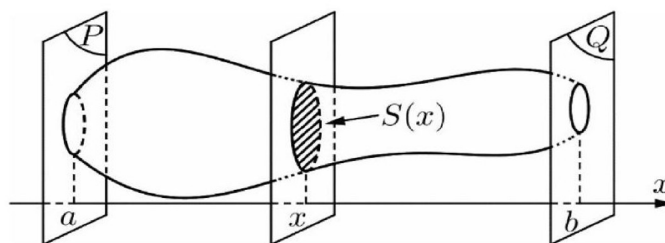


BÀI 9. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY TÍNH THEO MẶT CẮT

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

■ Thể tích vật thể:

Cắt một vật thể V bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt V theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Người ta chứng minh đ c rằng thể tích V của phần vật thể V giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức $V = \int_a^b S(x) dx$.

Một số Câu toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi

mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại đi m có hoành đ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{\sin x})^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cdot \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}$$

Câu 2: Cho vật thể (T) được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=-2$ và $x=2$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông với góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-2; 2]$) là một hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x^2}$. Thể tích vật (T) bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$V_{(T)} = \int_{-2}^2 S(x) dx = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{32}{3}$$

Ta có

Câu 3: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

Ta có
$$V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{\sin x})^2 dx = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$$

Câu 4: Xét vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (-1 \leq x \leq 1)$ là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể (T) bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$V = \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-x^2})^2 dx = \frac{16}{3}$$

Câu 5: Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx$$

Ta có:

Đặt $t = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow t^2 = 9-x^2 \Rightarrow -t dt = x dx$

Đổi cận:

x	0	3
t	3	0

$$V = \int_3^0 2t \cdot (-t dt) = \int_0^3 2t^2 dt = 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^3 = 18$$

Khi đó:

Câu 6: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai đường thẳng $x=1$ và $x=3$ biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(1 \leq x \leq 3)$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x}$.

Lời giải

Thể tích vật thể tính theo công thức: $V = \int_1^3 S(x) dx$, với $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể.

Do thiết diện của vật thể là hình vuông có cạnh là $\sqrt{4-x}$ nên $S(x) = 4-x$
 $\Rightarrow V = \int_1^3 (4-x) dx = 4$

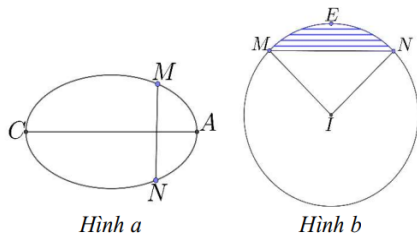
Câu 7: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=1$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(1 \leq x \leq 3)$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3-x}$.

Lời giải

$$V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 (\sqrt{3-x})^2 dx = \int_1^3 (3-x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = 2$$

Theo giả thiết, ta có

Câu 8: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng bao nhiêu?



Lời giải

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi - 3}{6}$$

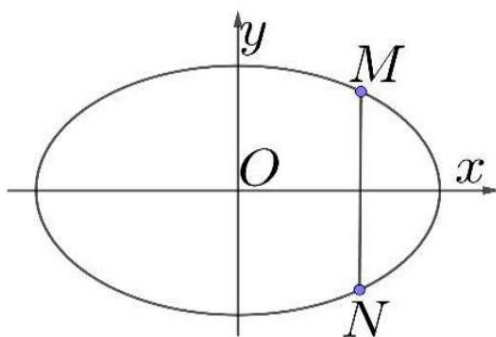
Thể tích vật thể B là:

Câu 9: Sân vận động Sports Hub (Singapore) là nơi diễn ra lễ khai mạc đại hội thể thao Đông Nam

(E) Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt (E) tại M và N (hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình b) với MN là dây cung và $\angle MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và vật liệu làm mái che không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Phương trình chính tắc elip (E) là: $\frac{x^2}{45^2} + \frac{y^2}{75^2} = 1$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \cdot 45^2 \Rightarrow MN = 2\sqrt{45^2 - \frac{45^2}{75^2}x^2}$$

Từ đó, suy ra

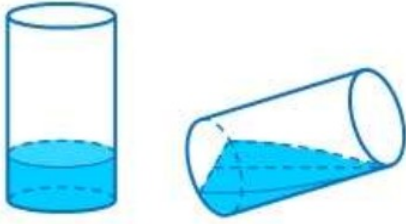
Diện tích thiết diện là:

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(45^2 - \frac{45^2}{75^2}x^2\right)$$

$$V = \int_{-75}^{75} S(x) dx = \int_{-75}^{75} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(45^2 - \frac{45^2}{75^2}x^2\right) dx \approx 115586 \text{ (m}^3\text{)}$$

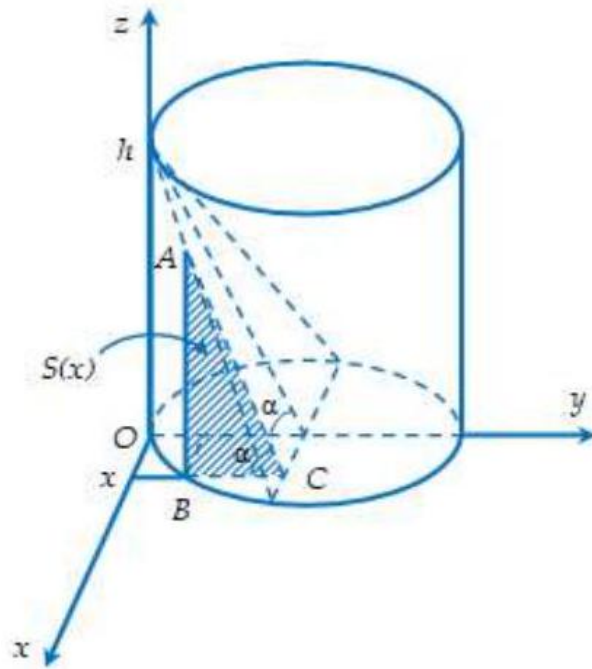
Thể tích cần tính là:

Câu 10: Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải

Đặt $R = 6 \text{ (cm)}, h = 10 \text{ (cm)}$. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm $x \text{ } (-6 \leq x \leq 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có
$$S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} BC^2 \tan \alpha$$

$$= \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \frac{h}{R} = \frac{5(36 - x^2)}{6}$$

$$V = \int_{-6}^6 S(x) dx = \int_{-6}^6 \frac{5(36 - x^2)}{6} dx = 240 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là

