1. (HSG tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .
2. (HSG tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* ≥ 2 ta luôn cótrong đó  là số tổ hợp chập *k* của một tập hợp có *n* phần tử.
3. (HSG tỉnh Nghệ An 2015 – 2016) Cho ba số thực dương thay đổi  thỏa mãn:  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



1. (HSG tỉnh Nam Định) Cho phương trình . Chứng minh rằng phương trình có  nghiệm phân biệt  Giả sử , chứng minh rằng:  và .
2. (HSG tỉnh Vĩnh Phúc 2012 – 2013) Cho hai số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh .
3. (THPT Dương Xá 2008 – 2009) Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: . Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết suy ra 

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm ; ;  ta có



Tương tự có







Nhân vế với vế có

 

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi .

1. (HSG tỉnh Trà Vinh 2015) Cho , . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



1. (HSG tỉnh Trà Vinh 2015) Cho  và  . Chứng minh: .
2. (Đề xuất thi HSG khu vực duyên hải 2015 – Hà Nội) Cho  dương thỏa mãn. Chứng minh: .

**Hướng dẫn giải**

Xét 

Ta có 

Đặt  , từ giả thiết có: hay 

Thay vào giả thiết được: hay .

Do đó, 

Suy ra:

Mặt khác: 

Cộng vế  và  có:

Kết hợp  và  ta có đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi.

1. (Đề xuất thi HSG khu vực duyên hải 2015 – Hưng Yên) Cho . Chứng minh rằng$ $.

**Hướng dẫn giải**

Trong ba số  luôn tồn tại hai số có tích không âm (nguyên lý Dirchlet). Không mất tính tổng quát, giả sử .

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

.

Do đó 

Mà 

Suy ra  chính là (1).

Dấu “=” khi và chỉ khi  hoặc  và các hoán vị.

1. (Đề xuất thi HSG khu vực duyên hải 2015 – Phú Thọ) Cho  là các số thực dương thoả mãn . Chứng minh bất đẳng thức

.

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Tương tự có ; .

Do đó, cộng theo vế các bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức Schur cùng giả thiết  ta được



Hay 

Mặt khác 

Từ  và  suy ra 

Do vậy 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

1. (Đề xuất thi HSG khu vực duyên hải 2015 – Thái Nguyên)Cho . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Ta có 



.

Do 

Trong đó .

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1. (Đề xuất thi HSG Trại hè Hùng Vương – Sơn La)Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Theo giả thiết ta có: . Khi đó:

 

Hay ta được :  (1)

Tương tự ta có:  (2)

  (3)

Cộng tương ứng ba bất đẳng thức (1), (2), (3) và áp dụng bất đẳng thức

Áp dụng BĐT Côsi ta có:



Khi đó: .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

1. (Đề xuất thi HSG khu vực duyên hải – Vĩnh Phúc) Cho  là các số thực thỏa mãn **** và . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Đặt 

Khi đó 

.

Do đó x,y là nghiệm của phương trình:  (\*)

Ta có 

Khi đó .

Vậy bài toán quy về việc chứng minh  (1)

và  (2)

Thậy vậy  (đúng)

Và  (đúng)

Vậy bài toán được chứng minh.

1. (Đề xuất thi HSG trại hè Hùng Vương – Hà Giang) Cho ba số thực không âm . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

**Hướng dẫn giải**

Với mọi số thực không âm *x*, *y, z* Ta có:

Mặt khác ta có:

 (Vì

Tương tự ta có (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

Hay .Đặt

Khi đó . Xét hàm số 

(do *t* > 2 nên ) .

Lập bảng biến thiên của hàm số *f*(*t*). Dựa vào bảng biến thiên ta có khi .

1. (Đề xuất thi HSG trại hè Hùng Vương – Lai Châu) Cho  là các số dương thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 



Tương tự ta có: 

Suy ra . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1

Vậy .

1. (HSG tỉnh Vĩnh Long 2016 – 2017) Cho  là ba cạnh của tam giác và  là nửa chu vi. Chứng minh

.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  (1)

Tương tự ta có :  (2);  (3).

Cộng (1), (2) và (3) ⇒ .

 

Mặt khác: (a + b + c) 

** .**

1. (HSG tỉnh Vĩnh Long 2016 – 2017) Giả sử  là những số thực lớn hơn . Cho biểu thức . Tìm giá trị của để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

Theo BĐT Cauchy cho hai số dương:



Tương tự ta có: 

Từ đó suy ra 

Mặt khác ta chứng minh được BĐT: 

Do đó . Dấu đẳng thức xảy ra khi 

Vậy .

1. Cho các số thực dương  thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?
2. Cho các số thực dương  thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng

. Đẳng thức xảy ra khi nào?

1. Biết rằng  . Tìm GTLN, GTNN của .
2. Gọi  là khoảng cách từ một điểm  bất kì nằm trong tam giác  có ba góc nhọn đến các cạnh . Chứng minh rằng ,  là độ dài các cạnh của tma giác,  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Dấu bằng xảy ra khi nào?
3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương , ta đều có:

.

1. Cho các số thực  thỏa mãn . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

, trong đó .

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số với .
2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số với  là số tự nhiên.
3. Cho các số  thay dổi trên  và thỏa mãn điều kiện . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức .
4. Cho  là những số dương. Chứng minh rằng

.

1. Giả sử  là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .
2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số .
3. Tìm GTNN, GTLN của hàm số .
4. Tìm GTNN, GTLN của hàm số .
5. Chứng minh rằng nếu  là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng  thì

.

1. Chứng minh rằng , trong đó  là các số thực dương.
2. Tìm GTNN của biểu thức , trong đó  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện .
3. Tìm GTNN, GTLN của hàm số  trên .
4. Tìm GTNN của biểu thức .
5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương  ta luôn có

.

1. Tìm GTNN của biểu thức  trong đó  là các số thực dương khác .
2. Gọi  và  là GTNN, GTLN của hàm số  trong đó  là các tham số thực. Chứng minh rằng .
3. Tam giác  có  với diện tích . Gọi  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ . Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?