

DẠNG 3**Tích phân cho bởi nhiều hàm**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ (a - a^2)x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I + 46 \geq 0$?
- A. 7. B. 4. C. 6. D. 5.
- Câu 2:** Tính tích phân $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$.
- A. $\frac{117}{2}$. B. $\frac{707}{2}$. C. $\frac{275}{12}$. D. $\frac{119}{6}$.
- Câu 3:** Tính $I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} dx$.
- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{4}$. C. $I = 1$. D. $I = \frac{5}{4}$.
- Câu 4:** (Đề tham khảo – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
- A. $4 + \ln 15$. B. $2 + \ln 15$ C. $3 + \ln 15$. D. $\ln 15$.
- Câu 5:** (Toán học và tuổi trẻ - Số 6 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$; $f(0) = 2017$ và $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$
- A. $S = 1$. B. $S = \ln 2$. C. $S = \ln 4035$. D. $S = 4$.
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 4 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^9 f(x)dx$.
- A. $I = \frac{121}{6}$. B. $I = \frac{163}{6}$. C. $I = \frac{85}{6}$. D. $I = \frac{223}{6}$.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x & \text{khi } x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx = a + b\pi$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $T = a + b$.
- A. $T = \frac{11}{8}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = \frac{15}{8}$. D. $T = \frac{7}{2}$.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.
- A. $I = \frac{3e^2 - 1}{2e^2}$. B. $I = \frac{7e^2 + 1}{2e^2}$. C. $I = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$. D. $I = \frac{11e^2 - 11}{2e^2}$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 10: (Lục Ngạn – Bắc Giang – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1}; f(0) = 1 \text{ và } f\left(\frac{2}{3}\right) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $3 + 5\ln 2$.

B. $-2 + 5\ln 2$.

C. $4 + 5\ln 2$.

D. $2 + 5\ln 2$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0; +\infty) \setminus \{e\}$, thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}, f(e^2) = 3, f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6. \text{ Tính giá trị biểu thức } f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3).$$

A. $3(\ln 2 + 1)$.

B. $2\ln 2$.

C. $3\ln 2 + 1$.

D. $\ln 2 + 3$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $f(-3) + f(3) = 0$ và

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = f(0) + f(4).$$

A. $P = \ln \frac{3}{5} + 2$.

B. $P = 1 + \ln \frac{3}{5}$.

C. $P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

D. $P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính } f(-3) + f(0) + f(4) \text{ được kết quả}$$

A. $-1 + \ln \frac{4}{5}$

B. $-1 + \ln \frac{6}{5}$

C. $1 + \ln \frac{4}{5}$

D. $1 + \ln \frac{6}{5}$

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, biết

$$F(0) = 1; F(\pi) = 0. \text{ Tính } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

A. $P = 2 - \sqrt{3}$.

B. $P = 0$.

C. Không tồn tại P .

D. $P = 1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, $f(-3) = 0$, $f(0) = 1$ và

$$f(3) = 2. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = f(-4) + f(-1) + f(4).$$

A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$.

B. $P = 3 + \ln 3$.

C. $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$.

D. $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{4}{x^2 + x - 2}, f(-3) - f(3) = 0, f(0) = \frac{1}{3}. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-4) + f(-1) - f(4).$$

A. $1 + \ln 80$.

B. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$.

C. $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$.

D. $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.D	4.C	5.A	6.B	7.A	8.C	9.A	10.A
11.A	12.C	13.D	14.D	15.B	16.B				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^4 (a - a^2)x dx = 2x^3 \Big|_{-1}^0 + (a - a^2) \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 2 + 8a - 8a^2$$

$$\text{Khi đó } I + 46 \geq 0 \Leftrightarrow 2 + 8a - 8a^2 + 46 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq a \leq 3, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 2: Chọn C

Trên đoạn $[0; 3]$:

$$\text{Xét } x^3 \geq 4x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 1] \text{ do } x \in [0; 3]$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 \geq 4x^2 - 3x \\ x \in [1; 3] \Rightarrow x^3 \leq 4x^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \max_{x \in [0; 3]} \{x^3; 4x^2 - 3x\} = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 4x^2 - 3x & \text{khi } x \in [1; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 (4x^2 - 3x) dx = \frac{275}{12}. \text{ Chọn đáp án C}$$

Câu 3: Chọn D

Trên đoạn $[0; 2]$:

$$\text{Xét } x \geq \sqrt[3]{2-x} \Leftrightarrow x^3 \geq 2-x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) \geq 0 \xrightarrow{x \in [0; 2]} x \in [1; 2]$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{2-x} \\ x \in [1; 2] \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{2-x} \end{cases} \Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} \{x; \sqrt[3]{2-x}\} = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0; 1] \\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi } x \in [1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} \cdot dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \sqrt[3]{2-x} dx \stackrel{\text{Castio}}{=} \frac{5}{4}. \text{ Chọn đáp án D}$$

Câu 4: Chọn C

Cách 1:

$$\text{Từ } f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2dx}{2x-1} = \begin{cases} \ln|2x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \\ \ln|2x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=1 \\ 0+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|2x-1| + 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \\ \ln|2x-1| + 2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 2 = 3 + \ln 15.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x)|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{3} & (1) \\ f(3) - f(1) = f(x)|_1^3 = \int_1^3 f'(x)dx = \int_1^3 \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| \Big|_1^3 = \ln 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f(1) = \ln 15 \Rightarrow f(3) + f(-1) = 3 + \ln 15$.

Câu 5: Chọn A

Cách 1:

$$\text{Từ } f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x-1} = \begin{cases} \ln|x-1| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \\ \ln|x-1| + C_2 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = 2017 \\ f(2) = 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 2017 \\ 0 + C_2 = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2017 \\ C_2 = 2018 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x-1| + 2017 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \\ \ln|x-1| + 2018 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Khi đó: $f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - (\ln 2 + 2017) = 1$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x)|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{2} & (1) \\ f(3) - f(2) = f(x)|_2^3 = \int_2^3 f'(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) + (1), ta được: $f(3) + f(-1) + f(0) - f(2) = 0 \Rightarrow S = f(3) + f(-1) = f(2) - f(0) = 1$

Câu 6: Chọn B

$$\text{Ta có; } I = \int_1^9 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^9 f(x)dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_4^9 (x-2)dx = \frac{163}{6}.$$

Câu 7: Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5}{4} + \frac{1}{8}\pi = a + b\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Do } a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \frac{5}{4}; b = \frac{1}{8} \Rightarrow T = a + b = \frac{11}{8}.$$

Câu 8: Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^2 f(x)dx = I = \int_{-1}^0 f(x)dx + I = \int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 e^{2x}dx + I = \int_0^2 (x+1)dx = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}.$$

Câu 9: Chọn A

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x)dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Câu 10: Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3dx}{3x-1} = \begin{cases} \ln|3x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=1 \\ 0+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|3x-1|+1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\big|_{-1}^0=\int_{-1}^0 f'(x)dx=\int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1}dx=\ln|3x-1|\big|_{-1}^0=\ln \frac{1}{4} & (1) \\ f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)=f(x)\big|_{\frac{2}{3}}^3=\int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x)dx=\int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{2}{2x-1}dx=\ln|3x-1|\big|_{\frac{2}{3}}^3=\ln 8 & (2) \end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 11: Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)}dx = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1| + C$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi } x \in (e; +\infty) \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi } x \in (0; e) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(e^2)=3 \\ f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\ln e^2 - 1) + C_1 = 3 \\ \ln\left(1 - \ln \frac{1}{e^2}\right) + C_2 = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = \ln 2 \end{cases}$

Do đó $f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + 3 & \text{khi } x \in (e; +\infty) \\ \ln(1 - \ln x) + \ln 2 & \text{khi } x \in (0; e) \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = 3(\ln 2 + 1)$

Câu 12: Chọn C

Ta có $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$

$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2, & |x| < 1 \end{cases}$.

$f(-3) = \frac{1}{2} \ln 2 + C_1$; $f(3) = -\frac{1}{2} \ln 2 + C_1$, do đó $f(-3) + f(3) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 + C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 3 + C_2$, do đó $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow C_2 = 1$.

$f(0) = C_2 = 1$; $f(4) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$, do đó $f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Câu 13: Chọn D

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \int f'(x)dx &= \int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \begin{cases} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1, |x| > 1 \\ \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2, |x| < 1 \end{cases} \\
 f(-2) &= \ln 3 + C_1; \quad f(2) = \ln \frac{1}{3} + C_1, \text{ do đó } f(-2) + f(2) = 0 \Rightarrow C_1 = 0. \\
 f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln 3 + C_2; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{3} + C_2, \text{ do đó } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow C_2 = 1. \\
 \text{Vậy } f(-3) + f(0) + f(4) &= \ln 2 + 1 + \ln \frac{3}{5} = \ln \frac{6}{5} + 1.
 \end{aligned}$$

Câu 14: Chọn D

Cách 1:

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \int f'(x)dx &= \int \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx \\
 &= \int \frac{1}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C_1, x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \\ \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C_1, x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \\
 \begin{cases} F(0) = 1 \\ F(\pi) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_2 = 1 \\ \frac{1}{2} + C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \\ \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \\
 \text{Khi đó } P &= F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\tan\frac{7\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = 1
 \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} F(0) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right) = F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^0 = \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1+\sin 2x} \quad (1) \\ F(\pi) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = F(x)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin 2x} \quad (2) \end{cases} \\
 \text{Lấy (2) - (1) ta được } &F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) + F(\pi) - F(0) = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin 2x} - \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1+\sin 2x} \\
 \xleftrightarrow{\text{casio}} &F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1.
 \end{aligned}$$

Câu 15: Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)} = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C_1 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C_3 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 2 \\ f(0) = 1 \\ f(-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{5}\right) + C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \\ \ln 5 + C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 + \ln 5 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -\ln 5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 2 + \ln 5 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + 1 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \ln 5 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P = f(-4) + f(-1) + f(4) = 3 + \ln 3.$$

Câu 16: Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_1 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right) + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 + C_3 - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_1 \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_3 + \frac{1}{3} \ln 10$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 + \frac{1}{3} \ln 10 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(-4) + f(-1) - f(4) &= \left(\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_3 \right) + \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

