

DẠNG 4**Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện**

❖ **Định nghĩa:** Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của khối đa diện đó.

❖ Điều kiện **cần** và **đủ** để khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp: có đáy là một đa giác nội tiếp.

❖ Cách xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

Bước 1: Xác định trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Gọi tất là **trục của đáy** (là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).

Bước 2: Xác định mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hoặc trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên.

Bước 3: Giao điểm của trục của đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (hoặc trục của đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên) là **tâm mặt cầu ngoại tiếp** khối đa diện đó.

❖ Một số công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp

➤ **Công thức 1:** Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}, \text{ trong đó } R_d \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, } h \text{ là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.}$$

➤ **Công thức 2:** Khối tứ diện vuông (có các cạnh đôi một vuông góc):

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$$

➤ **Công thức 3:** Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{a^2}{4}}, \text{ trong đó } R_d \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy; } R_b \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt bên và } a \text{ tương ứng là độ dài đoạn giao tuyến của mặt bên và đáy.}$$

➤ **Công thức 4:** Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau:

$$R = \frac{a^2}{2h}, \text{ trong đó } a \text{ là độ dài cạnh bên và } h \text{ là chiều cao khối chóp và } h \text{ được tính bằng công thức } h = \sqrt{a^2 - R_d^2}.$$

➤ **Công thức 5:** Khối tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}.$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = a$, cạnh $SA = SB = a$ và có $(SBC) \perp (ABC)$. Tính SC để độ dài bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng a .

- A. $SC = a\sqrt{2}$. B. $SC = a\sqrt{3}$. C. $SC = a$. D. $SC = 2a$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

- A. $8\pi a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. $2\pi a^2$. D. $2a^2$.

- Câu 3:** Một hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích hình tròn đáy của hình nón bằng 9π . Tính đường cao h của hình nón.
- A. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $h = 3\sqrt{3}$. C. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $h = \sqrt{3}$.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là
- A. $R = \frac{5}{2}$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{2}$. D. $R = \frac{25}{2}$.
- Câu 5:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = AA' = 2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng
- A. $9\pi a^2$. B. $\frac{3\pi a^2}{4}$. C. $\frac{9\pi a^2}{4}$. D. $3\pi a^2$.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SD và mặt phẳng đáy là 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:
- A. $8\pi a^2$. B. $\frac{8\pi a^2}{3}$. C. $4\pi a^2$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SD và mặt phẳng đáy là 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:
- A. $8\pi a^2$. B. $\frac{8\pi a^2}{3}$. C. $4\pi a^2$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $SA = BC = 3, AB = \sqrt{7}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.
- A. $R = \sqrt{5}$. B. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $R = \frac{5}{2}$. D. $R = 5$.
- Câu 9:** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng
- A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. B. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3), D(1;0;4)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Tọa độ tâm I và bán kính R mặt cầu (S) là
- A. $I(1;0;-2), R = \sqrt{21}$. B. $I(-2;1;0), R = \sqrt{26}$.
C. $I(-1;0;2), R = \sqrt{21}$. D. $I(2;-1;0), R = \sqrt{26}$.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}, SA \perp (ABC), SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \frac{a^3}{9}$.

B. $V = \frac{2a^3}{27}$.

C. $V = \frac{2a^3}{9}$.

D. $V = \frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ có bán kính bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13: Cho khối trụ có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 45π . Diện tích toàn phần của khối trụ là

A. 18π .

B. 33π .

C. 48π .

D. 39π .

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính bằng a . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15: Một mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a . Diện tích mặt cầu (S) là:

A. $\frac{3\pi a^2}{2}$.

B. $6\pi a^2$.

C. $\frac{3\pi a^2}{4}$.

D. $3\pi a^2$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2$, $AC = 4$, $SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R = \frac{25}{2}$.

B. $R = \frac{5}{2}$.

C. $R = 5$.

D. $R = \frac{10}{3}$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{12\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. a .

C. $2\sqrt{3}a$.

D. $a\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = ASC = 90^\circ$, $BSC = 60^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{7\pi a^2}{6}$.

B. $\frac{7\pi a^2}{3}$.

C. $\frac{7\pi a^2}{18}$.

D. $\frac{7\pi a^2}{12}$.

Câu 20: Cho hình trụ (T) có bán kính đáy a , trục OO' bằng $2a$ và mặt cầu (S) có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OO' và đi qua điểm O . Tìm tỉ số giữa diện tích mặt cầu (S) và diện tích toàn phần của hình trụ (T) .

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$; $AC = 4a$; $SA = 5a$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{5a}{4}$. C. $\frac{5a}{2}$. D. $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng

A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, biết $BA = BC = 2a$, cạnh bên $SA = 2a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a .

A. $8\pi a^2$. B. $16\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $64\pi a^2$.

Câu 24: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là.

A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. B. $4\pi a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. $4\pi a^3$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{5a}{2}$. B. $R = \frac{17a}{2}$. C. $R = \frac{13a}{2}$. D. $R = 6a$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$. B. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$. B. $R = \sqrt{2}a$. C. $R = \frac{25a}{8}$. D. $R = 2a$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\pi a^2}{7}$. B. $\frac{7\pi a^2}{12}$. C. $\frac{7\pi a^2}{3}$. D. $\frac{\pi a^2}{7}$.

Câu 30: Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $BAC = 30^\circ$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a .

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$. B. $V = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. D. $V = \frac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 31: Cho hình hộp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{25\pi}{2}a^2$. B. $\frac{125\pi}{4}a^2$. C. $\frac{125\pi}{2}a^2$. D. $4\pi a^2$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. 35π . B. 35 . C. $\frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$. D. $35\sqrt{35}\pi$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB ; SC . Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A , B , C , K , H là

- A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. B. $3\pi a^2$. C. $\frac{4\pi a^2}{3}$. D. $\frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 34: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của AB , M , N lần lượt là hình chiếu của K lên AD và AC . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$?

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $ABCD$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- A. $\frac{475\pi a^2}{3}$. B. $21\pi a^2$. C. $\frac{55\pi a^2}{3}$. D. $22\pi a^2$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

- A. $2\pi a^2$. B. $8\pi a^2$. C. $2a^2$. D. $a^2\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2\sqrt{2}$. Gọi O là tâm mặt cầu đường tròn ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và (OCD) bằng:

- A. $\frac{15}{17}$. B. $\frac{33}{65}$. C. $\frac{8}{17}$. D. $\frac{56}{65}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

- A. $3\pi a^2$. B. $6\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $24\pi a^2$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB SAC lần lượt vuông tại B và C . Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB) .

A. $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}.$

B. $\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ cm}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$

Câu 40: Cho tam giác ABC vuông tại B và nằm trong mặt phẳng (P) có $AB = 2a$, $BC = 2\sqrt{3}a$. Một điểm S thay đổi trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ($S \neq A$). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Biết rằng khi S thay đổi thì 4 điểm A, B, H, K thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R = 2a.$

B. $R = \sqrt{2}a.$

C. $R = a.$

D. $R = \sqrt{3}a.$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , $AB = a, AC = a\sqrt{2}, BAC = 45^\circ$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$.

A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}.$

B. $\pi a^3 \sqrt{2}.$

C. $\frac{4}{3} \pi a^3.$

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}.$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$

B. $R = \frac{a}{3}.$

C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$

D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC , khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3.$

B. $\frac{\pi a^3}{3}.$

C. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}.$

D. $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3} \pi.$

B. $V = \frac{125\sqrt{3}}{6} \pi.$

C. $V = \frac{50\sqrt{3}}{3} \pi.$

D. $V = \frac{500\sqrt{3}}{27} \pi.$

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$, $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 25\pi a^2.$

B. $S = 100\pi a^2.$

C. $S = \frac{100}{3} \pi a^2.$

D. $S = 96\pi a^2.$

Câu 46: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $AOB = 60^\circ$, $BOC = 90^\circ$, $AOC = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm cạnh OB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 47: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ . Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ bằng

A. $V = \frac{125\pi}{6}$.

B. $V = \frac{32\pi}{3}$.

C. $V = \frac{108\pi}{3}$.

D. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BAC = 150^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Câu 50: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng 8 cm và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}$ cm², với M là trung điểm của SC . Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C . Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S) :

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}$ cm.

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

C. $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ cm.

D. $\frac{4\sqrt{39}}{3}$ cm.

Câu 51: Cho mặt cầu $(S): (x-2017)^2 + (y-2018)^2 + (z-2019)^2 = 2020$. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, đáy là đường tròn (C) và có chiều cao h . Gọi V là thể tích của khối nón được tạo nên bởi (N) . Tính giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của V .

A. $V_{\max} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot (\sqrt{2020})^3}{81}$.

B. $V_{\max} = \frac{\pi \cdot 8 \cdot (\sqrt{2020})^3}{81}$.

C. $V_{\max} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot (\sqrt{2020})^3}{81}$.

D. $V_{\max} = \frac{\pi \cdot 64 \cdot (\sqrt{2020})^3}{81}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $ASB = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$.

B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$.

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$.

B. $18\sqrt{18}\pi a^3$.

C. $6\sqrt{18}\pi a^3$.

D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a, BC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{12\pi a^2}{7}$.

B. $\frac{4\pi a^2}{7}$.

C. $\frac{3\pi a^2}{7}$.

D. $\frac{15\pi a^2}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

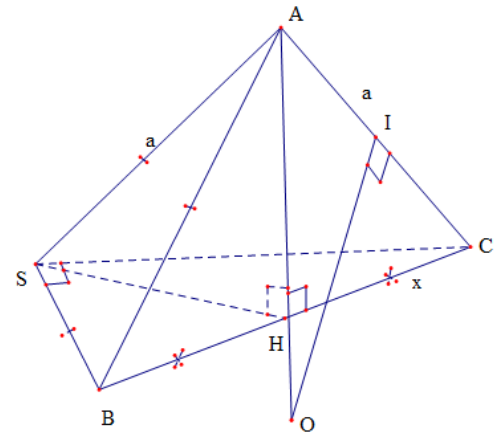
1.A	2.A	3.B	4.A	5.A	6.A	7.A	8.C	9.D	10.B
11.B	12.B	13.C	14.C	15.A	16.B	17.B	18.A	19.B	20.B
21.D	22.D	23.B	24.B	25.C	26.C	27.C	28.C	29.C	30.B
31.B	32.C	33.C	34.D	35.C	36.B	37.B	38.B	39.D	40.A
41.D	42.C	43.D	44.D	45.B	46.C	47.B	48.B	49.B	50.C
51.A	52.B	53.D	54.A						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$
 $\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Mà $SA = AB = AC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SBC \Rightarrow HS = HB = HC \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại S .

Gọi I là trung điểm AC , $O \in AH$, $OI \perp AC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Đặt $HC = x$. Ta có ΔAOI đồng dạng ΔACH .



$$\Rightarrow AO \cdot AH = AI \cdot AC \Rightarrow AO = \frac{AI \cdot AC}{AH} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = R.$$

Lại có $R = a \Rightarrow \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = a \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} = a \Leftrightarrow 4a^2 - 4x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{BC^2 - SB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Câu 2: Chọn A

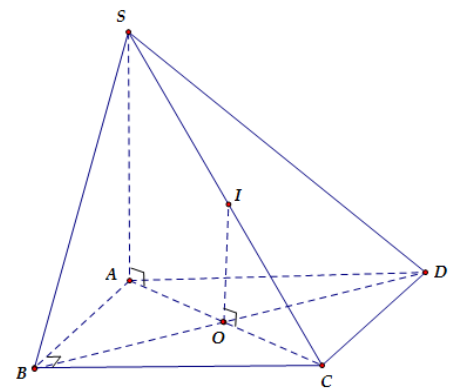
Gọi $O = AC \cap BD$, đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC .

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC . Suy ra $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

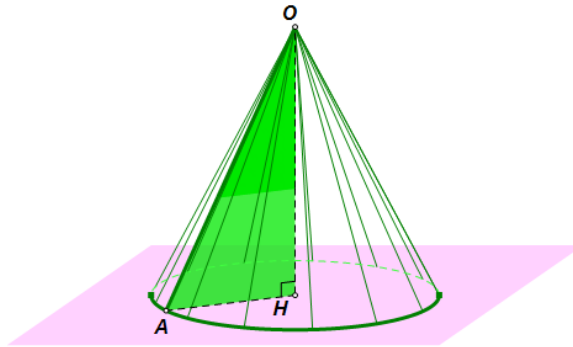
Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.



Gọi chiều cao, bán kính đáy, độ dài đường sinh của hình nón lần lượt là h, r, l .

Hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy nên $l = 2r$.

Diện tích hình tròn đáy của hình nón bằng 9π nên: $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r = 3$.

Suy ra $l = 2r = 6$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác OAH ta được:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - r^2 \Leftrightarrow h^2 = 27 \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}.$$

Vậy chiều cao h của hình nón là $3\sqrt{3}$.

Câu 4: Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA . Do tam giác ABC vuông tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi a là đường thẳng qua M và song song với SA mà $SA \perp (ABC)$ nên $a \perp (ABC)$. Do đó a là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

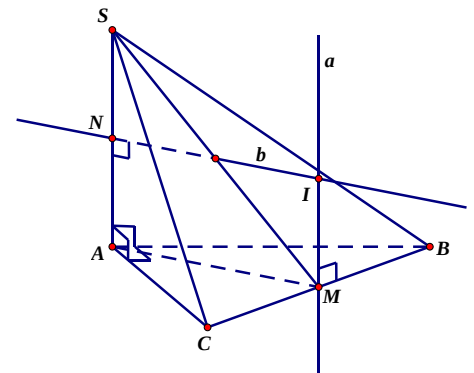
Trong mặt phẳng (SAM) , gọi b là đường trung trực của đoạn thẳng SA , gọi I là giao điểm của a và b .

Ta có $I \in a$ suy ra $IA = IB = IC$. Mặt khác, $I \in b$ suy ra $IA = IS$.

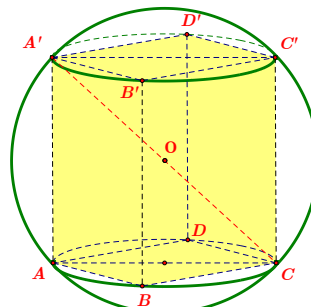
Do đó $IA = IB = IC = IS$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R = IA = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{AS^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{AS^2 + AB^2 + AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{5 + 4 + 16}{4}} = \frac{5}{2}.$$



Câu 5: Chọn A

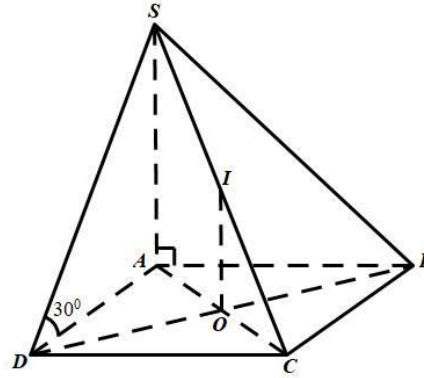


Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là O của hình hộp có bán kính

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $S = 4\pi \left(\frac{3a}{2} \right)^2 = 9\pi a^2$.

Câu 6: Chọn A



Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC . Ta có: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

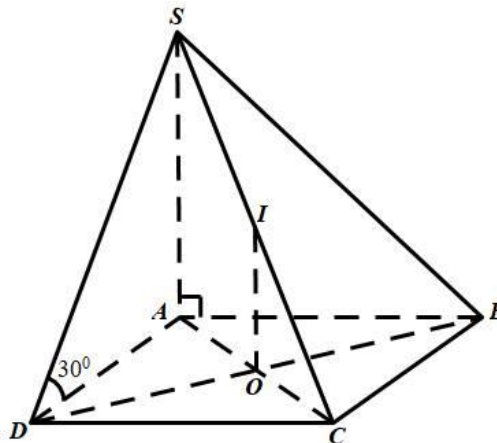
Mà: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow IO$ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow IA = IB = IC = ID$.

Mặt khác $IS = IC$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính

$$R = IS = \frac{SC}{2}. \text{ Tam giác } SAD \text{ vuông tại } A \text{ và } SDA = 30^\circ \Rightarrow \tan SDA = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = a.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{7}; R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}. \text{ Vậy } S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2.$$

Câu 7: Chọn A



Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC . Ta có: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Mà: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow IO$ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow IA = IB = IC = ID$.

Mặt khác $IS = IC$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính

$$R = IS = \frac{SC}{2}. \text{ Tam giác } SAD \text{ vuông tại } A \text{ và } SDA = 30^\circ \Rightarrow \tan SDA = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = a.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{7}; R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}. \text{ Vậy } S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2.$$

Câu 8: Chọn C

Gọi E là trung điểm của AC , do tam giác ABC vuông tại B nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi I và M lần lượt là trung điểm SC và SA , khi đó $AMIE$ là hình chữ nhật

$IE \parallel SA \Rightarrow IE \perp (ABC)$ mà E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , nên $IA = IB = IC$

Lại có $IM \parallel AC \Rightarrow IM \perp SA$ mà M là trung điểm SA nên IM là trục đối xứng của đoạn thẳng SA , nên $IA = IS$

Từ 1,2 $\Rightarrow IA = IS = IB = IC = R$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Xét tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7+9} = 4$.

Xét tam giác vuông IAM có: $R = IA = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{5}{2}$

Cách giải khác:

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow SBC = 90^\circ$

Mà $SAC = 90^\circ$ nên các điểm S, A, B, C thuộc mặt cầu đường kính SC .

Xét tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7+9} = 4$.

Xét tam giác vuông SAC có: $R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{5}{2}$.

Câu 9: Chọn D

Ta có: SA, AB, BC đôi một vuông góc $\Rightarrow SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

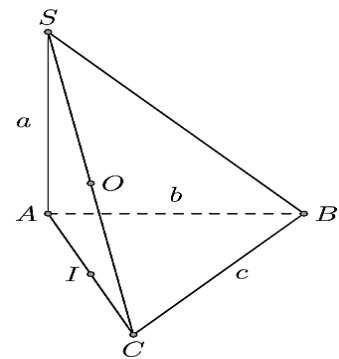
Khi đó bán kính đường tròn tâm I ngoại tiếp $\triangle ABC$:

$$r = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Gọi O là trung điểm $SC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC \Rightarrow OI = \frac{SA}{2}$.

Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

$$R = OC = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2 + c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Câu 10: Chọn B

Giả sử (S) có phương trình dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0) \quad (1).$$

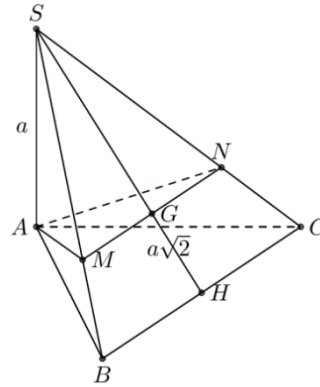
Với tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Vì (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên tọa độ của các điểm A, B, C, D thỏa mãn. Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+4+16-2a-4b+8c+d=0 \\ 1+9+1-2a+6b-2c+d=0 \\ 4+4+9-4a-4b-6c+d=0 \\ 1+0+16-2a+0b-8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-8c-d=21 \\ 2a-6b+2c-d=11 \\ 4a+4b+6c-d=17 \\ 2a-0b+8c-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b-10c=10 \\ 6b+6c=6 \\ 2a+4b-2c=0 \\ 2a-0b+8c-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=0 \\ a=-2 \\ d=-21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(-2; 1; 0), R = \sqrt{26}.$$

Câu 11: Chọn B



Qua G , kẻ đường thẳng song song với BC , cắt SB tại M và cắt SC tại N . Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3}$. Ta có: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3}$.

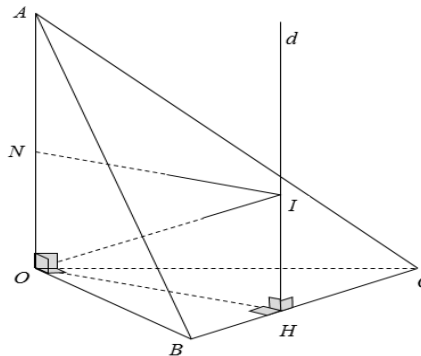
Ta có: $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại B).

$$\text{Có: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{6} a^3.$$

Theo công thức tỉ lệ thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ABC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{2}{27} a^3.$$

Câu 12: Chọn B



Trong (OBC) kẻ đường cao OH . Vì $\triangle OBC$ là tam giác vuông cân nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OBC$ và $OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Qua H dựng đường thẳng d song song với $OA \Rightarrow d \perp (OBC)$. Do đó, d là trục đường tròn của $\triangle OBC$.

Trong $mp(OA, d)$, dựng đường trung trực OA cắt OA tại N , d lần lượt tại N, I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$.

Theo cách dựng ta có tứ giác $OHIN$ là hình chữ nhật nên $NI = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow \text{Bán kính } R = OI = \sqrt{ON^2 + IN^2} = \sqrt{\left(\frac{OA}{2}\right)^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chú ý: Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông $O.ABC$ là

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$$

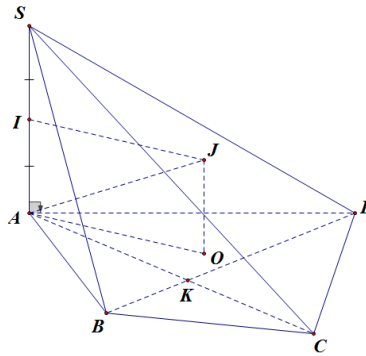
Câu 13: Chọn C

Ta có: $V = \pi R^2 \cdot h = 45\pi$. Suy ra: $R = \sqrt{\frac{45}{5}} = 3$.

Diện tích toàn phần khối trụ: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + 2\pi \cdot 3^2 = 48\pi$.

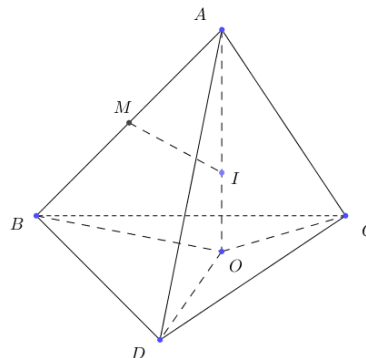
Câu 14: Chọn C

Gọi điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. I là trung điểm SA . J là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



Để thấy $AIJO$ là hình chữ nhật. Do đó $JA = \sqrt{AO^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15:



Chọn A

Vì $A.BCD$ là tứ diện đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nằm trên đường cao AO trong đó O là trọng tâm của tam giác đều BCD .

Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Từ M kẻ đường trung trực MI của đoạn AB cắt AO tại I .

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $A.BCD$

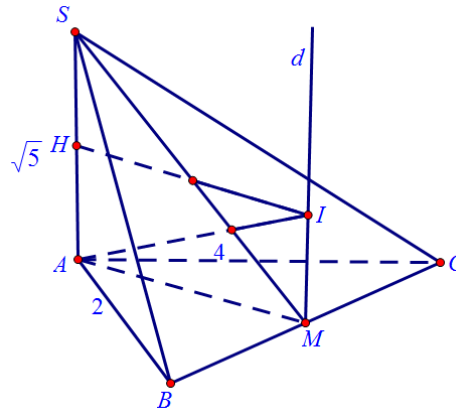
Ta có $MI \perp AB$ nên hai tam giác vuông IMA và BOA đồng dạng. Từ đó suy ra:

$$\frac{IA}{BA} = \frac{MA}{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{OA} \Leftrightarrow IA = R = \frac{AB^2}{2 \cdot AO}$$

$$\text{Ta có } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow R = IA = \frac{AB^2}{2AO} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu } (S) \text{ là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Câu 16: Chọn B

**Cách 1.**

Gọi M, H lần lượt là trung điểm BC, SA .

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA , cắt d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC.$$

$$\bullet \begin{cases} HA \perp (ABC) \\ IM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA \perp AM \\ HA \parallel IM \end{cases}; \begin{cases} HI \perp SA \\ AM \perp SA \\ HI, SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow HI \parallel AM.$$

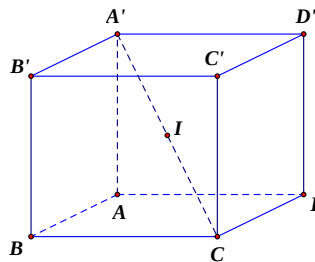
Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có } AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5}, \quad IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là: } R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$

$$\text{Áp dụng công thức trên, ta có } R = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2 + 4^2} = \frac{5}{2}.$$

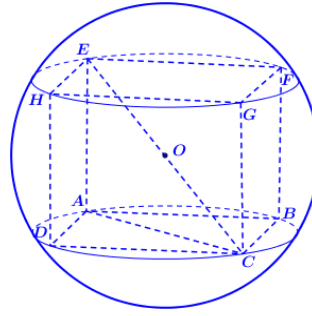
Câu 17: Chọn B

Gọi I là trung điểm $A'C \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = CI = \frac{1}{2}CA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Câu 18: Chọn A



Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.EFGH$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.EFGH$ là:

$$R = OC = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{EA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{EA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 19: Chọn B

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC).$

Gọi G là trọng tâm tam giác đều SBC , suy ra $SG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với. Suy ra d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ là giao điểm của mặt phẳng trung trực đoạn SA và d .

$$R = SI = \sqrt{SE^2 + SG^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}.$$

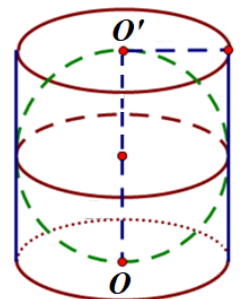
Câu 20: Chọn B

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{(T)} = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot 2a = 6\pi a^2$.

Diện tích mặt cầu là $S_{(S)} = 4\pi \left(\frac{OO'}{2}\right)^2 = 4\pi a^2$.

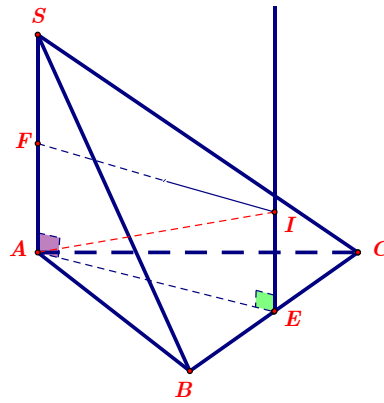
Tỉ số giữa diện tích mặt cầu (S) và diện tích toàn phần của hình trụ (T) là

$$\frac{S_{(S)}}{S_{(T)}} = \frac{4\pi a^2}{6\pi a^2} = \frac{2}{3}.$$



Câu 21: Chọn D

Cách 1:



Gọi E là trung điểm của BC . Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Qua E dựng đường thẳng d song song với SA , vì $SA \perp (ABC)$ nên d là trục của $\triangle ABC$. Trong mặt phẳng $(SA; d)$, dựng đường trung trực của SA cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ vì $I \in d \Rightarrow IA = IB = IC$, mặt khác I thuộc trung trực của SA nên $IS = IA$.

Gọi F là trung điểm của SA . Trong mặt phẳng $(SA; d)$ có $AE \perp SA$, $FI \perp SA$ nên $FI \parallel AE$ lại có $EI \parallel AF$ nên tứ giác $AFIE$ là hình chữ nhật. Vậy $AI = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC, SA \perp BC, SA \perp CD$.

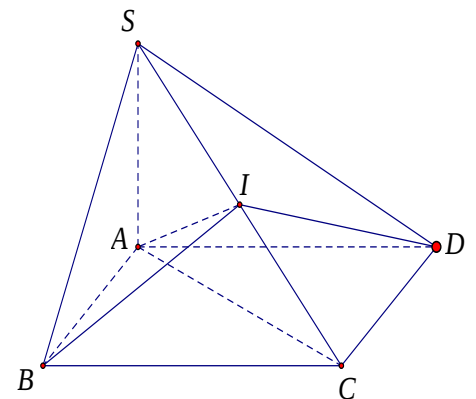
Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$. Tam giác SAC vuông tại A nên

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB;$$

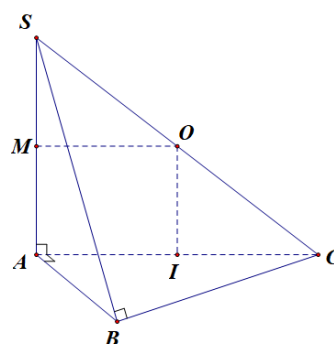
$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$



Gọi I là trung điểm của SC . Vì $\triangle SBC, \triangle SAC, \triangle SDC$ là các tam giác vuông có cạnh huyền là SC nên $IS = IC = IA = IB = ID = \frac{SC}{2}$.

Do đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Chọn B



Cách 1.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , do tam giác ABC vuông tại B nên I là trung điểm của AC . Qua I dựng đường thẳng d vuông góc với (ABC) . Suy ra $d \parallel SA$.

Trong tam giác SAC , dựng đường trung trực của SA cắt d tại O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Ta tính được $AC = 2a\sqrt{2}$, $SC = 4a$

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = OA = \sqrt{OI^2 + OM^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp } S.ABC \text{ là } S = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2.$$

Cách 2.

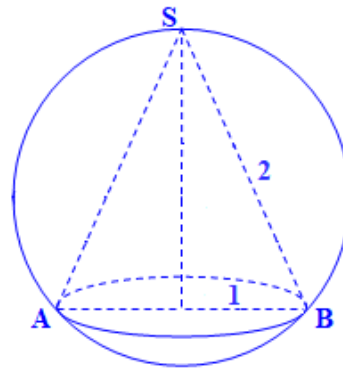
Ta có $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$. Ta có $SAC = SBC = 90^\circ$.

Khi đó 4 điểm S, A, B, C nằm trên mặt cầu đường kính SC .

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = \frac{SC}{2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2.$$

Câu 24: Chọn B

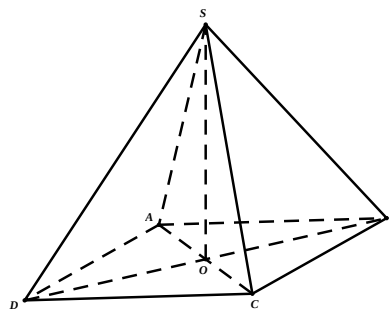


Hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2 $\Rightarrow$ Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều có cạnh bằng 2 và bán kính mặt cầu ngoại tiếp bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

Gọi R là bán kính mặt cầu, theo định lý sin trong tam giác SAB , ta có: $\frac{AB}{\sin S} = 2R$.

$$\Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin S} = \frac{2}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 25: Chọn C



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Ta có $ABC = 90^\circ$, $ADC = 90^\circ$ và $ASC = 90^\circ$ suy ra các đỉnh B, D, S cùng nhìn đoạn thẳng AC dưới một góc vuông nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ và $R = OA = \frac{AC}{2} = a$.

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Câu 26: Chọn C

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$. Vì $SA \perp AC$ nên

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$$

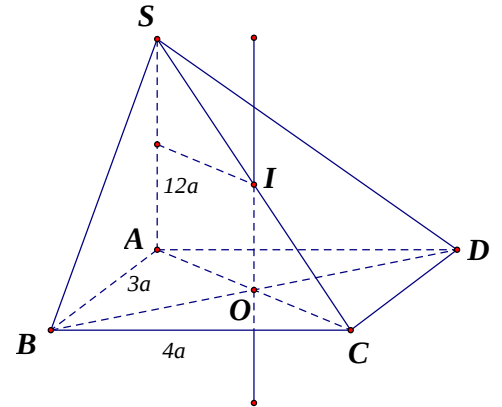
Nhận thấy: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Tương tự:

$$CD \perp SD$$

Do các điểm A, B, D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới

một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình

chóp $S.ABCD$. Vậy $R = \frac{SC}{2} = \frac{13a}{2}$.



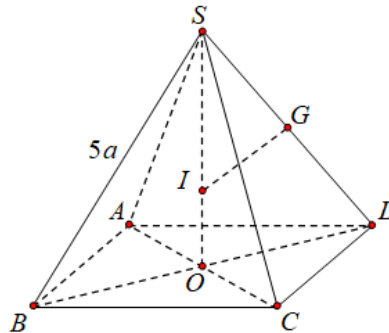
Câu 27: Chọn C

Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lý Pitago, ta được $BD = 5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lý Pitago, ta được $AD = 5a\sqrt{2}$.

Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD . Bán kính mặt cầu này là: $R = \frac{AD}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28: Chọn C



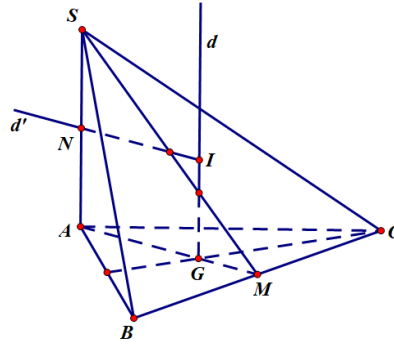
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD , $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

Ta có $\triangle SOD \sim \triangle SGI$, suy ra $\frac{SO}{SG} = \frac{SD}{SI} \Rightarrow 4a \cdot R = \frac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \frac{25a}{8}$.

Câu 29: Chọn C



Đáy ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm G .

Từ G kẻ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng đáy $\Rightarrow d \perp SA$ và đường thẳng d là trục của tam giác đáy.

Trong mặt phẳng (SAG) kẻ d' là đường trung trực của đoạn SA .

Trong mặt phẳng (SAG) hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại $I \Rightarrow I$ cách đều 4 đỉnh S, A, B, C của hình chóp $\Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với $R = AI$.

Tính bán kính R :

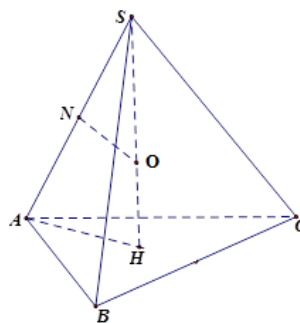
$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$N \text{ là trung điểm } SA \Rightarrow AN = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} = GI.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AIG : AI = \sqrt{AG^2 + GI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6} = R.$$

$$\text{Vậy diện tích của mặt cầu cần tìm là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$$

Câu 30: Chọn B



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\angle SAH = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA , mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O . Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ là } AH = \frac{BC}{2\sin 30^\circ} = a.$$

$$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a.$$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 33: Chọn C

Gọi OH là đường kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có $OH \perp BC$.

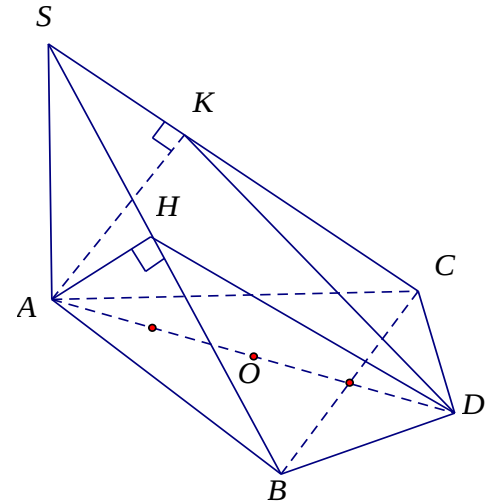
Từ đó suy ra $OH \perp AD$.

Chứng minh tương tự ta được $OH \perp AC$.

Từ đó, ta suy ra 5 điểm A, B, C, D, O cùng nằm trên mặt cầu đường kính AD .

Gọi O là trung điểm của AD , ta có $OH \perp AD$.

Vậy diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, D, O là 4π .



Câu 34: Chọn D

Tứ diện $ABCD$ đều, có độ dài cạnh là 1.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $AK \perp BC$. Gọi E là trung điểm của AK , suy ra $EN \perp AC$, suy ra $EN \perp BC$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . $EO \perp BC$.

Ta tính được $EO = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Dựng đường thẳng d đi qua E , vuông góc với BC .

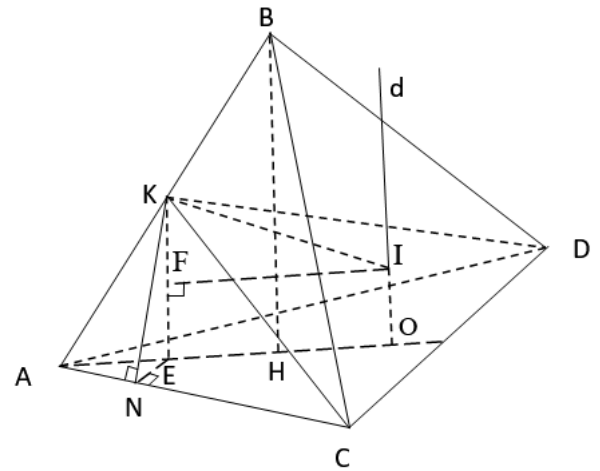
Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $ABCD$, suy ra $IO \perp BC$.

Ta tính được: $IO = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $EO = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $EO \perp IO$.

Đặt $IK = x$, ta có

$IK^2 = IO^2 + KO^2$.

Mà $IK = x$, nên $x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$, suy ra $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $IK = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Câu 35: Chọn C

Hình chóp này có mặt bên vuông góc với mặt đáy. Nên ta có công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $R = \frac{a}{2}$, với a là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp, a là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Ta có: Do $\angle SBA = 90^\circ$ và $\angle SCA = 90^\circ$ nên $SA \perp BC$.

Trong $\triangle SBC$, vuông tại S , ta có $SH \perp BC$.

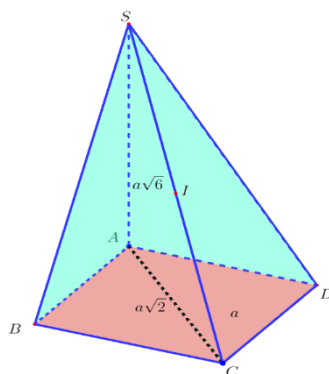
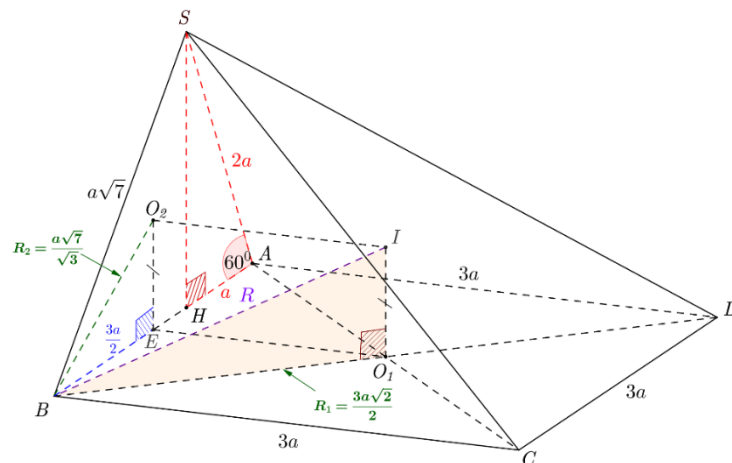
SH là đường cao của $\triangle SBC$.

SH là đường cao của $\triangle SBC$.

Vậy SH là đường cao của $\triangle SBC$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp là: $S = 4\pi R^2$.

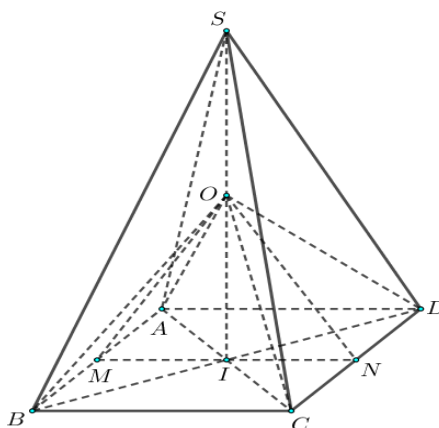
Câu 36: Chọn B



Dễ thấy các góc $\angle SBA = 90^\circ$, $\angle SCA = 90^\circ$, $\angle SBC = 90^\circ$ đều bằng 90° nên mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ có tâm là trung điểm O của BC và có bán kính $R = \frac{BC}{2}$ nên diện tích của mặt cầu là:

$S = 4\pi R^2$.

Câu 37: Chọn B



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên O là giao điểm của AC và BD trung trực cạnh bên AD .

Khi đó AD đi qua O và song song với BC .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .

Ta có $OM = ON$. Suy ra $OM \perp MN$.

Mà: $OM \perp AD$.

Xét hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2 . Bán kính đáy hình vuông $ABCD$ là OM .

Xét tam giác vuông SAI , ta có $SA = \sqrt{AI^2 + SI^2} = \sqrt{1 + 8} = 3$.

Do đó cạnh bên hình chóp bằng 3 .

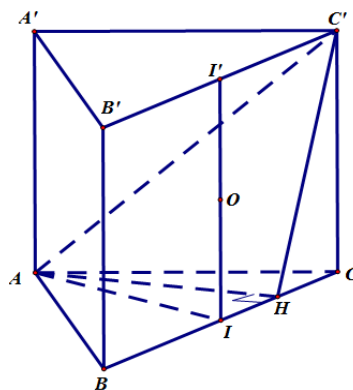
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $R = \frac{SA^2}{2.SI} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$.

Khi đó $OM = ON = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{162}{64} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{130}}{8}$, $MN = BC = \sqrt{2}$.

Từ đó suy ra $\cos \angle MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2.OM.ON} = \frac{2 \cdot \frac{130}{64} - 2}{2 \cdot \frac{130}{64}} = \frac{33}{65}$.

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và (OCD) bằng $\frac{33}{65}$.

Câu 38: Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow \angle (AC', (BCC'B')) = \angle HCA = 30^\circ$.

ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ suy ra $AC = a$.

Ta có: $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC' = 2AH = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$. Dễ thấy I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

$$\text{Bán kính mặt cầu là : } R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 39: Chọn D

Cách 1: Vì $SBA = SCA = 90^\circ$ suy ra trung điểm I của cạnh SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với bán kính $R = \frac{SA}{2}$.

$$\text{Thể tích khối cầu là } V = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{5}.$$

Gọi O là trung điểm BC , điểm D đối xứng với A qua O nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật.

Dễ thấy $CD \perp SB$, $CD \perp DB \Rightarrow CD \perp SD$ (1).

$SC \perp DB$, $CD \perp DB \Rightarrow DB \perp SD$ (2).

Từ

$$\Rightarrow SD \perp (ABDC) \Rightarrow SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{5 - 4} = 1.$$

Gọi H là chân đường vuông góc của D lên cạnh SB .

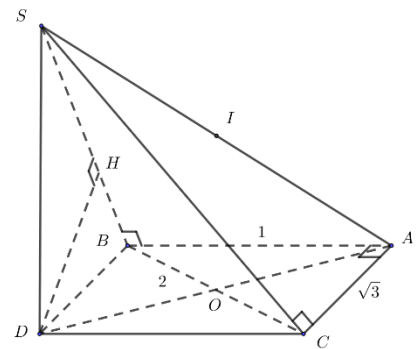
$$d(C, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DH.$$

Thật vậy $AB \perp BD$; $AB \perp SD \Rightarrow AB \perp (SDB)$

$$\Rightarrow AB \perp DH; DH \perp SB \Rightarrow DH \perp (SAB).$$

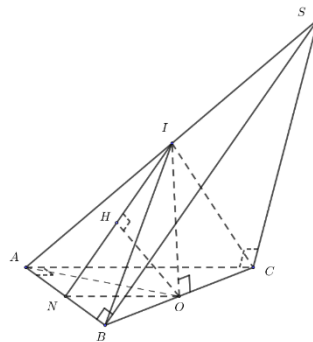
$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow DH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



Cách 2: Vì $SBA = SCA = 90^\circ$ suy ra trung điểm I của cạnh SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với bán kính $R = \frac{SA}{2}$.

$$\text{Thể tích khối cầu là } V = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{5}.$$



Gọi O là trung điểm BC , vì $\triangle BIC$ cân nên $OI \perp BC$; $OI = \sqrt{IC^2 - OC^2} = \frac{1}{2}$.

Mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow OI \perp (ABC) \Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(O, (ABI))$.

Gọi N là trung điểm AB nên $ON \perp AB$, $OI \perp AB \Rightarrow AB \perp (ONI)$.

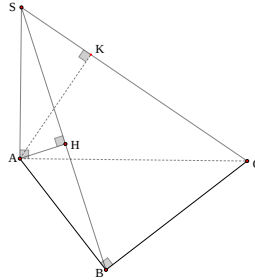
$\Rightarrow (ABI) \perp (ONI)$ theo giao tuyến IN .

Kẻ $OH \perp IN \Rightarrow OH \perp (ABI) \Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(O, (ABI)) = 2OH$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

Câu 40: Chọn A



Ta có: $SA \perp BC$ (Vì $SA \perp (ABC)$) và $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Ta lại có: $AH \subset (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Và $AH \perp SB$.

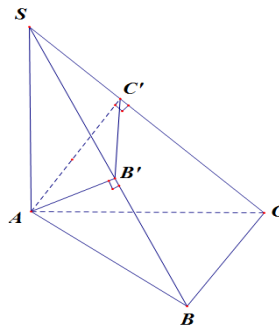
Từ và suy ra $AH \perp (SBC)$. Khi đó $\triangle AHC$ vuông tại H .

Lại có $\triangle AKC$ vuông tại K và $\triangle ABC$ vuông tại B .

Suy ra B, H, K đều nhìn AC dưới góc vuông. Vậy bốn điểm A, B, H, K đều thuộc mặt cầu

đường kính AC . Trong tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 2a$.

Câu 41: Chọn D



Tam giác ABC có $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \angle BAC = 45^\circ \Rightarrow BC = a$ suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B . Vậy điểm B nhìn AC dưới một góc vuông.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ AB' \perp SB \\ SB \cap BC = B \\ SB \subset (BCC'B'), BC \subset (BCC'B') \end{array} \right\} \Rightarrow AB' \perp (BCC'B') \Rightarrow AB' \perp B'C.$$

Suy ra B' nhìn AC dưới một góc vuông.

Do $AC' \perp SC$ nên C' nhìn AC dưới một góc vuông.

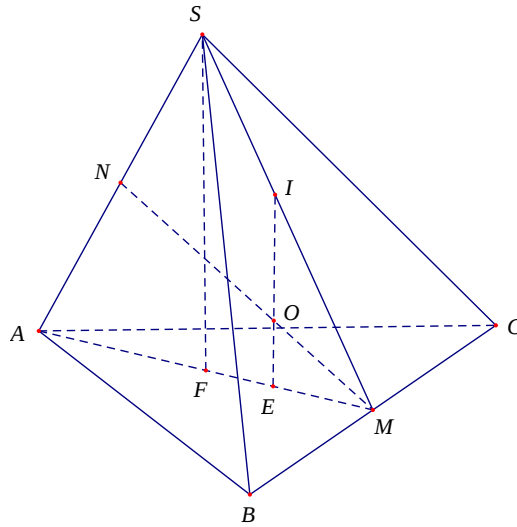
Từ,, và suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là mặt cầu đường kính AC .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là: $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 42: Chọn D

Cách 1:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD .

Ta có: $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AM = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \triangle SAM$ là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi F là trung điểm của $AM \Rightarrow SF \perp AM$ (1). Mặt khác $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AM \perp BC$.

$\triangle SBC$ đều $\Rightarrow SM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SF$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SF \perp (ABC)$.

Gọi E là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Qua E kẻ đường thẳng (d) vuông góc với $mp(ABC)$

$\Rightarrow (d)$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Vì $SF \perp (ABC) \Rightarrow (d) \parallel SF$.

Mặt khác $\triangle SAM$ đều nên đường thẳng MN là đường trung trực đoạn SA .

Trong $mp(SAM)$, gọi $O = (d) \cap MN$; $O \in (d) \Rightarrow OA = OB = OC$.

$O \in MN \Rightarrow OS = OA$.

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = OA = \sqrt{OE^2 + EA^2}$.

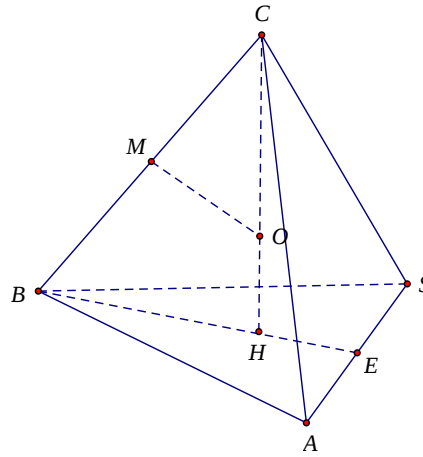
Trong $\triangle ABC$: $AE = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $EM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\triangle SAM$ đều $\Rightarrow MN$ là đường phân giác trong góc $SMA \Rightarrow OME = 30^\circ$.

Xét $\triangle OME$ vuông tại E : $\tan 30^\circ = \frac{OE}{EM} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$.

Vậy $R = \sqrt{OE^2 + EA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Cách 2:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , E là trung điểm của SA .
 $\triangle SAB$ cân tại B nên $H \in BE$. Vì $CA = CB = CS = a$ nên $CH \perp (SAB)$.
 $\Rightarrow$ Đường thẳng CH là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.
 Gọi M là trung điểm của CB , qua M dựng đường thẳng (d) vuông góc với BC .
 $(d) \cap CH = O; O \in (d) \Rightarrow OB = OC$.
 $+ O \in CH \Rightarrow OS = OA = OB$.
 Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$, bán kính $R = OC$.

$$\text{Ta có } \triangle CMO \sim \triangle CHB \Rightarrow \frac{CM}{CH} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow CO = \frac{CM \cdot CB}{CH} = \frac{CB^2}{2 \cdot CH}.$$

$$\text{Xét } \triangle SBE \text{ ta có: } BE = \sqrt{SB^2 - SE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} BE \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}.$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp } \triangle SAB \text{ là: } BH = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot S_{\triangle SAB}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Xét } \triangle CHB \text{ ta có: } CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Vậy } R = CO = \frac{CB^2}{2 \cdot CH} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{3a}{\sqrt{13}}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

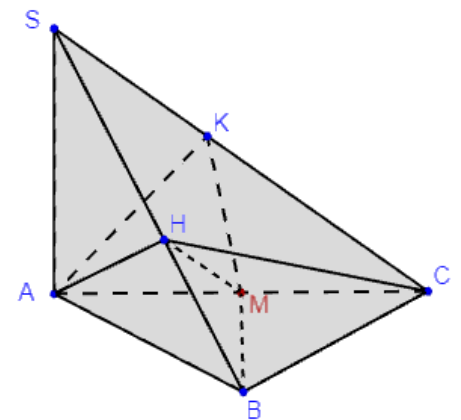
Câu 43: Chọn D

Gọi M là trung điểm BC .

$$\triangle ABC \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow MB = MA = MC = \frac{1}{2} AC.$$

$$\triangle KAC \text{ vuông tại } K \Rightarrow MK = \frac{1}{2} AC.$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad \left. \begin{array}{l} \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC.$$



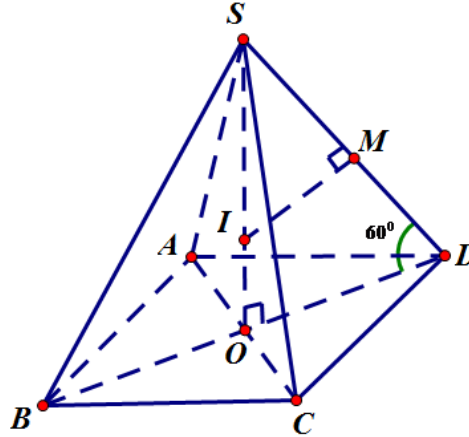
$$\Rightarrow \triangle AHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow MH = \frac{1}{2} AC.$$

Từ (1) $\rightarrow$ (3) $\Rightarrow M$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

$$\text{Bán kính khối cầu cần tìm: } R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối cầu: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Câu 44: Chọn D



Gọi O là tâm đáy, do các cạnh bên cùng tạo với đáy góc 60° nên $SO \perp (ABCD)$.

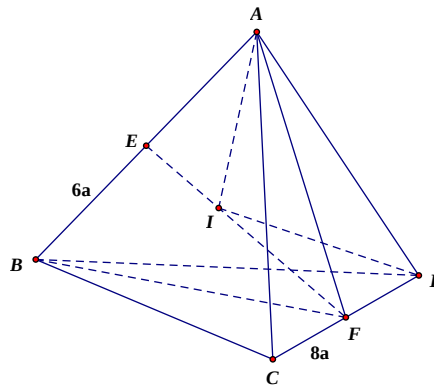
Mặt phẳng trung trực của cạnh SD đi qua trung điểm M của SD và cắt SO tại I .

Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính mặt cầu $R = IS$.

$$BD = 5 \Rightarrow OD = \frac{5}{2} \Rightarrow SD = \frac{OD}{\cos 60^\circ} = 5 \Rightarrow SM = \frac{5}{2}; IS = \frac{SM}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = R.$$

$$\text{Thể tích khối cầu tương ứng ngoại tiếp hình chóp bằng } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27} \pi.$$

Câu 45: Chọn B



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD . Coi $a = 1$, từ giả thiết ta có $AC = AD = BC = BD = \sqrt{74}$ nên $AF \perp CD, BF \perp CD \Rightarrow (ABF) \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$. Chứng minh tương tự $EF \perp AB$.

Khi đó EF là đường trung trực của CD và AB . Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA = IB = IC = ID = R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF .

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - DF^2 - AE^2} = \sqrt{74 - 16 - 9} = 7.$$

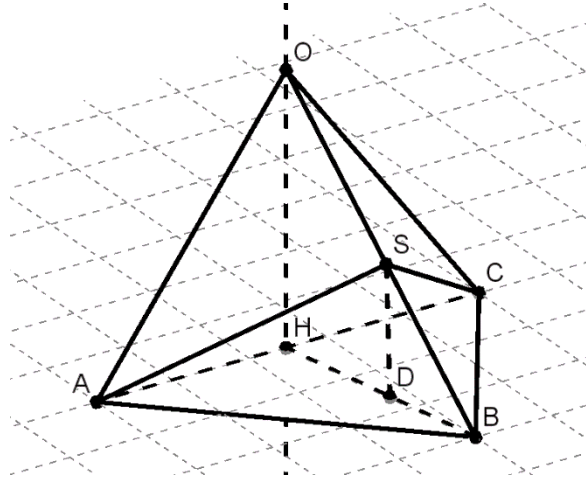
$$\text{Đặt } EI = x \Rightarrow FI = 7 - x; \begin{cases} IA = \sqrt{EA^2 + EI^2} = \sqrt{x^2 + 9} \\ ID = \sqrt{FI^2 + FD^2} = \sqrt{16 + (7 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } IA = ID \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \Leftrightarrow 9 = -14x + 65 \Leftrightarrow x = 4$$

Khi đó $IA = \sqrt{x^2 + 9} = 5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = 5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25a^2 = 100\pi a^2$.

Câu 46: Chọn C



Xét $\triangle AOB$ đều nên cạnh $AB = a$.

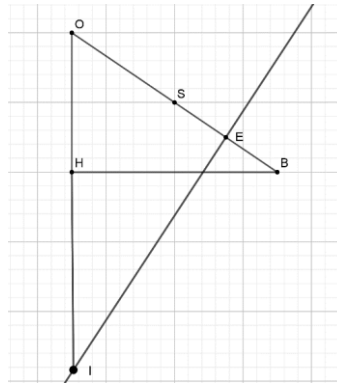
Xét $\triangle BOC$ vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AOC$ có $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2 - 2 \cdot AO \cdot CO \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm H của cạnh AC.

Lại có hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$.

Xét hình chóp $S.ABC$ có OH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy, trong tam giác OHB kẻ trung trực của cạnh SB cắt OH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IS$.



Xét $\triangle OHB$ có $HOB = 60^\circ$, cạnh $OB = a \Rightarrow OE = \frac{3a}{4} \Rightarrow IE = OE \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle IES$ vuông tại E: $IS = \sqrt{IE^2 + ES^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 47: Chọn B

$$\begin{aligned} & \text{Có } \begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \perp (Q) \\ CA \perp \Delta, CA \subset (P) \end{cases} \Rightarrow CA \perp (Q) \Rightarrow CA \perp AD \text{ nên } A \text{ nhìn } DC \text{ dưới một góc vuông.} \\ & \text{Có } \begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \perp (Q) \\ DB \perp \Delta, DB \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow DB \perp (P) \Rightarrow DB \perp BC \text{ nên } B \text{ nhìn } DC \text{ dưới một góc vuông.} \\ & \text{Do đó, đường kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ là } DC. \\ & \text{Có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; \quad DC = \sqrt{BC^2 + DB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}. \\ & \text{Vậy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ là: } R = \frac{1}{2}DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 48: Chọn B

Mặt phẳng (α) là mặt phẳng $(AMNP)$.

$$\begin{aligned} & \text{Do } \begin{cases} SC \perp (\alpha) \\ AM, AN, AP \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AM \perp SC, AN \perp SC, AP \perp SC. \\ & \text{Có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM. \\ & \text{Từ đó ta có } \begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp SC \\ BC, SC \subset (SBC) \\ BC \cap SC = C \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC. \\ & \text{Tương tự ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \\ AD, SA \subset (SAD) \\ AD \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP. \\ & \text{Khi đó } \begin{cases} AP \perp CD \\ AP \perp SC \\ CD, SC \subset (SCD) \\ CD \cap SC = C \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PC. \end{aligned}$$

Nhận xét: $\triangle AMC, \triangle ANC, \triangle APC$ là những tam giác vuông có cạnh huyền AC .

Nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là trung điểm O của AC .

$$\Rightarrow R = OA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 2. \text{ Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

Câu 49: Chọn B.

Trong mp (ABC) , gọi Δ và Δ' lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AB và AC .

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ' .

Vì $\begin{cases} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp SA \end{cases}$ nên $\Delta \perp (AMB)$, mà tam giác AMB vuông tại M suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB .

Có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IM$

Chúng minh tương tự ta được Δ' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC .

Do đó $IA = IN = IC$

Từ và suy ra $IA = IB = IM = IN = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BC.NM$ với bán kính $R = IA$.

Mặt khác trong tam giác ABC , I là giao điểm của hai đường trung trực nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = IA = \frac{BC}{2 \sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC}}{2 \sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp } A.BC.NM : V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}.$$

Cách 2.

Dựng AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Khi đó $ABD = ACD = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB), AM \subset (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp MB \Rightarrow AM \perp (MBD) \Rightarrow AM \perp MD$ hay $AMD = 90^\circ$.

Chúng minh tương tự: $AND = 90^\circ$.

Hình chóp $A.BC.NM$ có các đỉnh cùng nhìn đoạn AD dưới một góc vuông nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BC.NM$ có đường kính là AD .

Vì vậy, bán kính của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BC.NM$ là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = \frac{BC}{2 \sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC}}{2 \sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp } A.BC.NM : V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}.$$

Câu 50: Chọn C

Gọi H là trung điểm cạnh AB , ta có: $CH \perp AB$.

Ta có: $d(S, (ABC)) = 2d(M, (ABC)) \Rightarrow V_{SABC} = 2V_{MABC}$.

$$\text{Mà } V_{MABC} = V_{CMAB} = \frac{1}{3} S_{\Delta MAB} \cdot d(C, (MAB)) = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot d(C, (MAB)) \leq \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot CH.$$

Do đó, $V_{S.ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $d(C; (MAB)) = CH$ hay $CH \perp (MAB)$.

Gọi J , O lần lượt là tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC .

Dựng hai trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC cắt nhau tại I . Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại đi qua 4 điểm A, B, C, M và bán kính mặt cầu đi qua

$$\text{bốn điểm } A, B, C, M \text{ là } R = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + JH^2}.$$

$$\text{Do } S_{\Delta MAB} = 16\sqrt{3}, AB = 8 \Rightarrow d(M, AB) = 4\sqrt{3}.$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $H(0;0;0), A(-4;0), B(4;0), M(a;4\sqrt{3})$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AM đi qua điểm $N\left(\frac{a-4}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{AM} = (a+4; 4\sqrt{3}) \text{ nên có phương trình là } (a+4)\left(x - \frac{a-4}{2}\right) + 4\sqrt{3}(y - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow J\left(0; \frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\right) \Rightarrow JH = \frac{a^2+32}{8\sqrt{3}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ Do đó } R_{\min} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 51: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2017; 2018; 2019)$ và bán kính $R = \sqrt{2020}$.

Gọi S là đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Trường hợp 1: Xét trường hợp $SH \leq R$.

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SH = R$. Lúc đó $V = \frac{\pi(\sqrt{2020})^3}{3}$.

Trường hợp 2: $(SH > R)$ I nằm trong tam giác SAB như hình vẽ trên.

Đặt $IH = x (0 < x < R)$. Ta có $V = \frac{1}{3}\pi HA^2 \cdot SH = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x)$

$$= \frac{\pi}{6}(2R - 2x)(R + x)(R + x) \leq \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{32\pi(\sqrt{2020})^3}{81}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{R}{3} = \frac{\sqrt{2020}}{3}.$$

Câu 52: Chọn B

Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ và tam giác SAB . M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật.

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

$$\text{Ta có: } R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\text{Áp dụng định lý Pytago: } IA^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } SAB: R_b = \frac{AB}{2 \sin ASB} = \frac{a}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó: } R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{13}{3}\pi a^2.$$

Nhận xét:

Xét hình chóp đỉnh S , có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d , bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b . Khi đó hình

$$\text{chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính } R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

Câu 53: Chọn D

Ta ghép hình chóp $S.ABC$ vào hình hộp đứng $SRQP.DABC$. Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đứng chính là tâm của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ABC là tam giác vuông cân tại B nên đáy của hình hộp đứng là hình vuông.

$$d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2a\sqrt{3} \Rightarrow OH = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } OIK \text{ có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow OI = 3a.$$

$$\text{Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2}.$$

$$\Leftrightarrow OI = \sqrt{9a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}3a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{18}.$$

$$\text{Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{18})^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3.$$

Câu 54: Chọn A

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow SH \perp (ABC); I \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow HI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$AC = 2AH = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Gọi r_b, r_d lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAC, ABC

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SH.AC = \frac{a^2\sqrt{35}}{12} \Rightarrow r_b = \frac{SA.SC.AC}{4S_{\Delta SAC}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Theo công thức Hê-rông: } S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow r_d = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \text{ Vậy: } S_{mc} = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2 = \frac{12\pi a^2}{7}$$

