

LỜI NÓI ĐẦU

Bất đẳng thức là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình toán phổ thông, nó vừa là đối tượng để nghiên cứu mà cũng vừa là một công cụ đắc lực, với những ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Trong các đề thi chọn học sinh giỏi ở các cấp những bài toán chứng minh bất đẳng thức thường xuất hiện như một dạng toán khá quen thuộc, nhưng để tìm ra lời giải không phải là một việc dễ dàng.

Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức khá phong phú, đa dạng và đã được khá nhiều tài liệu đề cập đến. Một trong những phương pháp chứng minh bất đẳng thức hoặc sáng tạo ra bất đẳng thức là việc sử dụng các tính chất đại số và hình học của tích phân.

Trên tinh thần đó tiểu luận gồm các phần: mục lục, mở đầu, 7 vấn đề, phụ lục, kết luận và tài liệu tham khảo.

- ✓ Vấn đề 1: Bất đẳng thức của hàm số giới nội và lỗi.
- ✓ Vấn đề 2: Bất đẳng thức của hàm số liên tục.
- ✓ Vấn đề 3: Bất đẳng thức của hàm số liên tục và đơn điệu.
- ✓ Vấn đề 4: Bất đẳng thức của hàm số khả vi.
- ✓ Vấn đề 5: Bất đẳng thức của hàm số khả tích.
- ✓ Vấn đề 6: Sử dụng công thức tính độ dài cung phẳng để chứng minh bất đẳng thức.
- ✓ Vấn đề 7: Sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng để chứng minh bất đẳng thức.

Nội dung trong 5 vấn đề đầu đề cập đến việc sử dụng các tính chất đại số đơn giản của tích phân để chứng minh một số bài toán liên quan, trên cơ sở đó đưa ra những ví dụ áp dụng để sáng tạo ra bất đẳng thức, 2 vấn đề còn lại đề cập đến việc thông qua những ước lượng trực quan từ hình học để chứng minh bất đẳng thức kèm theo những ví dụ minh họa cụ thể.

Để hoàn thành tiểu luận này, chúng tôi đã cố gắng tập trung nghiên cứu, xong do ít nhiều hạn chế về thời gian cũng như về năng lực nên tiểu luận chắc chắn còn nhiều vấn đề chưa đề cập đến hoặc có đề cập nhưng chưa đi sâu vào khai thác ý tưởng vấn đề. Vì vậy tiểu luận khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi rất mong được sự chỉ bảo của quý thầy cô và các bạn đọc về tiểu luận này.

Quy Nhơn, ngày 11 tháng 11 năm 2009.

Vấn đề 1.

Bất Đẳng Thức Của Hàm Số Giới Nội Và Lỗi

Bài toán. Giả sử rằng trên $[a, b]$ hàm $f(x)$ giới nội và lỗi. Chứng minh rằng

$$(b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Chứng minh

Vì $f(x)$ lồi trên $[a, b]$ nên với bất kỳ $x_1, x_2 \in [a, b]$ ta có bất đẳng thức so sánh $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ nếu $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (theo định nghĩa)

Vì hàm lồi trên một đoạn nên nó liên tục. Như vậy, $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Sử dụng tính chất lồi của $f(x)$ ta có

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(a+\xi) + f(b-\xi)], a \leq \xi \leq b-a$$

Tích phân theo ξ trên khoảng $[0, b-a]$ ta nhận được

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{b-a} f(a+\xi) d\xi + \int_0^{b-a} f(b-\xi) d\xi \right) = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

trong tích phân đầu ta thay $a+\xi = t$, còn tích phân thứ hai thay $b-\xi = z$. Chia $[a, b]$ thành

n phần bằng nhau $\left(\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\right)$ và lập tổng tích phân với $\xi_k = x_k$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)a + \frac{k}{n}b\right]$$

Do $f(x)$ lồi, ta có $f\left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)a + \frac{k}{n}b\right] > \left(1 - \frac{k}{n}\right)f(a) + \frac{k}{n}f(b)$

$$\text{Bởi vậy } S_n > \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)f(a) + \frac{k}{n}f(b)\right] = \frac{b-a}{n} \left[\frac{n+1}{2}f(a) + \frac{n-1}{2}f(b)\right] \quad (2).$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức (2) khi $n \rightarrow \infty$ (do $f(x)$ khả tích) ta nhận được

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta có } (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ví dụ 1.1. Cho $0 < a < b, p > 2$. Chứng minh rằng

$$(p-1)(a^{p+1} - b^{p+1}) \leq ab(p+1)(a^{p-1} - b^{p-1})$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^p$ trên $[a, b]$, với $a > 0, p > 2$.

Ta có $y'' = -p(p-1)x^{p-2} < 0$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ bị chặn và lồi trên $[a, b]$. Khi đó

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (b-a) \frac{a^p - b^p}{2} \leq - \int_a^b x^p dx \\
&\Leftrightarrow (a-b)(a^p + b^p) \leq \frac{2(a^{p+1} - b^{p+1})}{p+1} \\
&\Leftrightarrow (p-1)(a^{p+1} - b^{p+1}) \leq ab(p+1)(a^{p-1} - b^{p-1})
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.2 Với $0 < a < b$ Chứng minh $ab(\ln a^2 - \ln b^2) \geq a^2 - b^2$

Lời giải

Xét $y = -x \ln x$ trên $(0, +\infty)$.

Ta có $y'' = -\frac{1}{x} < 0, \forall x > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2}(-a \ln a - b \ln b) \leq - \int_a^b x \ln x dx \\
&\Leftrightarrow \frac{b-a}{2}(-a \ln a - b \ln b) \leq - \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b \\
&\Leftrightarrow ab(\ln a^2 - \ln b^2) \geq a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3. Với $0 < a < b < 1$. Chứng minh $b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} \leq \arcsin b - \arcsin a$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên $[a, b]$ với $0 < a < b < 1$.

Ta có $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0, \forall x \in [a, b]$

$f(x)$ bị chặn và lồi trên $[a, b]$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b-a) \left(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \right) \leq \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b-a) \left(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_a^b \\
&\Leftrightarrow b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2} \leq \arcsin b - \arcsin a
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.4. Với $0 < a < b$. Chứng minh $b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} \geq \ln \frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}$.

Lời giải

Xét $y' = -\sqrt{x^2+1}, y'' = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} < 0, \forall x \in [a, b]$.

Ta có $y = f(x)$ là hàm bị chặn và lồi trên $[a, b]$. Khi đó $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \left(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} \right) \leq -\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \right) \Big|_a^b$$

$$\Leftrightarrow b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1} \geq \ln \frac{b+\sqrt{1+b^2}}{a+\sqrt{1+a^2}}$$

Ví dụ 1.5. Với $0 < x < y < \frac{\pi}{4}$. Chứng minh

$$(y-x)\sin(2x+2y) \leq \cos 2x - \cos 2y \leq 2(y-x)\sin(x+y).$$

Lời giải

Xét $f(t) = \sin 2t$ trên $[x, y] \subset [0, \frac{\pi}{4}]$.

Ta có $f''(t) = -4\sin 2t < 0 \forall t \in [x, y]$. Khi đó

$$(y-x)\frac{f(x)+f(y)}{2} \leq \int_x^y f(x)dx \leq (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\frac{\sin 2x + \sin 2y}{2} \leq \int_x^y \sin 2t dt \leq (y-x)\sin(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\sin(2x+2y) \leq \cos 2x - \cos 2y \leq 2(y-x)\sin(x+y).$$

Ví dụ 1.6. Với $0 < a < b$. Chứng minh $\frac{(a-b)(a+b+2)}{2(a+1)(b+1)} \leq \ln\left(\frac{a+1}{b+1}\right) \leq \frac{2(a-b)}{a+b+2}$.

Lời giải

Xét $y = -\frac{1}{x+1}$ trên $[a, b]$ với $a > 0$.

Ta có $y'' = -\frac{2}{(x+1)^3} < 0, \forall x \in [a, b]$.

Hàm số $y = f(x)$ bị chặn và lồi trên $[a, b]$. Khi đó

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{2} \left(-\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \right) \leq - \int_a^b \frac{1}{x+1} dx \leq (b-a) \left(-\frac{1}{\frac{a+b}{2}+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)} \leq - \ln|x+1| \Big|_a^b \leq \frac{2(a-b)}{a+b+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b+2)}{2(a+1)(b+1)} \leq \ln \left(\frac{a+1}{b+1} \right) \leq \frac{2(a-b)}{a+b+2}.$$

Nhận xét: Để thuận tiện cho việc ra đề bài tập ở dạng này chúng tôi đưa ra một số hàm lồi ở phần phụ lục.

Vấn đề 2.

Bất Đẳng Thức Của Hàm Số Liên Tục

Bài toán 2.1. Chứng minh nếu $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm liên tục, xác định trên $[a, b]$ thì ta có

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

(Bất đẳng thức Cauchy_Bunhiacopxki).

Chứng minh

$\forall t \in \mathbb{R}$, ta có

$$0 \leq [tf(x) + g(x)]^2 = t^2 f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

Về phải là tam thức bậc hai không âm $\forall t$

$$\Rightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0 \Rightarrow dpcm.$$

Hệ quả 1. Với $f: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ liên tục, ta có $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$.

Hệ quả 2. Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trong $a \leq x \leq b$. Chứng minh

$$\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \text{const}$.

Ví dụ 2.1. Chứng minh: với $\forall x > 0$, ta có $e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt < \sqrt{(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{e^t + e^{-2t}} dt$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $\left(\int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{e^t + e^{-2t}} dt \right)^2 \leq \int_0^x e^t dt \int_0^x (e^t + e^{-2t}) dt$

Theo (1) ta có $\left(\int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{e^t + e^{-2t}} dt \right)^2 \leq (e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) < (e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)$ (2)

Hiển nhiên ta có $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} > e^t, \forall 0 < t < x$, nên ta suy ra

$$\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} dt > \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra điều phải chứng minh $e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} dt < \sqrt{(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}$.

Ví dụ 2.2. Với $1 < a \leq b$. Chứng minh $\frac{6 \left(\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} \right)^2}{b^3 - a^3} \leq \ln \frac{(a-1)(b+1)}{(a+1)(b-1)}$.

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(x) = x$ trên $[a, b]$ với $1 < a \leq b$.

Dễ thấy f, g liên tục trên $[a, b]$. Áp dụng đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx \right)^2 &\leq \int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx \cdot \int_a^b x^2 dx \\ \Leftrightarrow \left(-\sqrt{1-x^2} \Big|_a^b \right)^2 &\leq \left(-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_a^b \right) \left(\frac{x^3}{3} \Big|_a^b \right) \\ \Leftrightarrow \left(-\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2} \right)^2 &\leq \left(-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{b-1}{b+1} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right| \right) \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{6 \left(\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} \right)^2}{b^3 - a^3} &\leq \ln \frac{(a-1)(b+1)}{(a+1)(b-1)} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3. Với $0 < a < b$. Chứng minh $(e^b - e^a)^2 \geq (b-a)^2 e^a e^b$

Lời giải

Xét $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{e^x}$ trên $[a, b]$ với $a > 0$. Khi đó

$$\int_a^b e^x dx \cdot \int_a^b \frac{1}{e^x} dx \geq (b-a)^2 \Leftrightarrow \left(e^x \Big|_a^b \right) \left(-\frac{1}{e^x} \Big|_a^b \right) \geq (b-a)^2$$

$$\Leftrightarrow (e^b - e^a)^2 \geq (b-a)^2 e^a e^b.$$

Ví dụ 2.4. Với $\forall 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$4(\cos a - \cos b)^2 \leq (b-a)(2(b-a) + \sin 2a - \sin 2b).$$

Lời giải

Ta có $\forall 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, $\left(\int_a^b \sin x dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \sin^2 x dx$.

$$\Leftrightarrow \left(-\cos x \Big|_a^b \right)^2 \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (1 - \cos 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos a - \cos b)^2 \leq (b-a)(2(b-a) + \sin 2a - \sin 2b).$$

Ví dụ 2.5. Với $0 < a < b$. Chứng minh $\ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} \leq \sqrt{(a-b)(\arctan a - \arctan b)}$.

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ liên tục trên $[a, b]$ với $a > 0$. Khi đó

$$\left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx \Leftrightarrow \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \Big|_a^b \right)^2 \leq (b-a) \arctan x \Big|_a^b$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} \leq \sqrt{(a-b)(\arctan a - \arctan b)}.$$

Vấn đề 3.

Bất Đẳng Thức Của Hàm Số Liên Tục Và Đơn Điều

Bài toán 3.1. Cho $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục

a) Nếu f, g đều là hàm tăng. Chứng minh

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$$

b) Nếu f là hàm tăng, g là hàm giảm. Chứng minh

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$$

(Bất đẳng thức Trêbursep).

Chứng minh

a) Với $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f(a) \leq g(x) \leq f(b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(a) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(b) dx \Rightarrow (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b)$$

$$\Rightarrow f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(b)$$

Theo định lý giá trị trung bình của hàm số liên tục $\exists x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Hơn nữa hàm f, g đồng biến trên $[a, b]$. Suy ra

$$[f(x) - f(x_0)][g(x) - g(x_0)] \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx - f(x_0) \int_a^b g(x) dx - g(x_0) \int_a^b f(x) dx + (b-a)f(x_0)g(x_0) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \geq f(x_0) \int_a^b g(x) dx + g(x_0) \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(x_0)g(x_0)$$

$$\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx + g(x_0)(b-a)g(x_0) - (b-a)f(x_0)g(x_0)$$

$$\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

b) Giả thiết suy ra $f, (-g)$ đều là hàm tăng nên theo câu a)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)[-g(x)] dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b [-g(x)] dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

Chú ý. Nếu f, g đều là hàm giảm thì bất đẳng thức câu a) vẫn đúng. Tức là f, g đơn điệu cùng chiều thì bất đẳng thức câu a) đúng.

Nếu f là hàm giảm, g là hàm tăng thì bất đẳng thức câu b) vẫn đúng. Tức là f, g đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức câu b) đúng.

Bài toán 3.2. (Định lý về giá trị trung bình) Nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì tồn tại

$$c \in (a, b): f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Bài toán 3.3. Nếu $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, a]$ thì

$$a \int_0^x f(t) dt \geq x \int_0^a f(t) dt, \forall x \in [0, a].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = 0$.

Chứng minh

Nếu $x = 0$ hoặc $x = a$ thì đẳng thức xảy ra.

Nếu $0 < x < a$, vì $f(t)$ nghịch biến trên $[0, a]$ nên $\forall t, 0 < x \leq t \leq a$ ta có $f(t) \leq f(x)$.

Suy ra $\int_x^a f(t)dt \leq f(x) \int_x^a dt = (a - x)f(x)$. Do đó $f(x) \geq \frac{1}{a - x} \int_x^a f(t)dt$

Mặt khác khi $0 < t \leq x$ thì $f(t) \geq f(x)$ nên $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x f(x)dt = xf(x)$.

Suy ra $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq f(x)$.

Từ đó ta có $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq f(x) \geq \frac{1}{a - x} \int_x^a f(t)dt$.

Nên $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq \frac{1}{a - x} \int_x^a f(t)dt$. Suy ra $(a - x) \int_0^x f(t)dt \geq x \int_x^a f(t)dt = x \left(\int_x^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \right)$

Vậy $a \int_0^x f(t)dt \geq x \int_0^a f(t)dt$.

Ta chứng minh đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = a$.

Thật vậy nếu tồn tại $b \in (0, a)$, $a \int_0^b f(t)dt = b \int_0^a f(t)dt = b \left(\int_0^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt \right)$

Suy ra

$$a \int_0^b f(t)dt - b \int_0^b f(t)dt = b \int_b^a f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow (a - b) \int_0^b f(t)dt = b \int_b^a f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b - a} \int_0^b f(t)dt = \frac{1}{a - b} \int_b^a f(t)dt$$

Theo định lý về giá trị trung bình ta có

$$\exists \xi \in [0, b] : f(\xi) = \frac{1}{b} \int_0^b f(t)dt$$

$$\delta \in (b, a) : f(\delta) = \frac{1}{a - b} \int_b^a f(t)dt$$

$$\Rightarrow f(\xi) = f(\delta)$$

Mà $\delta > \xi$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(t)$ là hàm giảm trên $(0, a)$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $x = a$ hoặc $x = 0$.

Hệ quả 1. Nếu $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, a]$, $\forall x \in [0, 1]$ thì

$$\int_0^x f(t)dt \geq x \int_0^1 f(t)dt. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

Chứng minh tương tự ta có kết quả sau

Bài toán 3.4. Nếu $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0, a]$, $\forall x \in [0, a]$ thì

$a \int_0^x f(t)dt \leq x \int_0^a f(t)dt$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = 0$.

Hệ quả 2. Nếu $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$ thì

$\int_0^x f(t)dt \leq x \int_0^1 f(t)dt$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$ hoặc $x=0$.

Ví dụ 3.1. Với $0 < a \leq b$. Chứng minh

$$b\sqrt{b^2+1} - a\sqrt{a^2+1} + \ln \frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}} \geq 2(b-a)^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{b+\sqrt{b^2+1}}.$$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[a,b]$, với $a > 0$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x > 0$$

$$g'(x) = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x > 0$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b dx &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{x^2+1} dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \right) \Big|_a^b - \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \right) \Big|_a^b \\ \Leftrightarrow b\sqrt{b^2+1} - a\sqrt{a^2+1} + \ln \frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}} &\geq 2(b-a)^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{b+\sqrt{b^2+1}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng $\forall x \in [0,1], 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x \leq 0$.

Lời giải

Xét $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x$,

$$g(t) = t^5 + t^3 + t.$$

Ta có $g(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0,1]$. Do đó $\forall x \in [0,1]$ ta có

$$\begin{aligned} \int_0^x (t^5 + t^3 + t) dt &\leq x \int_0^1 (t^5 + t^3 + t) dt \\ \Rightarrow \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} &\leq x \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ \Rightarrow f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x &\leq 0 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 3.3. Chứng minh $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x} \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \leq \ln(e^{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})), \forall x \in (0,1]$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$ liên tục, đồng biến trên $[0,1]$. Do đó $\forall x \in [0,1]$, ta có

$$\int_0^x \sqrt{t^2+1} dt \leq x \int_0^1 \sqrt{t^2+1} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (t\sqrt{t^2+1} + \ln |t + \sqrt{t^2+1}|) \Big|_0^x \leq \frac{x}{2} (t\sqrt{t^2+1} + \ln |t + \sqrt{t^2+1}|) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x} \ln |x + \sqrt{x^2+1}| \leq \ln(e^{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})), \forall x \in (0,1].$$

Ví dụ 3.4. Chứng minh rằng $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Chứng minh $\frac{\pi}{4}x^2 - (1 + \frac{\pi^2}{8})x \leq \frac{\pi}{2}(\cos x - 1)$.

Lời giải

Xét $g(t) = t + \sin t$ liên tục và đồng biến trên $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ta có $\frac{\pi}{2} \int_0^x (t + \sin t) dt \leq x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t + \sin t) dt$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{t^2}{2} - \cos t \right) \Big|_0^x \leq x \left(\frac{t^2}{2} - \cos t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + 1 \right) \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4}x^2 - \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) x + \frac{\pi}{2} \cos x \leq -\frac{\pi}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.5 Chứng minh $\forall x \in [0,1], \arccos x - \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x \geq -1$.

Lời giải

Xét $g(t) = \sqrt{t} - \arccos t$ liên tục và đồng biến trên $[0,1]$.

Do đó $\forall x \in [0,1]$ thì

$$\begin{aligned}
& \int_0^x (\sqrt{t} - \arccos t) dt \leq x \int_0^1 (\sqrt{t} - \arccos t) dt \\
& \Rightarrow \left(\frac{2}{3} t \sqrt{t} - t \arccos t + \sqrt{1-t^2} \right) \Big|_0^x \leq x \left(\frac{2}{3} t \sqrt{t} - t \arccos t + \sqrt{1-t^2} \right) \Big|_0^1 \\
& \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 1 - x \arccos x \leq x \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \\
& \Rightarrow f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{1}{3} x \geq -1
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 3.6. Chứng minh $\forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \sin^3 x + 3 \sin x - 4\sqrt{\sin x} \leq 0$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{\sin x} = t \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$.

$\Rightarrow g(x)$ có dạng sau: $h(t) = t^5 + 3t^2 - 4\sqrt{t}$.

Đặt $k(u) = u^5 + u$ là hàm liên tục, đồng biến trên $[0,1]$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \int_0^t (u^5 + u) du \leq t \int_0^1 (u^5 + u) du \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^2}{2} \right) \leq t \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow t^6 + 3t^2 - 4t \leq 0
\end{aligned}$$

Suy ra $\sin^3 x + 3 \sin x - 4\sqrt{\sin x} \leq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k\pi$.

Ví dụ 3.7. Chứng minh $\forall x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}], \pi x - 2\sqrt{2} \arcsin x \geq 0$.

Lời giải

Đặt $g(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ nghịch biến và liên tục trên $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \Big|_0^x \geq x \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin t \Big|_0^x \leq x \arcsin t \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x \leq \frac{\pi x}{4} \\
& \Leftrightarrow \pi x - 2\sqrt{2} \arcsin x \geq 0
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3.8. Chứng minh $\forall x \in [0,2], 3x^2 + 4x\sqrt{x} + 4(2-x)\sqrt{2-x} - 6x - 8\sqrt{2} \leq 0$

Lời giải

Đặt $g(t) = t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t}$ là hàm đồng biến và liên tục trên $[0,2]$.

$$\Rightarrow 2 \int_0^x (t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t}) dt \leq x \int_0^2 (t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t}) dt$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{2}{3}(2-t)\sqrt{2-t} \right] \Big|_0^x \leq x \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{2}{3}(2-t)\sqrt{2-t} \right] \Big|_0^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x\sqrt{x} + 4(2-x)\sqrt{2-x} - 6x \leq 8\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Nhận xét

Để tạo ra những bài tập thuộc dạng này có thể lấy một hàm số sơ cấp đơn giản thoả mãn liên tục đơn điệu trên một khoảng nào đó, rồi lấy tích phân trên khoảng đó từ đó đưa ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ta có thể mở rộng kết quả trên bằng cách từ $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ ta lấy tích phân nhiều lần ta thu được các bất đẳng thức phức tạp hơn

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx \geq \int_a^b \left(\int_a^x g(t) dt \right) dx, \quad a < t < x < b.$$

Tương tự ta có thể mở rộng cho trường hợp hàm 2 biến x, y . Cho $f(x,y), g(x,y)$ khả tích trên D và $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$ ta có

$$\iint_D f(x,y) dx dy \geq \iint_D g(x,y) dx dy. \text{ Nếu } f(x,y) \text{ khả tích trên } D \text{ và } f(x,y) \geq 0, \quad \forall (x,y) \in D$$

ta có $\iint_D f(x,y) dx dy \geq 0$. Khi dạy cho học sinh thì ta có thể hướng dẫn cho học sinh thấy trong các trường hợp đặc biệt thì tích phân 2 lớp có thể hiểu là lấy tích phân một lớp hai lần, coi x là tham số, ta lấy tích phân theo biến y , sau đó ta mới lấy tích phân theo biến x như thế việc chứng minh sẽ dễ dàng hơn.

Vấn đề 4.

Bất Đẳng Thức Của Hàm Số Khả Vi

Bài toán 4.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $f(a) = 0$. Chứng minh

$$\left[\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

Chứng minh

Do $f(a) = 0$ nên $f(x_0) = f(x_0) - f(a) = \int_a^{x_0} f'(x) dx$

trong đó $f(x_0) = \max \left\{ |f(x)| : x \in [a, b] \right\}$.

$$\text{Suy ra } [f(x_0)]^2 = \left(\int_a^{x_0} 1 \cdot f'(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^{x_0} 1^2 dx \right) \left(\int_a^{x_0} [f'(x)]^2 dx \right) \leq (b-a) \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 dx.$$

$$\text{Vậy } \left[\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

Bài toán 4.2. Nếu $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục, không âm, tăng trên $[0, +\infty]$ sao cho $f(0)g(0) = 0$. Khi đó $\forall a > 0$, $\forall x \geq 0$ ta có

$$\int_0^a f'(t)g(t)dt + \int_0^x f(t)g'(t)dt \geq f(a)g(x) \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = a$.

Chứng minh

Nếu $x = a$ thì hiển nhiên đẳng thức xảy ra.

Nếu $x < a$. Gọi I là vế trái của (1) khi đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x f'(t)g(t)dt + \int_x^a f'(t)g(t)dt + \int_0^x f(t)g'(t)dt = \int_0^x [f(t)g(t)]' dt + \int_x^a f'(t)g(t)dt \\ &= f(t)g(t) \Big|_0^x + \int_x^a f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) + \int_x^a f'(t)g(t)dt \end{aligned}$$

Vì $x \leq t \leq a$, $g(x) \leq g(t)$ nên $f(t)g(x) \leq f(t)g(t)$.

Do $y = f(x)$, $y = g(x)$ không âm, tăng trên $[0, +\infty]$ nên

$$I \geq f(x)g(x) + \int_x^a f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) + g(x)[f(t)]_x^a = f(a)g(x).$$

Nếu $x > a$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a f'(t)g(t)dt + \int_0^a f(t)g'(t)dt + \int_a^x f(t)g'(t)dt = \int_0^a [f(t)g(t)]' dt + \int_a^x f(t)g'(t)dt \\ &= f(t)g(t) \Big|_0^a + \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(a)g(a) + \int_a^x f(t)g'(t)dt \end{aligned}$$

Vì $a \leq t \leq x$, $f(a) \leq f(t)$ nên $f(a)g(t) \leq f(t)g'(t)$.

Do $y = f(x)$, $y = g(x)$ không âm, tăng trên $[0, +\infty]$ nên

$$I \geq f(a)g(a) + \int_a^x f(a)g'(t)dt = f(a)g(a) + f(a)[g(t)]_a^x = f(a)g(x).$$

Chứng minh tương tự ta có kết quả sau

Bài toán 4.3. Nếu $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục, không âm, tăng trên $[0, +\infty]$ sao cho $f(0)g(0) = 0$. Khi đó $\forall a > 0$, $\forall b \geq 0$ ta có

$$\int_0^a f'(t)g(t)dt + \int_0^b f(t)g'(t)dt \geq f(c)g(c) \quad (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = a$, $c = \min(a, b)$.

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng $\forall x \geq 0$, ta có

$$(x^2 - 1)\ln(1+x) - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)x^2 + x - \frac{1}{2} + \ln 2 \geq 0.$$

Lời giải

Xét $f(t) = t^2$, $g(t) = \ln(1+t)$ liên tục và không âm, đồng biến khi $t \geq 0$. Khi đó $\forall t \geq 0$, ta có

$$x^2 \ln 2 \leq \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt + 2 \int_0^x t \ln(1+t) dt.$$

Mà

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x t \ln(1+t) dt = \frac{1}{2} \left[t^2 \ln(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) \right]_0^x = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) \right]$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)\ln(1+x) - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)x^2 + x \geq \frac{1}{2} - \ln 2$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 4.2. Chứng minh $\forall x \geq 0$, ta có $e^{x^2} (x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 7) + 3e \geq 0$.

Lời giải

Xét $f(t) = t^6$, $g(t) = e^{t^2}$ liên tục, không âm và đồng biến khi $t \geq 0$. Khi đó $\forall t \geq 0$, ta có

$$e^{x^2} \leq \int_0^1 e^{t^2} 6t^3 dt + \int_0^x 2t^6 e^{t^2} dt.$$

Mà

$$\int_0^1 e^{t^2} 6t^5 dt = e^{t^2} (t^4 - 2t^2 + 2) \Big|_0^1 = 3e - 6$$

$$\int_0^x 2t^7 e^{t^2} dt = e^{t^2} (t^6 - 3t^4 + 6t^2 - 6) \Big|_0^x = e^{x^2} (x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 6) + 6$$

$$\Rightarrow e^{x^2} (x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 7) \geq -3e$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 4.3. Chứng minh $\forall x \geq 0$, ta có $\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \tan(x) + \ln|\cos(x)| + \ln 2 \geq 0$.

Lời giải

Xét $f(t) = \tan t$, $g(t) = t$ liên tục, không âm và đồng biến khi $t \geq 1$. Khi đó $\forall t \geq 0$ ta có

$$\frac{\pi}{3} \tan(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t dt + \int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)} dt.$$

Mà

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t dt = -\ln|\cos t| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$$

$$\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)} dt = \left[t \tan t + \ln|\cos t| \right] \Big|_0^x = x \tan x + \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \tan(x) + \ln|\cos(x)| \geq -\ln 2$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 4.4. Với $0 < 1 < a$. Chứng minh $\frac{1-a}{\sqrt{a}} \leq \ln a \leq \frac{a-1}{\sqrt{a}}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \ln x$ trên $[1, a]$, với $a \geq 1$.

Ta có $y(1) = 0$

$$y' = \frac{1}{x} > 0.$$

$$\text{Khi đó} \quad \left[\max_{x \in [1, a]} |\ln x| \right]^2 \leq (a-1)^a \int_1^a \left[(\ln x)' \right]^2 dx.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (\ln a)^2 &\leq (a-1) \int_1^a \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow (\ln a)^2 \leq (a-1) \left(-\frac{1}{a} + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1-a}{\sqrt{a}} \leq \ln a \leq \frac{a-1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Vấn đề 5.

Bất Đẳng Thức Của Hàm Số Khả Tích

Bài toán 5.1. Nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)$ thì $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Hệ quả. Nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Bài toán 5.2. Giả sử hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $\inf_{[a, b]} f(x) > 0$. Khi đó, ta có

$$\frac{b-a}{b \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx} \leq e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1).$$

Nhận xét. Với $a_i > 0, i = \overline{1, n}$. Ta có dãy bất đẳng thức sau

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad (2)$$

Chứng minh

Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ và

chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Ta có $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)}{n}$.

Tương tự $e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f(\xi_i)}, \frac{b-a}{b \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f(\xi_i)}}.$

Áp dụng dãy bất đẳng thức (2) ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)}{n} \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f(\xi_i)} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f(\xi_i)}}.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được dãy bất đẳng thức (1).

Ví dụ 5.1. Chứng minh rằng $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) > 0, \forall t > 0.$

Khi đó với $0 \leq t \leq x$ ta có $\int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt > 0.$

Xét $I = \int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ dv = dt \end{cases}.$

Suy ra $I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 > 0.$

Vậy ta có $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \forall x > 0.$

Với $x \leq t < 0$ thì $f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) = -\ln(-t + \sqrt{1+t^2}) < 0, \forall x > 0$.

Khi đó với $x \leq t \leq 0$ ta có $\int_x^0 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt < 0$

$$\Rightarrow I = \int_x^0 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt = -x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - 1 + \sqrt{1+x^2} < 0$$

$$\Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 > \sqrt{1+x^2}, \forall x < 0$$

Khi $x = 0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Vậy ta có $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.2. Cho $x > 0$. Chứng minh với n nguyên dương

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (*)$$

Lời giải

Ta chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, từ $e^t > 1$ với $t > 0$ ta có với $x > 0$

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x 1 dt \Leftrightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x.$$

Giả sử với $n = k, \forall t > 0$

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có } \int_0^x e^t dt > \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} \right) dt$$

$$\Rightarrow e^t \Big|_0^x > \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2!3} + \dots + \frac{t^{k+1}}{k!(k+1)} \right) \Big|_0^x$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Công thức với $n = k+1$ đúng.

Vậy (*) đúng $\forall n \geq 1$.

Ví dụ 5.3. Chứng minh $\forall x > 0$, ta có $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \forall t > 0 \text{ ta có } 0 \leq 1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \leq 2\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Suy ra $\forall x > 0$

$$0 < \int_0^x (1 - \cos t) dt < \int_0^x \frac{t^2}{2} dt \Leftrightarrow 0 < (t - \sin t) \Big|_0^x < \frac{t^3}{6} \Big|_0^x \Leftrightarrow 0 < x - \sin(x) < \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$$

Ví dụ 5.4. a) Chứng minh rằng với n nguyên dương

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}.$$

b) Sử dụng (8) để tính $K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Lời giải

a) Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx.$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, ta có

đặt $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \cos x \cdot \sin^{n-2} x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

Ta có

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx$$

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x dx = (n-1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right]$$

$$\Leftrightarrow I_n = (n-1) [I_{n-2} - I_n] \Leftrightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Với $n=2m$, ta có

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2}$$

$$I_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

nhân vế cho vế ta có

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3}{2m(2m-2)\dots 4} I_2$$

biết

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Vậy

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3 \pi}{2m(2m-2)\dots 4.2 \cdot 2} \quad (1).$$

Với $n = 2n + 1$ ta có

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}$$

$$I_{2m-1} = \frac{2m-2}{2m-1} I_{2m-3}$$

.....

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

Nhân vế cho vế ta có

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\dots 2}{(2m+1)(2m-1)\dots 3} I_1$$

biết

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Vậy

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\dots 2}{(2m+1)(2m-1)\dots 3} \cdot$$

Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Suy ra

$$\sin^{2n}(x) < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$\Leftrightarrow I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$. Theo công thức (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{2n(2n-2)\dots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5.3} &< \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \pi}{2n(2n-2)\dots 2 \cdot 2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3} \\ \Rightarrow \left[\frac{2n(2n-2)\dots 4.2}{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3} \right]^2 \frac{1}{2n+1} &< \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3} \right]^2 \frac{1}{2n} \\ \Leftrightarrow \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} &< \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} \quad (*). \end{aligned}$$

b) Tính $K = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Nhận xét. $f(t) = (1+t)e^{-t}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = 0$. Do đó với $t \neq 0$ sẽ có

$$(1+t)e^{-t} < 1. \text{ Từ đó } 1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (1 - x^2)^n < e^{-nx^2} < \frac{1}{(x^2 + 1)^n}, 0 < x < 1$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 (1 - x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

trong đó

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$\int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} K,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

Vậy

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 (2n-1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (**)$$

Từ công thức (*) ta được: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$

Từ (**) cho $n \rightarrow \infty$ suy ra $K^2 = \frac{\pi}{4}$ và $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Ví dụ 5.5. Tính $I = \int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx, \forall t \geq 1.$

Chứng minh rằng

$$t^t \geq \left(\frac{t+1}{2} \right)^{t+1}, \forall t \geq 1.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ v' = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x(1+x)} dx = - \frac{\ln t}{1+t} + \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^t = - \frac{\ln t}{1+t} + \frac{\ln t}{1+t} + \ln 2.$$

Vì

$$f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} \geq 0, \forall x \in [1, t], I \geq 0$$

$$t - \frac{\ln t}{1+t} + \ln t - \ln(1+t) + \ln 2 \geq 0$$

Suy ra

$$- \ln t + (t+1) \ln t - (t+1) \ln(t+1) + (t+1) \ln 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1) \ln 2t \geq (t+1) \ln(t+1) + \ln t \Leftrightarrow \ln(2t)^{t+1} \geq \ln(t+1)^{t+1} t$$

$$\Leftrightarrow (2t)^{t+1} \geq (t+1)^{t+1} t \Leftrightarrow t^t \geq \left(\frac{t+1}{2} \right)^{t+1}, \forall t \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$.

Ví dụ 5.6. Với $1 < a < b$. Chứng minh

$$(a-b) \ln ab \leq 2(a \ln a - b \ln b + a + b) \leq (a-b) \ln \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = x^2$ khả tích trên $[a, b]$ với $a > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{x^2} dx} &\leq e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln x dx} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{b-a}{-\frac{1}{x} \Big|_a^b} \leq e^{\frac{2(a \ln a - b \ln b + a + b)}{b-a}} \leq \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} \end{aligned}$$

$$(a-b) \ln ab \leq 2(a \ln a - b \ln b + a + b) \leq (a-b) \ln \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Ví dụ 5.7. Với $0 < x < y$. Chứng minh

$$e^{x+y} (x-y)^2 \leq (x-y) \left(e^{\frac{3x+y}{2}} - e^{\frac{x+3y}{2}} \right) \leq (e^x - e^y)^2.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = e^t$ khả tích trên $[x, y]$ với $x > 0$. Khi đó

$$\frac{y-x}{\int_x^y \frac{1}{e^t} dt} \leq e^{\frac{1}{y-x} \int_x^y t dt} \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y e^t dt$$

$$\Leftrightarrow e^{x+y} (x-y)^2 \leq (x-y) \left(e^{\frac{3x+y}{2}} - e^{\frac{x+3y}{2}} \right) \leq (e^x - e^y)^2.$$

Nhận xét. Với các ví dụ trên ta dùng tích phân giải được dễ dàng nếu dùng phương pháp khác sẽ gặp nhiều khó khăn. Để thấy được hiệu quả của việc dùng tích phân để chứng minh bất đẳng thức, các ví dụ sau sẽ sử dụng các ứng dụng của tích phân để tạo ra những bất đẳng thức và chỉ có sử dụng tích phân mới chứng minh được.

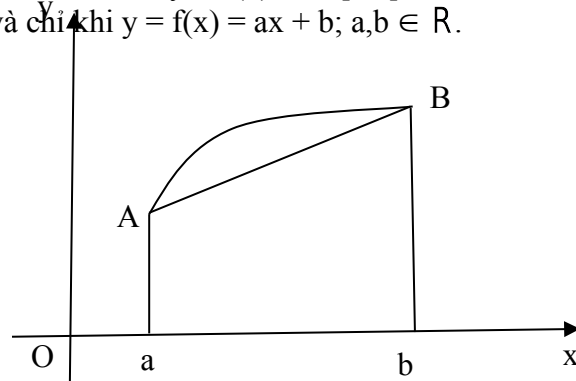
Vấn đề 6.

Sử Dụng Công Thức Tính Độ Dài Cung Phẳng

Bài toán. Cho cung AB của đồ thị hàm liên tục $y = f(x)$ trên $[a, b]$ thì độ dài l của cung AB là

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

Bài toán 6.1. Cho cung AB của đồ thị hàm liên tục $y = f(x)$ trên $[a, b]$. Gọi l là độ dài cung AB thì $l \geq AB$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$.



Ví dụ 6.1.1. Chứng minh $\sqrt{a(a+4)} + 4 \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a+4}) \geq \sqrt{a(a+4)} + 4 \ln 2, \forall a > 0$.

Lời giải

Xét hàm số $y = 4\sqrt{x}$ và hai điểm $O(0,0)$, $A(a, 4\sqrt{a})$. Khi đó

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{4}{x}} dx = \int_0^{\sqrt{2a}} \sqrt{t^2 + 8} dt = \sqrt{a(a+4)} + 4 \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+4}}{2}$$

$$OA = \sqrt{a^2 + 16a}$$

Từ $l > OA$ Suy ra đpcm.

Ví dụ 6.1.2. Cho a là số không âm. Chứng minh

$$2a\sqrt{1+4a^2} + \ln(2a + \sqrt{1+4a^2}) \geq 4a\sqrt{1+a^2}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = ax^2$ và hai điểm $O(0,0)$, $A(1,0)$. Khi đó $OA = \sqrt{1+a^2}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2} dx$$

Đặt $t = 2ax, dt = 2adx$. Suy ra

$$l = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{4a} \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right] \Big|_0^{2a} = \frac{1}{4a} \left[2a\sqrt{1+4a^2} + \ln \left(2a + \sqrt{1+4a^2} \right) \right]$$

Từ $l \geq OA$ suy ra

$$2a\sqrt{1+4a^2} + \ln(2a + \sqrt{1+4a^2}) \geq 4a\sqrt{1+a^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 6.1.3. Chứng minh với $0 \leq a \leq b$ thì ta có

$$2 \left[(1+9b)\sqrt{1+9b} - (1+9a)\sqrt{1+9a} \right] \geq 27\sqrt{4a^3+4b^3-8ab\sqrt{ab}+a^2+b^2-2ab}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = \sqrt{x^3}$ và hai điểm $A(a, 2a\sqrt{a}), B(b, 2b\sqrt{b})$.

Ta có $AB = \sqrt{4a^3+4b^3-8ab\sqrt{ab}+a^2+b^2-2ab}$ và $y' = 3\sqrt{x}$ nên độ dài cung AB là

$$l = \int_a^b \sqrt{1+9x} dx = \frac{2}{27} (1+9x)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^b = \frac{2}{27} \left[(1+9b)\sqrt{1+9b} - (1+9a)\sqrt{1+9a} \right].$$

$$\text{Vậy } \frac{2}{27} \left[(1+9b)\sqrt{1+9b} - (1+9a)\sqrt{1+9a} \right] \geq \sqrt{4a^3+4b^3-8ab\sqrt{ab}+a^2+b^2-2ab}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 6.1.4. Chứng minh với $0 < a \leq b < \frac{\pi}{2}$ thì ta có

$$\ln \left(\tan \frac{b}{2} \right) - \ln \left(\tan \frac{a}{2} \right) \geq \sqrt{(a-b)^2 + (\ln(\sin a) - \ln(\sin b))^2}.$$

Lời giải

Xét hàm $y = \ln(\sin x)$ và $A(a, \ln(\sin a)), B(b, \ln(\sin b))$. ta có

$AB = \sqrt{(a-b)^2 + (\ln(\sin a) - \ln(\sin b))^2}$ và $y' = \cot x$ nên độ dài cung AB là

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\cos^2 x} dx = \int_a^b \frac{1}{\sin x} dx = \ln \tan \frac{x}{2} \Big|_a^b = \ln \tan \frac{b}{2} - \ln \tan \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } \ln \left(\tan \frac{b}{2} \right) - \ln \left(\tan \frac{a}{2} \right) \geq \sqrt{(a-b)^2 + (\ln(\sin a) - \ln(\sin b))^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Ví dụ 6.1.5. Chứng minh với $0 \leq a \leq b$ thì ta có

$$b\sqrt{1+b^2} - a\sqrt{1+a^2} + \ln \frac{b+\sqrt{1+b^2}}{a+\sqrt{1+a^2}} \geq (b-a)\sqrt{a^2+b^2+2ab+4}.$$

Lời giải

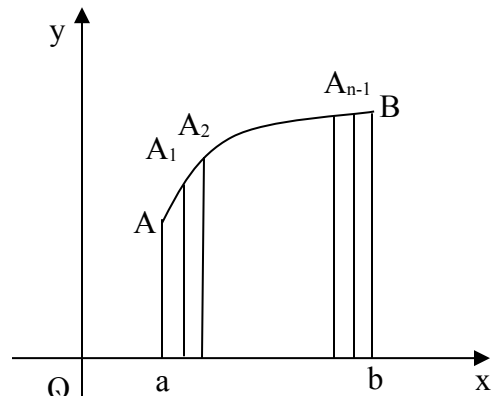
Xét hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(a, \frac{1}{2}a^2), B(b, \frac{1}{2}b^2)$.

Ta có $AB = \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{a^2+b^2+2ab+4}$ và $y' = x$ nên độ dài cung cần tìm là

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{b}{2} \sqrt{1+b^2} + \frac{1}{2} \ln \left(b + \sqrt{1+b^2} \right) - \frac{a}{2} \sqrt{1+a^2} - \frac{1}{2} \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \\ &= \frac{b}{2} \sqrt{1+b^2} - \frac{a}{2} \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \sqrt{1+b^2}}{a + \sqrt{1+a^2}} \end{aligned}$$

ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài toán 6.2. Cho cung AB của đồ thị hàm liên tục $y = f(x)$ trên $[a, b]$. Trên cung AB lấy n điểm $A_1 = A, A_2, \dots, A_n = B$. Gọi l, d là độ dài cung AB và độ dài đường gấp khúc $A_1 = A, A_2, \dots, A_n = B$ thì ta có $l \geq d$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = ax + b$; với $a, b \in \mathbb{R}$.



Ví dụ 6.2.1. Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 2\pi$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} + \sqrt{(c-b)^2 + (\sin c - \sin b)^2} + \sqrt{(d-c)^2 + (\sin d - \sin c)^2} - 4 - 2\pi \leq 0$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x$ trên $[0, 2\pi]$ và các điểm

$A(a, \sin a), B(b, \sin b), C(c, \sin c), D(d, \sin d), O(0, 0), M(2\pi, 0)$.

Từ $l \geq d$ ta có

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} + \sqrt{(c-b)^2 + (\sin c - \sin b)^2} + \sqrt{(d-c)^2 + (\sin d - \sin c)^2} \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{Mà } \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \leq \int_0^{2\pi} (1 + |\cos x|) dx \leq 4 + 2\pi.$$

Suy ra

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} + \sqrt{(c-b)^2 + (\sin c - \sin b)^2} + \sqrt{(d-c)^2 + (\sin d - \sin c)^2} \leq 4 + 2\pi$$

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6.2.2. Cho $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i+1}^2} - \sqrt{1 - x_i^2} \right)^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ và các điểm $A_i(x_i, \sqrt{1 - x_i^2}), i = \overline{1, n}$, với $A = A_1, B = A_n$.

Từ $l \geq d$ ta được

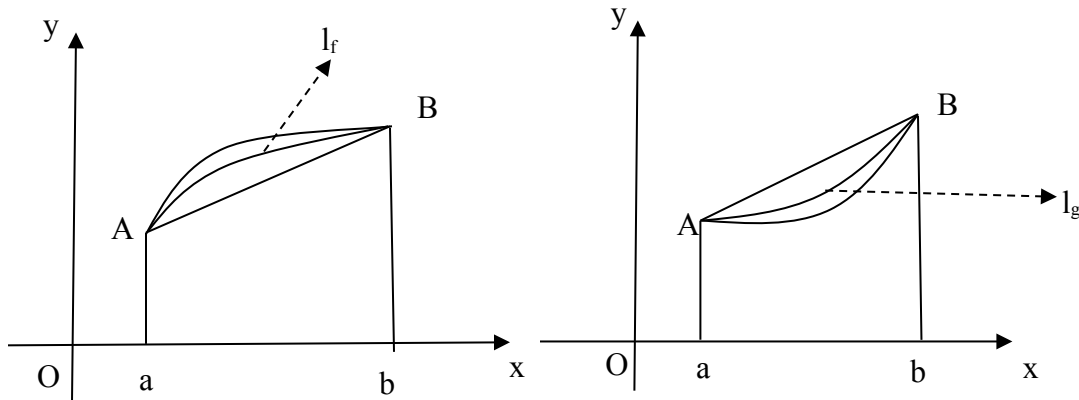
$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i+1}^2} - \sqrt{1 - x_i^2} \right)^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Đẳng thức không xảy ra.

Bài toán 6.3. Cho hai hàm $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$

gọi l_f, l_g là độ dài cung phẳng của đồ thị hàm f, g trên $[a, b]$.

1. Nếu đồ thị $f(x), g(x)$ lồi và $f(x) \geq g(x)$ thì $l_f \geq l_g$.
2. Nếu đồ thị $f(x), g(x)$ lõm và $f(x) \geq g(x)$ thì $l_f \leq l_g$.



Ví dụ 6.3.1. Chứng minh nếu $0 \leq a < 1$ thì

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{4a^3 - a + 1 - 2a\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} \right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{4a^3 - a + 1 + 2a\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} \right)^{-2} + \left(\frac{\sqrt{4a^3 - a + 1 + 2a\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} \right)^2 \\
& - \left(\frac{\sqrt{4a^3 - a + 1 - 2a\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} \right)^2 + \ln \left(\frac{\sqrt{4a^3 - a + 1 + 2a\sqrt{a}}}{\sqrt{4a^3 - a + 1 - 2a\sqrt{a}}} \right) \geq a \left(\frac{\sqrt{3a+1} + 2\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right)^{-2} \\
& - a \left(\frac{\sqrt{3a+1} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right)^{-2} + a \left(\frac{\sqrt{3a+1} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right)^2 - a \left(\frac{\sqrt{3a+1} + 2\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right)^2 \\
& + 4a \ln a \left(\frac{\sqrt{3a+1} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{3a+1} + 2\sqrt{a}} \right)^2
\end{aligned}$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = ax^2 - a$ và $y = g(x) = x^2$

với $0 \leq a < 1$. Ta có $f(x) \leq g(x)$ và đồ thị lõm trên $[0, 1]$ nên $l_f \geq l_g$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 6.3.2. Chứng minh nếu $0 \leq a < 1$ thì

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{4a^2 + 4a + 2 - 2a - 1} \right)^{-1} + \left(\sqrt{4a^2 + 4a + 2 + 2a - 1} \right)^{-2} + \left(\sqrt{4a^2 + 4a + 2 + 2a - 1} \right)^2 \\
& - \left(\sqrt{4a^2 + 4a + 2 - 2a - 1} \right)^2 + \ln \left| \frac{\sqrt{4a^2 + 4a + 2 + 2a - 1}}{\sqrt{4a^2 + 4a + 2 - 2a - 1}} \right| \geq 2 \left(\sqrt{a^2 + 2a + 2 - a - 1} \right)^{-2} \\
& - 2 \left(\sqrt{a^2 - 2a + 2 + a - 1} \right)^{-2} + 2 \left(\sqrt{a^2 - 2a + 2 + a - 1} \right)^2 \\
& - 2 \left(\sqrt{a^2 + 2a + 2 - a - 1} \right)^2 + 8 \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + 2a + 2 + a - 1}}{\sqrt{a^2 + 2a + 2 - a - 1}} \right|
\end{aligned}$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 + (1-2a)x$ và $y = g(x) = x^2 + (1-a)x$, với $a > 0$.

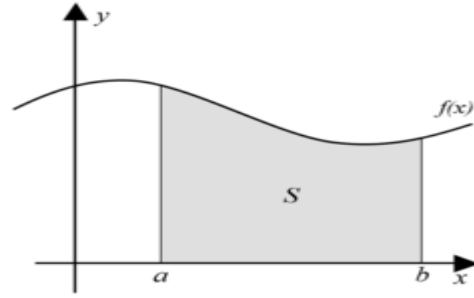
Ta có $f(x) \leq g(x)$ và đồ thị lõm trên $[0, a]$ nên $l_f \geq l_g \Rightarrow$ đpcm.

Vấn đề 7.

Sử Dụng Công Thức Tính Diện Tích Hình Phẳng

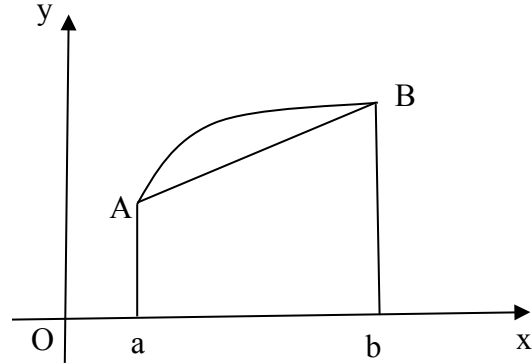
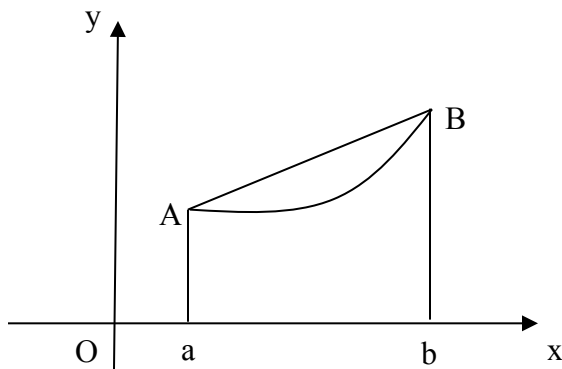
Bài toán. Cho $f(x)$ liên tục, không âm trên $[a, b]$

thì diện tích giới hạn bởi $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ là $S = \int_a^b f(x)dx$.



Bài toán 7.1. Cho $y = f(x)$ liên tục không âm trên $[a, b]$. Gọi S là diện tích giới hạn bởi $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, S_{ht} là diện tích hình thang có cạnh đáy là $f(a)$, $f(b)$ và chiều cao $b-a$. Khi đó ta có

1. $y = f(x)$ có đồ thị lồi thì $S \geq S_{ht}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
2. $y = f(x)$ có đồ thị lõm thì $S \leq S_{ht}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.



Ví dụ 7.1.1.

Cho $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh $2(\cos a - \cos b) \geq (b - a)(\sin a + \sin b)$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \sin x$, lồi trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Từ $S \geq S_{ht}$ suy ra đpcm.

Ví dụ 7.1.2. Cho $0 \leq a \leq b$. Chứng minh $\ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} \leq b\sqrt{a^2 + 1} - a\sqrt{b^2 + 1}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ lõm trên $[a, b]$, $x \geq 0$.

Từ bất đẳng thức $S \leq S_{ht}$ suy ra đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 7.1.3. Cho $0 \leq a \leq b$. Chứng minh $\left(\frac{b}{a}\right)^{a+b} \geq e^{2(b-a)}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \ln x$ lồi trên $[a, b]$, $x > 0$.

Từ $S \geq S_{ht}$ suy ra đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài toán 7.2. Cho $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$. Gọi S là diện tích hình thang

cong giới hạn bởi $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ thì $S = \int_a^b f(x) dx$.

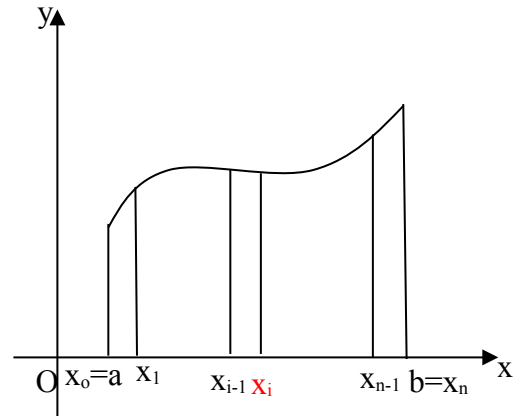
Gọi S_1 là tổng diện tích n hình chữ nhật có cạnh là $\frac{b-a}{n}$ cạnh kia là

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1}) \text{ thì } S_1 = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Gọi S_2 là tổng diện tích n hình chữ nhật có cạnh là $\frac{b-a}{n}$ cạnh kia là $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ thì

$$S_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

Gọi S_3 là tổng diện tích hình thang có chiều cao là $\frac{b-a}{n}$, hai cạnh đáy là $f(x_0)$ và $f(x_1)$, $f(x_1)$ và $f(x_2)$, $\dots$, $f(x_{n-1})$ và $f(x_n)$ thì



$$S_3 = \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \right].$$

Khi đó ta có

1) Nếu f đồng biến thì $S_1 \leq S \leq S_2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = \alpha x + \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Nếu f nghịch biến thì $S_1 \geq S \geq S_2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = \alpha x + \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3) Nếu đồ thị $y = f(x)$ lồi thì $S_3 < S$.

4) Nếu đồ thị $y = f(x)$ lõm thì $S < S_3$.

Ví dụ 7.2.1. Chứng minh với $\forall n \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$\frac{2n\sqrt{n}}{3} < 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \left(\frac{4n+3}{6} \right) \sqrt{n}.$$

Lời giải

Xét hàm $y = \sqrt{x}$ trên $[a, b]$ tăng, đồ thị lồi, ta có

$$S = \int_0^n \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} n\sqrt{n}$$

$$S_3 = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$S_2 = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$$

Từ $S_3 < S < S_2$. Suy ra đpcm.

Ví dụ 7.2.2. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{4}{5}} e^{1-n} n^n < n! < n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = \ln x$ trên $[1, n+1]$ tăng, đồ thị lõm ta có

$$S = \int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3) + \dots + \frac{1}{2} (\ln(n-1) + \ln n) = \ln n! - \frac{1}{2} \ln n$$

Gọi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ là các điểm trên trục ox có hoành độ lần lượt là $1, 2, 3, \dots, n$

$M_2, M_3, \dots, M_n$ là các điểm có tọa độ $(2, \ln 2); (3, \ln 3); \dots; (n, \ln n)$

$A_{\frac{5}{4}}, A_{\frac{3}{2}}, A_{\frac{5}{2}}, \dots, A_{n-\frac{1}{2}}, A_{n+\frac{1}{2}}$ là các điểm trên trục ox có hoành độ lần lượt là

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}.$$

Khi đó S_4 là tổng $(n-1)$ diện tích hình thang có các đường trung bình $A_i M_i$ ($i = 2, 3, \dots$) có các đáy là các đoạn chắn bởi tiếp tuyến với đồ thị $y = \ln x$ tại M_i với các đường song song với trục tung xuất phát từ các điểm $A_{i-\frac{1}{2}}, A_{i+\frac{1}{2}}$ và hai cạnh bên nằm trên ox và trên tiếp

tuyến với đồ thị tại M_i cộng thêm hình thang nhỏ có đường trung bình $A_{\frac{5}{4}}, M_{\frac{5}{4}}$.

$$S_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + 1 \ln 2 + 1 \ln 3 + \dots + 1 \ln(n-1) + 1 \ln n = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + \ln n!$$

$$\text{Ta có } S_3 < S < S_4 \Leftrightarrow \ln n! - \frac{1}{2} \ln n < n \ln n - n + 1 < \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + \ln n!$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{5}} e^{1-n} n^n < n! < n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}.$$

Ví dụ 7.2.3. Chứng minh, với $n \in \mathbb{R}, n > 0$, ta có

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{n+2}{2n+2}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$ giảm và lõm trên $[1, n+1]$ nên $S_2 < S < S_3$ ta có

$$S = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$S_2 = \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right] = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}$$

$$S_3 = \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \right] = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{n+2}{2n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{n+2}{2n+2}.$$

Ví dụ 7.2.4. Cho $n \in \mathbb{R}, n > 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{2}{\pi} n < 1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = \cos x$ nghịch biến, lời trên $[0, 1]$ nên $S_3 < S < S_1$ ta có $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

$$S_1 = \frac{b-a}{n} \left[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \left[1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} + \cos \frac{n\pi}{2n} \right]$$

$$S_3 = \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \left[\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} + \frac{1 + \cos \frac{n\pi}{2n}}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{2}{\pi} n < 1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Bài toán 7.3. Cho $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$. Gọi S là diện tích giới hạn bởi $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$ với phép phân hoạch trên $[a, b]$ bởi các điểm chia

$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+1} = b$. Gọi S_1 là tổng diện tích n hình chữ nhật có cạnh $x_{i+1} - x_i$,

$f(x_i)$ thì $S_1 = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(x_i), i = \overline{0, n}$. Gọi S_2 là tổng diện tích n hình chữ nhật có

cạnh $x_{i+1} - x_i, f(x_{i+1})$ thì $S_2 = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}), i = \overline{0, n}$. Gọi S_3 là tổng diện tích n

hình thang có chiều cao $x_{i+1} - x_i$, hai đáy $f(x_i), f(x_{i+1})$ thì

$$S_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) [f(x_{i+1}) + f(x_i)], i = \overline{0, n}.$$

Khi đó ta có

1) Nếu f đồng biến thì $S_1 < S < S_2$.

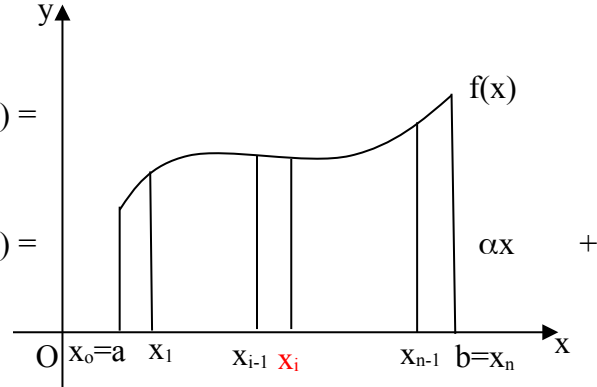
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = \alpha x + \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Nếu f nghịch biến thì $S_1 > S > S_2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = f(x) = \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3) Nếu đồ thị $y = f(x)$ lõm thì $S_3 < S$.

4) Nếu đồ thị $y = f(x)$ lồi thì $S < S_3$.



Ví dụ 7.3.1. Cho $0 \leq x \leq y \leq 1$. Chứng minh

$$2[1 + x + (y - x)e^x + (1 - y)e^y] \leq 2e \leq 2 + (1 - y)e + x + ye^x + (1 - x)e^y.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = e^t$ tăng, lõm trên $[0, 1]$. Khi đó: $S_1 < S < S_3$ với

$$S_1 = x + (y - x)e^x + (1 - y)e^y$$

$$S = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

$$S_3 = \frac{1}{2} [x(1 + e^x) + (y - x)(e^x + e^y) + (1 - y)(e + e^y)]$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 7.3.2. Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq y \leq 1$. Chứng minh

$$x + y\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)\sqrt{1 - y^2} < \frac{\pi}{2} < 2 \left[x + (y - x)\sqrt{1 - x^2} + (1 - y)\sqrt{1 - y^2} \right].$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$ nghịch biến, lõm trên $[0, 1]$ nên $S_3 < S < S_1$

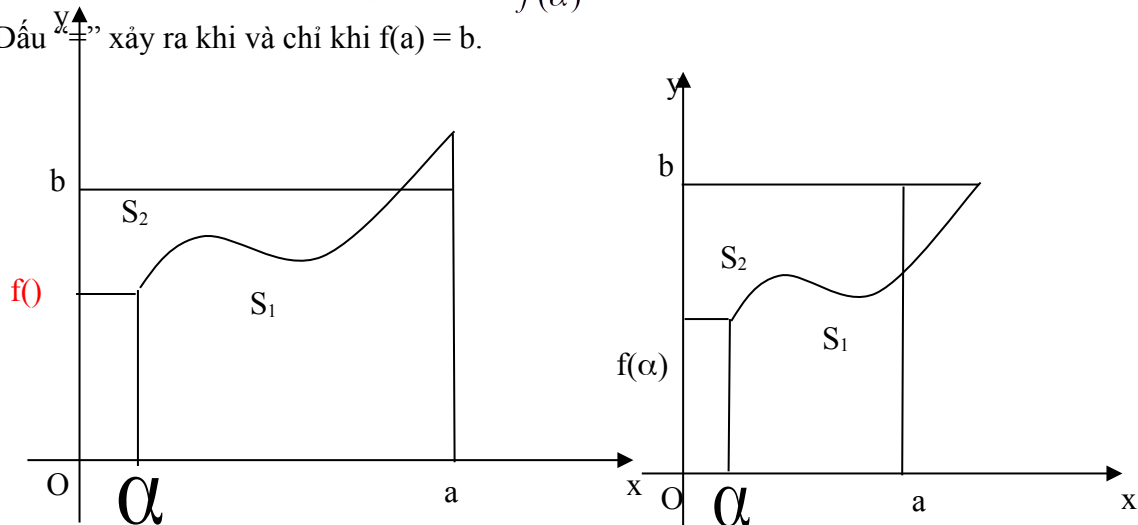
$$S = \frac{\pi}{4}, S_3 = \frac{1}{2} [x + y\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)\sqrt{1 - y^2}], S_1 = x + (y - x)\sqrt{1 - x^2} + (1 - y)\sqrt{1 - y^2}$$

Suy ra đpcm.

Bài toán 7.4. Cho $y = f(x)$ liên tục, không âm và tăng trên $[0, c]$ với $c > 0$. Khi đó $\forall a \in$

$[0, c]$, $\forall b \in [f(0), f(c)]$ ta có $\int_{\alpha}^a f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^b f^{-1}(x) dx \geq ab - \alpha f(\alpha)$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$.



Chứng minh

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi $x = \alpha, x = a, y = 0, y = f(x)$ thì $S_1 = \int_{\alpha}^a f(x)dx$.

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi $y = f(\alpha), y = b, x = 0, x = f^{-1}(y)$ thì

$S_2 = \int_{f(\alpha)}^b f^{-1}(y)dy$. Gọi S là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ thì $S = ab$. Gọi S' là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0, x = \alpha, y = 0, y = f(\alpha)$ thì $S' = \alpha f(\alpha)$. Trong hai trường hợp $b < f(a), b > f(a)$, ta đều có $S_1 + S_2 \geq S - S'$. Đặc

biệt $\alpha = 0$ hoặc $f(\alpha) = 0$ thì $S_1 + S_2 \geq S$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$.

Hệ quả. Cho $y = f(x)$ liên tục, không âm và tăng trên $[0, c]$ với $c > 0$. Khi đó $\forall a \in [0, c], \forall b \in [f(0), f(c)]$ ta có

$$\int_0^a f(x)dx + \int_{f(0)}^b f^{-1}(y)dy \geq ab.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$.

Ví dụ 7.4.1. Cho $a \geq 0, b \geq 1, ab = \sqrt{2}$. Chứng minh

$$a\sqrt{1+a^2} + a\sqrt{b^2-1} + \ln \frac{a+\sqrt{1+a^2}}{b+a\sqrt{b^2-1}} \geq 2.$$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2}$ liên tục, không âm, tăng trên $(0, +\infty)$, $f(0) = 1$ và hàm ngược $y = \sqrt{x^2-1}$. Ta có

$$\int_0^a \sqrt{x^2+1}dx + \int_1^b \sqrt{x^2-1}dx \geq ab = \sqrt{2} \Leftrightarrow a\sqrt{1+a^2} + a\sqrt{b^2-1} + \ln \frac{a+\sqrt{1+a^2}}{b+a\sqrt{b^2-1}} \geq \sqrt{2}.$$

Ví dụ 7.4.2. Cho $p > 1, q > 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab, \forall a, b > 0$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^{p-1}, x > 0$. Vì $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nên $x = y^{q-1}$. Do đó ta có hàm ngược $y^q = x^{q-1}$. Ta

$$\text{có } \int_0^a x^{p-1}dx + \int_1^b x^{q-1}dx \geq ab \Leftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $b = f(a) = a^{p-1}$.

Nhận xét.

🔱 Bài toán ở vấn đề 1 là một trường hợp riêng của bài toán 7.1.

🔱 Cho hàm số $y = f(x) > 0$, với $x \in [a, b]$. Với mọi phép phân hoạch $[a, b]$ bởi các điểm chia $a = a_0 \leq a_1 < \dots < a_n = b$, ta có

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \min(f(a_{n+1}), f(a_i)) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{n+1} - a_i) \max(f(a_{n+1}), f(a_i)) = \underline{S} \end{aligned} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = b \\ f(x) = \text{const} \end{cases}$

🔱 Phương pháp để ra những dạng toán như trên là

✓ Xác định được hàm số $y = f(x) > 0$ với $x \in [a, b]$.

✓ Chọn được phép phân hoạch và biểu diễn các bất đẳng thức qua $\bar{S}, \underline{S}, \int_a^b f(x) dx$

và dựa vào (*) để kết luận bất đẳng thức. đối với bài toán max, min ta cần lưu ý khả năng dấu “=” xảy ra.

🔱 Ta có thể mở rộng lên cho tích phân 2 lớp như sau

Cho $f(x, y) > 0$ khả tích trên D . Cho mọi phép phân hoạch trên D thành các miền nhỏ có diện tích $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$.

$$\begin{aligned} \text{Gọi } \bar{S} &= \sum_{i=0}^n B_i \min(f(x_{i+1}, y_{i+1}), f(x_i, y_i)) \\ \underline{S} &= \sum_{i=0}^n B_i \max(f(x_{i+1}, y_{i+1}), f(x_i, y_i)) \end{aligned}$$

Khi đó ta có: $\bar{S} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \underline{S}$.

🔱 Qua các ứng dụng hình học của tích phân ta có chung một phương pháp để chứng minh bất đẳng thức đó là

Cho $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$ và gọi $A(a, f(a)), B(b, f(b))$. Chia $[a, b]$ thành n phần bởi các điểm chia: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$. Trên cung AB lấy các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ có hoành độ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

a) Dựa vào độ dài cung AB và độ dài đường gấp khúc $AA_1A_2A_{n-1}B$ ta tạo được một số bất đẳng thức.

b) Dựa vào diện tích hình thang cong giới hạn $x = a, x = b, y = f(x), y = 0$ và diện tích các hình thang nhỏ (hay diện tích các hình chữ nhật nhỏ) ta tạo được một số bất đẳng thức.

BÀI TẬP

1) Chứng minh $\forall n \in \mathbb{R}^*$ ta có $(n+1)^n < n!e^n < (n+1)^{n+\frac{1}{2}}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \arcsin b - \cos 2a + \sqrt{1-b^2}, a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), b \in (0,1), ab = \frac{\pi\sqrt{3}}{n}$$

3) Cho $p > 0, q > 0$ thoả $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Chứng minh $\forall a, b > 0$ ta có $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} > ab$

4) Chứng minh $\forall x, y : 0 < x \leq y$ ta có $|\arctan y - \arctan x| \leq |y - x|$

5) Chứng minh $\forall x$ ta có $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$

6) Chứng minh với $x > y$ ta có $(x - y)(2 - x - y) < 2 \ln \frac{1+x}{1+y}$

7) Với $a, b \geq 1$ chứng minh $ab \geq e^{a-1} + b \ln b$

8) Chứng minh $\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} \geq \frac{\pi}{4} n^2$

9) Chứng minh $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \leq 1 - \frac{4}{\pi^2}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

10) Cho $0 < a < b$ chứng minh $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

11) Cho dãy $\{a_i\} : 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 1$. Chứng minh rằng

$$(a_2 - a_1)a_1^2 + (a_n - a_{n-1})a_{n-1}^2 + (1 - a_n)a_n^2 < \frac{1}{3} < a_1^3 + (a_2 - a_1)a_1^2 + \dots + (a_n - a_{n-1})a_n^2 + (1 - a_n)$$

12) Chứng minh rằng $\forall b > 0, 0 < a < \frac{\pi}{2}$ ta có

$$\arctan b \geq ab + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) + \ln(\cos a)$$

13) Chứng minh rằng $0 \leq x_1, x_2 \leq 3$ ta có

$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x_2 - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \leq 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

PHỤ LỤC

Giới thiệu một số hàm lồi và hàm lõm

1) Một số hàm lồi.

$$f(x) = x^\alpha, x > 0, \alpha < 0$$

$$f(x) = (a - x)^\alpha, a > 0, x \in (0, a), \alpha < 0$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha, x > 0, \alpha > 1$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x + a}, a > 0, x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$$

$$f(x) = \frac{x}{a - x}, a > 0, x \in (0, a)$$

$$f(x) = e^{ax}, a > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{ax}}, x \geq 0, a \geq 1$$

$$f(x) = \left(e^{ax} + \frac{1}{e^{ax}}\right)^2$$

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), x > 0$$

$$f(x) = \ln(1 + e^{ax}), a > 0$$

$$f(x) = \ln\left(e^{ax} + \frac{1}{e^{ax}}\right)$$

$$f(x) = \sin^k x, x \in (0, \pi), k < 0$$

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right), x \in (0, \pi)$$

$$f(x) = \cos^k x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), k < 0$$

$$f(x) = \tan^k x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), k \geq 1$$

2) Một số hàm lõm.

$$f(x) = x^\alpha, x > 0, 0 < \alpha < 1$$

$$f(x) = (a - x)^\alpha, a > 0, x \in (0, a), 0 < \alpha < 1$$

$$f(x) = \ln x^{\frac{1}{n}}, x > 1, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \ln(e^{ax} - 1), x > 0, a > 0$$

$$f(x) = \ln x, x > 0$$

$$f(x) = \cos^k x, x \in [0, \frac{\pi}{2}], k \in [0, 1]$$

$$f(x) = \sin^k x, x \in [0, \pi], k \in [0, 1]$$

$$f(x) = \ln(\sin x), x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}, x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = \ln(1 - \cos x), x \in (0, \pi)$$

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}, x \geq 0$$

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{a+x}, a > 0, x > 0$$

$$f(x) = \arctan x, x > 0$$

KẾT LUẬN

Tiểu luận đã tập trung nghiên cứu một số vấn đề chính sau đây.

1. Đã cụ thể hoá các tính chất đại số của lý thuyết tích phân xác định bằng những bài toán và ví dụ cụ thể. Tiểu luận còn đưa ra bảng một số hàm lồi, hàm lõm trong phần phụ lục để phục vụ cho việc sáng tạo ra bất đẳng thức.
2. Sử dụng tính chất hình học của tích phân để chứng minh bất đẳng thức. Đây là một vấn đề không mới nhưng còn ít tài liệu toán THPT viết về vấn đề này.
3. Trình bày hệ thống các ví dụ áp dụng bao gồm 50 bài, trong đó 28 bài tham khảo trong các tài liệu, còn lại 22 bài được sáng tác dựa trên những kết quả từ các bài toán.

Trong quá trình thực hiện đề tài chúng tôi còn thấy một số vấn đề chưa được đề cập hoặc có nhưng chưa đi sâu nghiên cứu như: dấu hiệu để nhận biết các yếu tố đại số cũng như hình học của tích phân trong các bài toán bất đẳng thức cụ thể, việc mở rộng các tính chất đại số của tích phân xác định cho tích phân 2 lớp, 3 lớp, ...; mở rộng tính chất hình học của tích phân từ không gian 2 chiều lên 3 chiều, sử dụng tích phân để chứng minh các bất đẳng thức chứa các số tổ hợp, nghiên cứu việc dùng tích phân để chứng minh các bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Cosi, ... Vì thời gian không cho phép nên chúng tôi chưa thể thực hiện được những điều mong muốn nhưng chắc chắn trong thời gian đến chúng tôi sẽ tập trung tìm hiểu và đề tâm nhiều hơn về những vấn đề còn đặt ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Quý Dy (chủ biên), Nguyễn Văn Nho, Vũ Văn Thoả; Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán, NXBGD.
- [2] Võ Giang Giai, Chuyên đề bất đẳng thức, NXBĐHQG Hà Nội.
- [3] Trần Văn Kỳ, Chọn lọc 394 bài toán bất đẳng thức , giá trị lớn nhất _ giá trị nhỏ nhất, NXBTPHCM.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan, NXB ĐHKHTN Hà Nội.
- [5] Nguyễn Văn Mậu, Bất đẳng thức định lý và áp dụng, NXBGD.
- [6] Hội toán học VN, Tạp chí toán học tuổi trẻ.
- [7] Lê Hồng Đức (2009), Phương pháp giải toán tích phân, NXBĐHSP.
- [8] Nguyễn Văn Nho, Phương pháp giải toán chuyên đề tích phân, NXBĐHQG Hà Nội.
- [9] Trần Thị Vân Anh, Hướng dẫn giải các dạng bài tập từ các đề thi quốc gia môn toán, NXBĐHQG Hà Nội.
- [10] <http://anhngq.wordpress.com/bao-cao-khoa-h%E1%BB%8Dc/>.
<http://www.dayhocintel.net/diendan/showthread.php?p=49662>.
<http://www.khkt.net/chu-de/13251/mot-so-lop-tich-phan-dac-biet/>.
<http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=35223>.
<http://diendantoanhoc.org/old/modules.php?name=News&file=article&sid=275>
<http://www.ebook.edu.vn/?page=1.1&view=2029>.
http://mathsvn.violet.vn/present/show/entry_id/2205346.