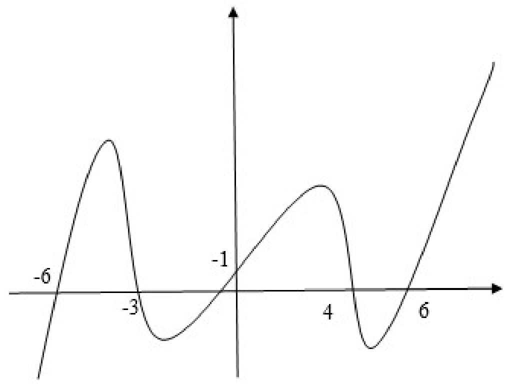
ĐỀ VDC SỐ 07 Bài toán truy tìm hàm ngược

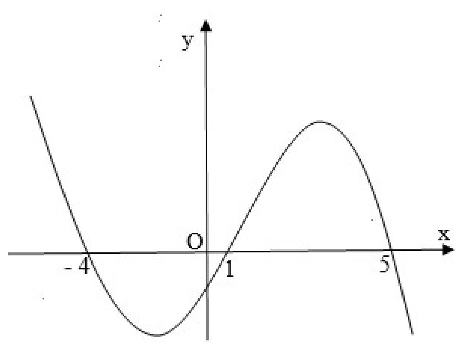
Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(3-x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(1+2x\right)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-2021;2021\right]$ để hàm số $y=f\left(-\left|x\right|^2+2\left|x\right|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị

A. Không có giá trị nào. **B.** 5 giá trị. **C.** 6 giá trị. **D.** 7 giá trị.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^3-x\right)$

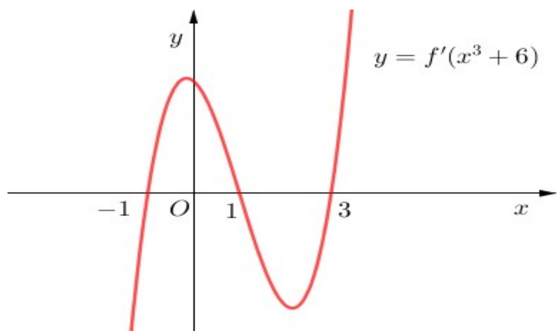
có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $h(x)=f\left(2x^2-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f'\left(x^3+6\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(2x^2-4x+3\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ (bảng biến như hình sau)

x	$-\infty$		-5		1		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 7: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

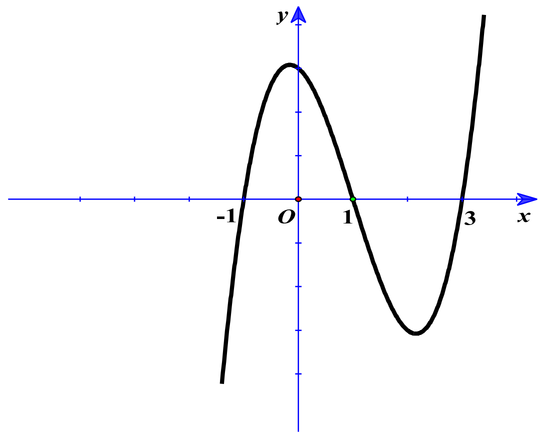
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f(3-4x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x-10\right)$ là

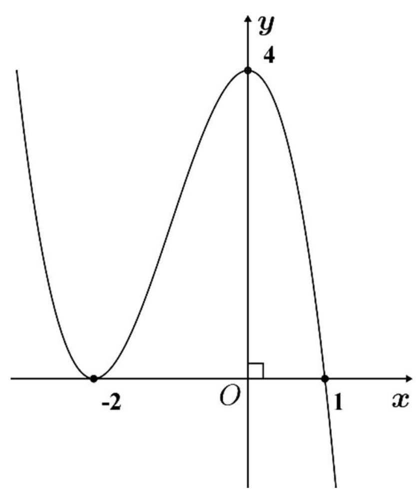
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Đồ thị của hàm $y=f'(1-4x)$ như hình vẽ dưới đây. Số các giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x-3m-2\right)$ nhiều nhất là



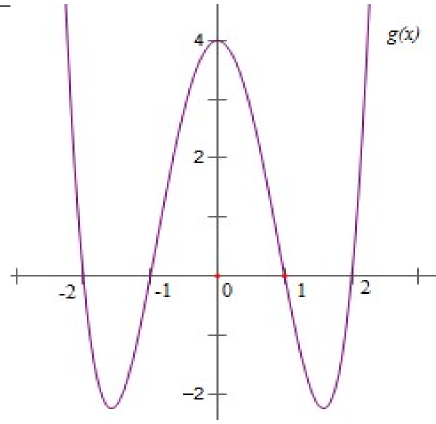
A. 4040. **B.** 2024. **C.** 4002. **D.** 2020.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

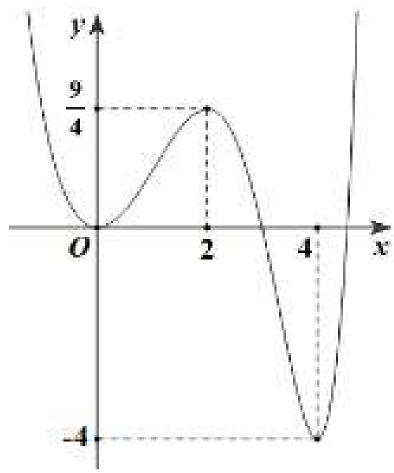
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên R. Hàm số $g(x)=f'\left(1-x^2\right)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

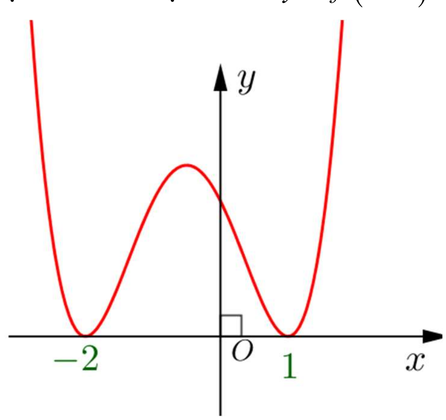
A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thoả mãn $2m\in\mathbb{Z}$ và hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 26. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 27.

Câu 13: Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ được cho như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2+2\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

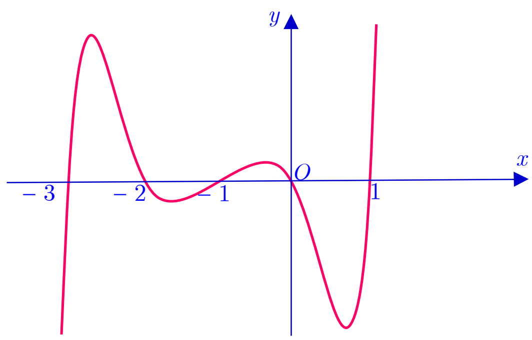
Câu 14: Cho hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f\left(x^2-2x\right)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Biết hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = a$. Hàm số $f\left(x^2 - 4x + 4\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

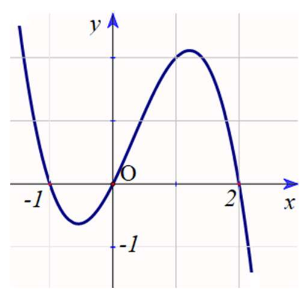
Câu 15: Cho hàm đa thức $y = \left[f\left(x^2 + 2x\right)\right]'$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = f\left(|x-2| + m\right)$ có 5 cực trị

A. -52. **B.** 55. **C.** -55. **D.** 56.

Câu 16: Cho hàm số $y = f'\left(x^3 - x^2 - 2x + 3\right)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Biết $f(0) > 0,\ f(-1) < 0$. Hàm số $g(x) = \left|f\left(x^4 - 2x^2\right)\right|$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

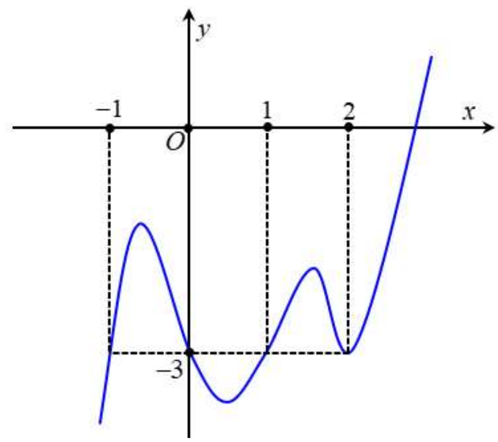
Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|e^{2x} - 2x - 2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 7.

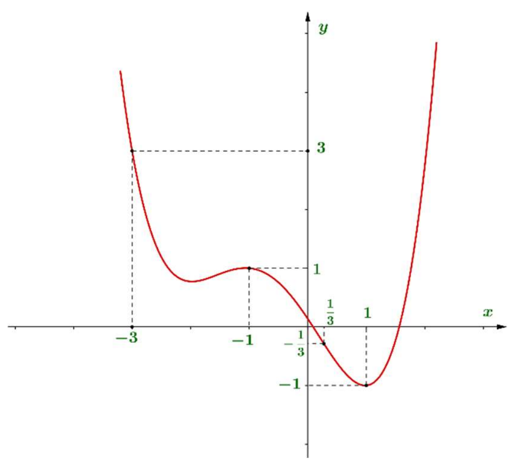
Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(|x|\right)+3|x|\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

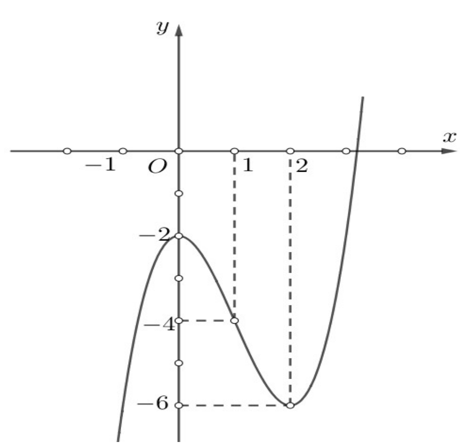
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{\left(5\sin x-1\right)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(0;2\pi\right)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(1-|x|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.C	5.D	6.A	7.D	8.B	9.D	10.A
11.B	12.A	13.D	14.D	15.C	16.D	17.A	18.D	19.D	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ ta có

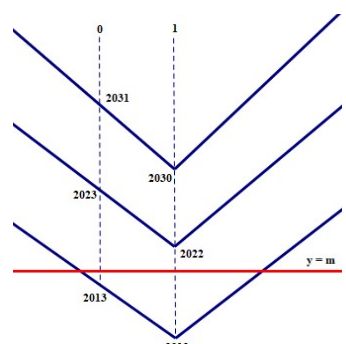
$$y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right..$$

Giải $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$, đặt $x^2-2x+3=3-t$ từ đồ thị hàm số $y=f'(3-t)$ ta có

$$f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+3=9\\x^2-2x+3=6\\x^2-2x+3=4\\x^2-2x+3=-1\\x^2-2x+3=-3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-6=0\\x^2-2x-3=0\\x^2-2x-1=0\\x^2-2x+4=0\\x^2-2x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=1\pm\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Phương trình $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.



Câu 2: Xét hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ ta có

$h'(x)=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0,(*)\end{array}\right..$$

Giải $(*)$, đặt $-x^2+2x-2020+m=1+2x$, ta có

$$f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+2x-2020+m=-7\\-x^2+2x-2020+m=3\\-x^2+2x-2020+m=11\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=x^2-2x+2013\\m=x^2-2x+2023\\m=x^2-2x+2031\end{array}\right..$$

hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $2012<m<2013$, do $m\in[-2021;2021]$ suy ra $m\in\varnothing$.

Câu 3: Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Suy ra $x=1;x=3$ là các nghiệm của phương trình $f'(3-x)=0$.

Do đó $f'(0)=0;f'(2)=0$.

Ta có $h'(x)=2xf'\left(x^2+1\right)$;

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=0\\x^2+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: Ta có $g'(x)=-\left(3x^2+1\right)f'\left(-x^3-x\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Suy ra $x=0;x=1$ là các nghiệm của phương trình $f'\left(-x^3-x\right)=0$.

Do đó $f'(0)=0;f'(-2)=0$.

Ta có $h'(x)=(4x-1)f'\left(2x^2-x\right)$;

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\f'\left(2x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\2x^2-x=0\\2x^2-x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\x=0\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Ta có: $f'\left(x^3+6\right)=a(x-1)(x+1)(x-3)$ (với $a>0$).

Với $x=-1$ thì $f'(5)=0.$

Với $x=1$ thì $f'(7)=0.$

Với $x=3$ thì $f'(33)=0.$

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=7\\x=33\end{array}\right..$

Ta có: $g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right).$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+4=0\\ f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x^2+4=5\\ x^2+4=7\\ x^2+4=33\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\pm 1\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=\pm\sqrt{29}\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Ta có $y'=(4x-4)f'\left(2x^2-4x+3\right)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-4=0\\ f'\left(2x^2-4x+3\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(2x^2-4x+3\right)=0 \quad (1)\end{array}\right..$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y'=0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x=-5, x=1, x=6$.

Như vậy phương trình (1) có nghiệm bội lẻ $x=-5$ hoặc $x=6$.

Thay $x=-5$ vào (1) ta được: $f'(73)=0.$

Thay $x=6$ vào (1) ta được: $f'(51)=0. \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=73\\ x=51\end{array}\right..$

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ x^3+3x^2=73\\ x^3+3x^2=51\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x\approx 3,382....\\ x\approx -5,022...\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Câu 7: Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$f'(x+1)=(x+1)x(x-1)h(x)$ với $h(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x+1)=(x+1-2)(x+1)(x+1-1)h(x)$.

Đặt $t=x+1$ khi đó $f'(t)=t(t-1)(t-2).U(t)$ với $t=x+1 \Rightarrow h(x)=U(t)>0$ với mọi t thỏa mãn điều kiện.

Vậy $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right..$

Mặt khác ta có: $g(x)=f\left(x^2+x+1\right) \Rightarrow g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ x^2+x+1=0\\ x^2+x+1=1\\ x^2+x+1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	|	$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	|	$\searrow$		$\nearrow$	
$g(\lvert x\rvert)$		$\searrow$				$\nearrow$			|	$\searrow$		$\nearrow$	

Vì $y = g(|x|) = f\left(x^2 + |x| + 1\right)$ và $g(x) = f\left(x^2 + x + 1\right)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y = f\left(x^2 + |x| + 1\right)$ có một điểm cực đại.

Vậy hàm số $|g(x)| = y = \left|f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\right|$ có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 8: $y = f\left(x^2 - 2x - 10\right) \Rightarrow y' = (2x-2) f'\left(x^2 - 2x - 10\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'\left(x^2 - 2x - 10\right) = 0 \end{array}\right.$$

Xét $f'\left(x^2 - 2x - 10\right) = 0$.

Đặt $x^2 - 2x - 10 = 3 - 4t$.

Ta có $f'(3-4t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \Leftrightarrow 3 - 4t = -9 \\ t = 2 \Leftrightarrow 3 - 4t = -5 \end{array}\right.$.

Nên $f'\left(x^2 - 2x - 10\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 10 = -9 \\ x^2 - 2x - 10 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2x - 10\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9:

Từ giả thiết ta có $f'(1-4x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 4x = 5 \\ 1 - 4x = -3 \\ 1 - 4x = -11 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -3 \\ t = -11 \end{array}\right.$.

Ta có $g(x) = f\left(x^2 + 4x - 3m - 2\right) \Rightarrow g'(x) = (2x+4) f'\left(x^2 + 4x - 3m - 2\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x-3m-2=5 \\ x^2+4x-3m-2=-3 \\ x^2+4x-3m-2=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\ \left((-2)^2+4(-2)=-4\right) \\ x^2+4x=3m+7 \\ x^2+4x=3m-1 \\ x^2+4x=3m-9 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^2+4x$ ta được $\underset{\mathbb{R}}{Min}\left(x^2+4x\right)=y(-2)=-4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x-3m-2\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $3m-9>-4 \Leftrightarrow m>\frac{5}{3}$.

Vì giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ nên $m\in\{2;3...;2021\}$. Vậy có 2020 số.

Câu 10: Ta có $y=f'(3-2x)=a(x+2)^2(x-1)$ với $a<0$

Với $x=-2$ ta có $f'(7)=0$

Với $x=1$ ta có $f'(1)=0$

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=1 \end{array}\right.$ trong đó $x=7$ là nghiệm bội hai.

Ta có: $g(x)=f\left(\left|x^2-3\right|\right)=f\left(\sqrt{\left(x^2-3\right)^2}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{x\left(x^2-3\right)}{\left|x^2-3\right|}.f'\left(\left|x^2-3\right|\right)$

$g'(x)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left|x^2-3\right|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ và $x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ thì $g'(x)$ không xác định

Xét $g'(-3)=\frac{-3.6}{6}f'(6)$. Ta có $f'(6)=f'\left(3-2.\frac{-3}{2}\right)$

Nên $f'(6)=f'\left(3-2.\frac{-3}{2}\right)=a\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2\left(-\frac{3}{2}-1\right)>0$ vì $a<0$ suy ra $g'(-3)<0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$\boxed{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Câu 11:

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 4 nên có dạng

$g(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)(x-2), a>0\Rightarrow f'\left(1-x^2\right)=a\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)$

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow f'(t)=at(t+3)$

$y=f\left(x^2-2|x|\right)\Rightarrow y'=\left(2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right)f'\left(x^2-2|x|\right)=2ax\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)\left(x^2-2|x|\right)\left(x^2-2|x|+3\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 12:

Đặt $t=5-2x$. Khi $y=f(5-2x)$ có 3 điểm cực trị $x=0,x=2,x=4$ thì $y=f(t)$ có 3 điểm cực trị $t=5,t=1,t=-3$ và $f(5)=0,f(1)=\frac{9}{4},f(-3)=-4$.

Bảng xét dấu $y=f(t)$ như sau:

t	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x)=2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\Rightarrow g'(x)=24x^2f'\left(4x^3+1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\4x^3+1=5\\4x^3+1=1\\4x^3+1=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x=1\\x^3=0\\x=-1\end{array}\right.$

$\Rightarrow y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Xét phương trình $2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f\left(4x^3+1\right)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$.

Đặt $u=4x^3+1\Rightarrow u\in\mathbb{R}$.

Số nghiệm $f\left(4x^3+1\right)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u)=f(t)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$.

Để $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\ge\frac{9}{4}\\-4<\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -4\\\frac{1}{2}\le m<\frac{17}{2}\end{array}\right.$. Vì $m\in(-9;9)$ và $2m\in\mathbb{Z}$ nên có 26 giá trị.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-2$ và $x=1$.

Suy ra $y=f(1-x)=a(x+2)^2.(x-1)^2$ trong đó $a>0$.

$y=f(1-x)=a\left[3-(1-x)\right]^2.\left[-(1-x)\right]^2$.

Do đó, $f(x)=a(3-x)^2.x^2 \Rightarrow f'(x)=2ax.(3-x).(3-2x)$.

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$g'(x)=2x.f'(x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2=0 \\ x^2+2=\frac{3}{2} \\ x^2+2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f(x^2+2)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 14: Đặt $t=x^2-2x$.

Ta có một phần bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$t=x^2-2x$	$+\infty$		15		-1		15		$+\infty$
$f(t)=f(x^2-2x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta vẽ lại một phần bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-1		15		$+\infty$
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=15$.

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-4x+4) \Rightarrow g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x+4=-2 \\ x^2-4x+4=15 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^2-4x+4=-2$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2-4x+4=15$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy hàm số $f\left(x^2-4x+4\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15: Ta có: $\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)=a\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x\right)\left(x-1\right)\ \left(a>0\right)$

$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right)=\dfrac{a}{2}\left(x+3\right)\left(x+2\right)x\left(x-1\right)=\dfrac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x\right)$

Đặt $t=x^2+2x\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{a}{2}\left(t-3\right)t$.

Ta có $g'=\dfrac{x-2}{\left|x-2\right|}f'\left(\left|x-2\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ f'\left(\left|x-2\right|+m\right)=0\end{array}\right.$

Để hàm số $g\left(x\right)$ có 5cực trị

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x-2\right|+m=0\\ \left|x-2\right|+m=3\end{array}\right.$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}-m>0\\ 3-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m<3\end{cases}\Leftrightarrow m<0$.

Suy ra $m\in\left\{-10;-9;...;-1\right\}$. Tổng giá trị m nguyên là -55.

Vậy hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(5;9\right)$.

Câu 16: Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x^3-x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=2\end{array}\right.$ do đó ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3.$

Xét $h(x)=f\left(x^4-2x^2\right)$ ta có $h'(x)=\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2\right)$,

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ f'\left(x^4-2x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x^4-2x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

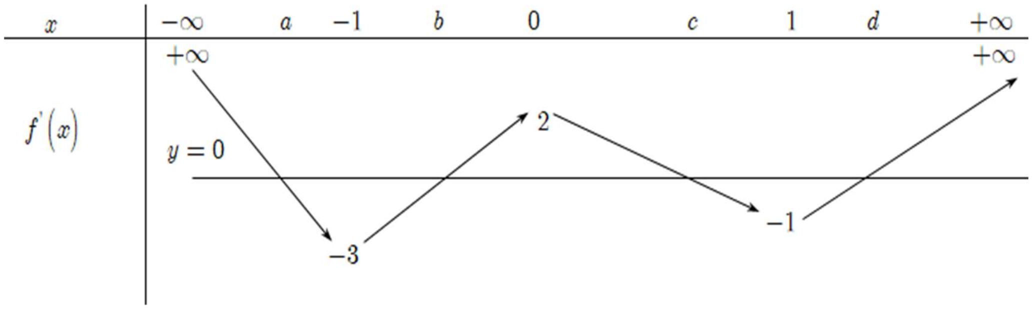
(Tất cả các nghiệm đều bội lẻ)

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^4-2x^2\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Do hàm số $y=f'\left(x^3-x^2-2x+3\right)$ là hàm bậc 3 suy ra $y=f'(x)$ là hàm bậc nhất có hệ số bậc nhất âm và $f'(3)=0$ do đó $f(3)>f(0)$, theo giả thiết $f(0)>0,\ f(-1)<0$ nên kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^4-2x^2\right)$ ta suy ra hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|$ có 6 điểm cực tiểu.

Câu 17: Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$



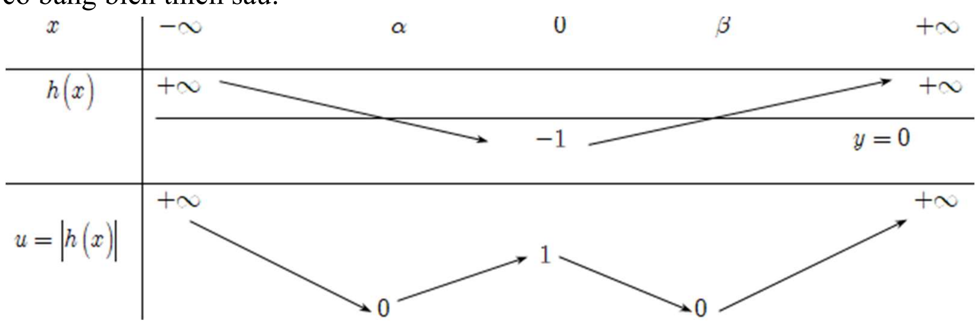
Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Đặt $h(x)=e^{2x}-2x-2$

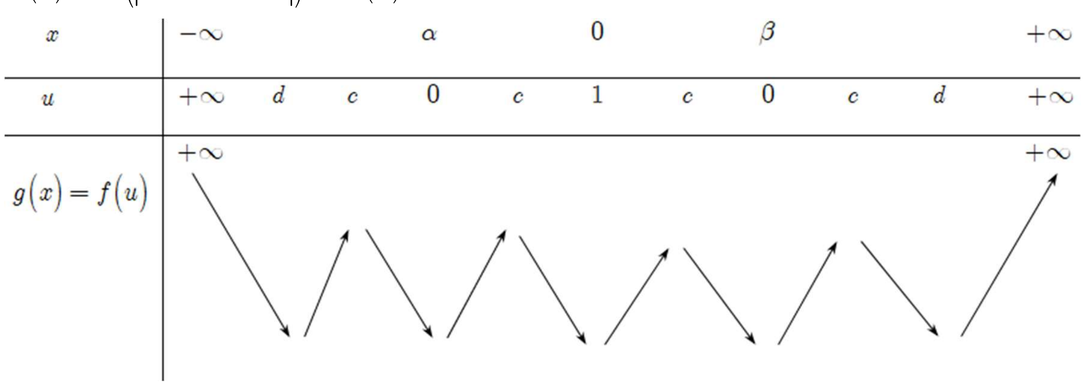
$h'(x)=2e^{2x}-2 \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$

$h(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha\approx -0,92 \\ x=\beta\approx 0,57 \end{array}\right.$

Nên ta có bảng biến thiên sau:



Sử dụng phương pháp ghép trục, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)=f(u)$ như sau:



Vậy hàm số $g(x)=f\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 18: Đặt: $h(x)=f(x)+3x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-(-3)$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	Truc 0x	↘		↗	$h(0)$	↘	0	↗	

Số điểm cực trị dương của hàm $\left|h(x)\right|$ là 2.

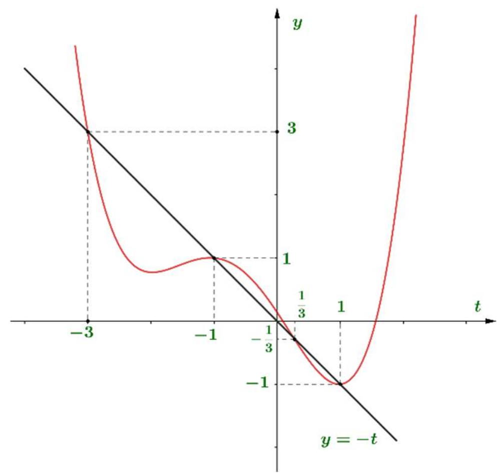
Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2 + 1 = 5$.

Câu 19: Đặt $t = \dfrac{5\sin x - 1}{2}$

Suy ra $g(t) = 2f(t) + t^2 + 3$

Ta có $g'(t) = 2f'(t) + 2t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \\ t = -3 \end{array}\right.$$



Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Suy ra:

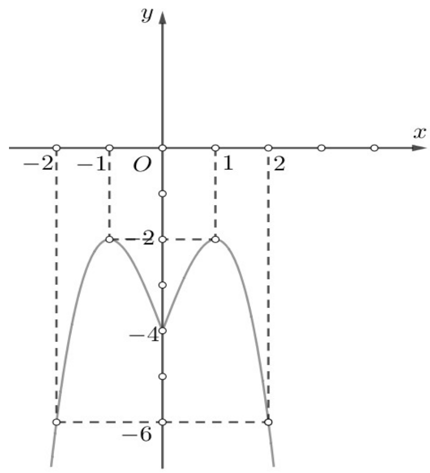
x	0			$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$	$g\left(\frac{-1}{2}\right)$	↗ $g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘ $g(1)$	↗ $g(2)$	↘ $g(1)$	↗ $g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘ $g(-1)$	↗ $g(-3)$	↘ $g(-1)$	↗ $g\left(\frac{-1}{2}\right)$

Câu 20: $f(x)$ có hai cực trị là $x = 0, x = 2 \Rightarrow f'(x) = ax(x-2) \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - ax^2 + C.$

$f\left(0\right)=-2,\ f\left(1\right)=-4\Rightarrow a=3,\ c=-2\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x^2-2$.

$f\left(1-|x|\right)=\begin{cases}f\left(1-x\right), \text{ khi } x\geq 0\\ f\left(1+x\right), \text{ khi } x<0\end{cases}\Rightarrow f\left(1-|x|\right)=\begin{cases}-x^3+3x-4, \text{ khi } x\geq 0\\ x^3-3x-4, \quad \text{khi } x<0\end{cases}$.

Ta có đồ thị của $f\left(1-|x|\right)$ như sau:



Đặt $h\left(x\right)=f\left(1-|x|\right)+m$. Ta có $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$.

$g\left(x\right)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m\geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.