{cases} \Delta' = (m+2)^2 - 3m + 2 > 0 \\ S = 2(m+2) > 0 \\ P = 3m - 2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 6 > 0 \\ m > -2 \\ m > \frac{2}{3} \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ 3m - 2 - 2(m+2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m < 5 \end{cases}.$$
 Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 36: Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$.

Cách 1: Ta có: $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow m = -\log_2^2 x - \log_2 x$.

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $m = -t^2 - t(**)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t < 0$.

Xét $f(t) = -t^2 - t$ với $t < 0$. Ta có $f'(t) = -2t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Vậy để phương trình (**) có nghiệm $t < 0$ thì $m \leq \frac{1}{4}$ hay $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

Cách 2: Ta có:

$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $t^2 + t + m = 0(**)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t < 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Vì khi $\Delta \geq 0$ phương trình (**) có nghiệm $t_1; t_2$ thì theo Định lí Viet $t_1 + t_2 = -1$ nên luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Vậy $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ thì phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 37: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \quad (i).$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là

$$t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2. \text{ Vì } x_1 < x_2 \text{ nên } t_1 < t_2.$$

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m - 3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \quad (ii).$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 38: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \quad (i).$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là

$$t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2. \text{ Vì } x_1 < x_2 \text{ nên } t_1 < t_2.$$

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m - 3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \quad (ii).$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 39: Chọn D

$$4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình (*) trở thành

$$4t^2 - (8m+5)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = 2m+1. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2m+1 \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{3}{8}. \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Lại có } x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_2 (2m+1) = -1 \Leftrightarrow \log_2 (2m+1) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Câu 40: Chọn A

Đặt $t = e^x$ ($t > 0$).

Phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ trở thành $8f(t) = m^2 - 1$ hay $f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}$.

Nhận thấy với mỗi giá trị $t > 0$ cho một giá trị $x = \ln t$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

Khi đó $-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 41: Chọn D

Đặt $(2 + \sqrt{3})^x = t$, $t > 0$ khi đó $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$.

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $(2 + \sqrt{3})^{x_1} = t_1$, $(2 + \sqrt{3})^{x_2} = t_2$ nên từ $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có

$$(2 + \sqrt{3})^{x_1 - x_2} = 3 \text{ hay } \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2.$$

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình $t + (1 - 2a) \cdot \frac{1}{t} - 4 = 0$ (*) có

hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: (*) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (1 - 2a) > 0 \\ 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{-3}{2} \\ a < \frac{1}{2} \end{cases} (**).$

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1 - 2a = 3 \Leftrightarrow a = -1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases}$.

Phương trình (*) có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_2 = 3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 3t_2) \cdot (t_2 - 3t_1) = 0 \Leftrightarrow -3(t_1^2 + t_2^2) + 10t_1 t_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(t_1 + t_2)^2 + 6t_1 t_2 + 10t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow -48 + 16(1 - 2a) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện } (**).$$

Giá trị này của a thuộc đáp án **D**.

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu a thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án **D**. Vậy chọn đáp **D**.

Câu 42: Chọn A

Xét phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} - (m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - 2m = 0$ (1).

Đặt $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = t$, vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \leq 1 \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình (1) trở thành $t^2 - (m+1)t - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - t}{t + 2}$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in (0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t}{t + 2}$, $t \in (0; 1]$.

$$f'(t) = \frac{t^2 + 4t - 2}{(t + 2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{6} \notin (0; 1] \\ t = -2 + \sqrt{6} \in (0; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$-2 + \sqrt{6}$	1
$f'(t)$		0	+
$f(t)$	0	$-5 + 2\sqrt{6}$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in [-5 + 2\sqrt{6}; 0]$

Suy ra $-a + 2\sqrt{b} = -5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow a = 5, b = 6$. Vậy $b - a = 6 - 5 = 1$.

Câu 43: Chọn C

Đặt $3^{4-x^2} = v > 0$, $3^{6-3x} = u > 0$ phương trình trở thành $m\frac{u}{v} + v = u + m \Leftrightarrow m\left(\frac{u-v}{v}\right) = (u-v)$

$$\Leftrightarrow (u-v)(m-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} & (I) \\ 3^{4-x^2} = m & (II) \end{cases}$$

$$\text{Giải (I): } 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 1$ và một nghiệm $x \neq 2$. Với $x = 1$ ta có $m = 3^{4-1^2} = 27$. Khi đó $3^{4-x^2} = 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \neq 2 \end{cases}$.

Vậy $m = 27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 2$ và một nghiệm $x \neq 1$. Với $x = 2$ ta có $m = 3^{4-2^2} = 1$. Khi đó $3^{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \neq 1 \end{cases}$.

Vậy $m = 1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác 1; 2

Từ $3^{4-x^2} = m \Leftrightarrow x^2 = 4 - \log_3 m \geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x = 0 \Rightarrow 4 - \log_3 m = 0$

$\Leftrightarrow m = 81$, đồng thời $x = 0$ thỏa mãn khác 1;2 nên $m = 81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m = 1$; $m = 27$; $m = 81$ thỏa mãn bài toán.