



(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng A

Bài A.1. (6 điểm)

Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$ -không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$f : \mathbb{R}[X]_{2023} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{2023}, \\ p(X) \mapsto p''(X).$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f .

- Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.
- Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\text{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\text{Ker}(g)$.

Bài A.2. (6 điểm)

- Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể
 - Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0, 3 đồng mà nó sản xuất được trước đó và lượng nước tương đương 0, 1 đồng từ nhà máy (W);
 - Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0, 2 đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương 0, 4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

- Cho $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Bài A.3. (6 điểm)

Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$.

- Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.

(b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.

(c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

Bài A.4. (6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y .

(c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Bài A.5. (6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .

(b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

_____ **Hết** _____

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và bất cứ loại máy tính nào. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bài A.1. (Tổng = 6 điểm)

Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$ -không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$f : \mathbb{R}[X]_{2023} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{2023}, \\ p(X) \mapsto p''(X).$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f .

- (a) Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.
- (b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\text{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\text{Ker}(g)$.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Vì mỗi ánh xạ f đều là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của nó cũng là ánh xạ tuyến tính. Do đó ánh xạ g là tuyến tính.

(b): (4 = 2 + 2 điểm) Ảnh của g được sinh bởi các vectơ $g(1), g(X), \dots, g(X^{2023})$. Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k < 1740, \\ k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-1739) X^{k-1740} & \text{nếu } k \geq 1740. \end{cases}$$

Do đó một cơ sở của $\text{Im}(g)$ là $(1, X, X^2, \dots, X^{283})$. Vậy số chiều $\dim(\text{Im}g) = 284$.

Xét một đa thức $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2023}X^{2023}$ tùy ý. Thế thì $g(p)$ có dạng

$$g(p)(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_{283}X^{283}.$$

Đa thức $p(X) \in \text{Ker}(g)$ khi và chỉ khi $b_0 + b_1X + \dots + b_{283}X^{283} = 0$, khi và chỉ khi

$$a_{1740} = a_{1742} = \dots = a_{2023} = 0.$$

Do đó một cơ sở của $\text{Ker}(f)$ là $(1, X, X^2, \dots, X^{1739})$. Vậy số chiều $\dim \text{Ker}(f) = 1740$.

Bài A.2. (A.2=B.3) (Tổng=6 điểm)

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0, 3 đồng mà nó sản xuất được trước đó và lượng nước tương đương 0, 1 đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0, 2 đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương 0, 4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Hướng dẫn giải

(a): (4 điểm) Giả sử x_1, x_2 tương ứng là giá trị (tổng thể) cần sản xuất của hai nhà máy (E) và (W), đo bằng tỷ đồng. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 0, 3x_1 + 0, 2x_2 + 12, \\ x_2 = 0, 1x_1 + 0, 4x_2 + 8. \end{cases}$$

Thật vậy, nhà máy (E) sản xuất được x_1 (tỷ đồng) giá trị về điện thì nó cần dùng $0, 3x_1$ để làm nguyên liệu cho chính nó và chuyển lượng điện tương đương $0, 2x_2$ tỷ đồng cho nhà máy (W), và còn lại lượng điện tương đương 12 tỷ phục vụ người dân. Do đó ta có phương trình thứ nhất. Tương tự ta có phương trình thứ hai. Thế thì $x = Ax + d$ trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0, 3 & 0, 2 \\ 0, 1 & 0, 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$x = (I - A)^{-1}d = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Vậy tổng khối lượng cần sản xuất của nhà máy (E) là 22 tỷ đồng, và của nhà máy (W) là 17 tỷ đồng.

(b): (2 điểm) Với $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta chứng minh $I - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả sử ngược lại $I - A$ không khả nghịch. Thế thì các hàng của ma trận là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại bộ số (α_1, α_2) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 = (0, 0),$$

trong đó α_i là hàng thứ i . Do đó

$$\begin{cases} a_1(1 - a_{11}) - a_2a_{21} = 0, \\ -a_1a_{12} + a_2(1 - a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Không mất tổng quát giả sử $|a_1| = \max\{|a_1|, |a_2|\} > 0$. Từ hệ phương trình trên suy ra

$$a_1 = a_1a_{11} - a_2a_{21}.$$

Do đó

$$0 < |a_1| \leq |a_1|(a_{11} + a_{21}) < |a_1|$$

Điều này vô lý. Vậy điều giả sử là sai, suy ra $I - A$ khả nghịch. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = (I - A)^{-1}d$.

(Nhận xét: khẳng định vẫn đúng cho A là ma trận vuông cấp n bất kỳ.)

Bài A.3. (A.3) (Tổng = 6 điểm)

Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$.

- (a) Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.
- (b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.
- (c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$. Nhận thấy đa thức đạo hàm $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x - 6)$ chỉ có hai nghiệm $x = 0$ (bội 2) và $x = \frac{3}{2}$ (bội 1). Các nghiệm này đều không phải là nghiệm của phương trình ban đầu $P(x) = 0$. Do đó các nghiệm của $P(x) = 0$ là phân biệt.

(b): (2 điểm) Nhận thấy $P(x) = 0$ khi và chỉ khi $x^4 = 2x^3 + 1$. Do đó nếu giả sử $\alpha^3 = \beta^3$ thì $\alpha^4 = \beta^4$. Từ đó suy ra $\alpha = \beta$.

(c): (2 điểm) Đặt $y = x^3$, suy ra $x^4 = 2y + 1$. Lũy thừa 3 cả hai vế suy ra $x^{12} = (2y + 1)^3$, suy ra $y^4 = (2y + 1)^3$. Do đó

$$y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Vậy kết hợp với (b) phương trình $y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$. Do đó theo Định lý Vieta ta có $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 8$.

Bài A.4. (A.4) (Tổng = 6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y .

(c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Nhận thấy A là ma trận chéo hóa được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 1 - \sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}.$$

(b): (2 điểm) Bằng quy nạp ta tính được:

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\sin \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & y \cos x \\ 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

(c): (2 điểm) Ma trận A cấp 2, phần tử phức, luôn đồng dạng (bởi một ma trận C khả nghịch, phần tử phức) với một trong hai ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Thật vậy nếu A không chéo hóa được, thì đa thức đặc trưng có dạng

$$P_A(X) = (X - \lambda)^2.$$

Chọn α_2 tùy ý không thuộc $V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_2)$, và $\alpha_1 = (A - \lambda I_2)(\alpha_2)$ ta có

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2. \end{cases}$$

Do đó với C có các cột là α_1, α_2 thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ta xét hai trường hợp: A chéo hóa được (trên trường phức) và A không chéo hóa được trên trường phức.

Trường hợp 1: A chéo hóa được trên trường phức, nghĩa là tồn tại ma trận khả nghịch với các phần tử phức ($C \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$) sao cho $C^{-1}AC$ là một ma trận chéo. Thế thì

$$A = C \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot C^{-1},$$

trong đó $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo bằng λ_1, λ_2 . Từ tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$A^k = C \cdot \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k) \cdot C^{-1}$$

với mọi số nguyên không âm k . Do đó

$$\sin(A) = C \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) \cdot C^{-1},$$

trong đó

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Thế thì $\sin(A)$ cũng là ma trận chéo hóa được. Điều này mâu thuẫn vì ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

không chéo hóa được.

Trường hợp 2: A không chéo hóa được trên trường phức. Thế thì đa thức đặc trưng có nghiệm kép λ và tồn tại C khả nghịch với các phần tử phức sao cho

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận A có phần tử là các số thực nên vết của A là thực, do đó $\lambda \in \mathbb{R}$. Theo phần (b) ta có:

$$\sin \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & \sin \lambda \end{pmatrix}.$$

Mặt khác

$$\sin \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = C^{-1} \sin(A) C,$$

suy ra

$$C^{-1} \sin(A) C = \begin{pmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & \sin \lambda \end{pmatrix}.$$

Giả sử tồn tại A sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

suy ra $\sin \lambda = 1$, kéo theo $\cos \lambda = 0$ suy ra $C^{-1} \sin(A) C = I_2$. Do đó $\sin(A) = I_2$. Điều này vô lý. Vậy không tồn tại ma trận thỏa mãn đề bài.

Bài A.5. (Tổng = 6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

- (a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .
(b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{3 \times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1, 2, 3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số 0, 1. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b): (4 điểm) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = (a_{ij})_{n \times n}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{n \times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{jk}. \quad (1)$$

Vậy tồn tại $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \neq m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \neq k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $(AA^{-1})_{kl} \geq 1$. Điều này vô lý vì $k \neq l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1, 2, \dots, n\}$. Tương ứng từ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n . Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = (b_{ij})_{n \times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A . Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n . Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.

Thang điểm phần (b):

- Xây dựng ánh xạ từ P_n vào S_n (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là đơn ánh (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là toàn ánh (1 điểm).
- Suy ra đáp số $|P_n|$ (1 điểm).


ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.1** và **B.1**
6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.1	Điểm B.1
a		Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$	2,00	2,00
	1	Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng	1,00	1,00
		Từ định nghĩa $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) = u_n$ với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$	1,00	1,00
		Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.	1,00	1,00
b		Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n	2,00	2,00
	1	Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được $\ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$ Vậy ta có đánh giá $\ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
c		Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ và tính gần đúng giới hạn	2,00	2,00
		Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n) .	1,00	2,00
		Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được $\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$ Từ đó ta có $\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$ Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ ta thu được $\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1 - 1/4} - \frac{1}{2} \frac{1/16}{1 - 1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$ Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số 1, 3.	1,00	
		Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \frac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $ x \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.		



ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.2** và **B.2**

6 điểm

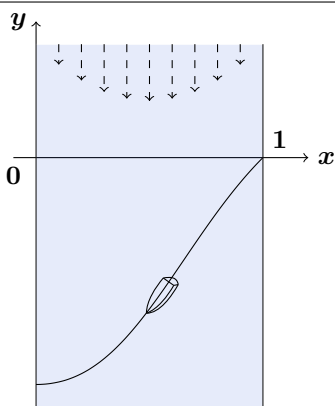
Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.2	Điểm B.2
a		Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0	2,00	2,00
	1	Tính giới hạn của f tại 0	1,00	1,00
		Từ định nghĩa của f ta có $ f(x) = \begin{cases} \frac{ x }{2} & \text{nếu } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Do đó ta luôn có $0 \leq f(x) \leq x \forall x \in [-1, 1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định tính liên tục của f tại 0	1,00	1,00
		Ở bước trước ta đã có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.	1,00	1,00
b		Hàm f có khả vi tại 0 không?	2,00	2,00
	1	Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \rightarrow 0$	1,00	1,00
		Xét sự tồn tại của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$	1,00	1,00
	2	Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \rightarrow 0$ là không tồn tại	1,00	
		Từ định nghĩa của f ta thấy $\lim_{\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q} \nexists x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q} \nexists x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$ Vậy giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.	1,00	1,00
c		Hàm f có giá trị lớn nhất/nhỏ nhất trên đoạn $[-1, 1]$ không?	2,00	2,00
	1	Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1, 1]$	2,00	
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1, 1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \leq 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $ M = f(x_0) = x_0 /2 \leq 1/2$. Vậy ta phải có $M \leq 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1, 1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.	2,00	
	2	Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1, 1]$		2,00
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1, 1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \geq -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $ m = f(x_0) = x_0 /2 \leq 1/2$. Vậy ta phải có $m \geq -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1, 1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.		2,00
		Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên (đúng) (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1, 1]$ của hàm số f , nhưng “cận” này không phải là một giá trị của hàm f .		



ĐÁP ÁN

 Lời giải bài **A.3** và **B.3**

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Con thuyền có đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến không?	2,00
		Con thuyền đến được điểm $(0, 0)$ khi và chỉ khi điểm $(0, 0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}.$ Để thấy điều này là không xảy ra.	2,00
b		Con thuyền có cập được bờ trái hay không?	2,00
		Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Để thấy $y(0) = -\frac{1}{2}$ và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.	2,00
c		Vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0, 0)$ là ngắn nhất	2,00
		Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x, y) trong đó $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$ với $0 \leq x \leq 1$. Khoảng cách từ điểm $(0, 0)$ đến điểm (x, y) là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)^2}.$ Xét hàm số f được xác định bởi $f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)^2$ với $0 \leq x \leq 1$. Trên $[0, 1]$ ta có $f'(x) = \frac{2x(x^9 + 6x^6 - x^5 + 16x^3 + 4x^2 - 3x + 4)}{(x^3 + 2)^3}.$ Để ý rằng $\begin{aligned} x^9 + 6x^6 - x^5 + 16x^3 + 4x^2 - 3x + 4 \\ = x^9 + 6x^6 + x^3(1 - x^2) + 15x^3 + 4x^2 + 3(1 - x) + 1 > 0 \end{aligned}$ nên f đồng biến trên $[0, 1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái. 	2,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4
6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Nếu $\int_0^1 f(x)P(x)^m dx = 0$ với mọi $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [x_1, x_2]$. Đặt $c = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad d = \frac{x_0 + x_2}{2}.$ Ta có $x_1 < c < x_0 < d < x_2$. Xét đa thức $P(x) = (x - c)(d - x) + 1.$ Để thấy $P \geq 0$ trên $[0, 1]$ và $P \geq 1$ trên $[c, d] \subset [x_1, x_2] \subset (0, 1)$. Từ tính đơn điệu của P ta thấy $0 \leq P(x) \leq P(x_1) < 1 \quad \forall x \in [0, x_1]$ và $0 \leq P(x) \leq P(x_2) < 1 \quad \forall x \in [x_2, 1].$ Với đa thức P ở trên ta có đánh giá $\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f(x)P(x)^m dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^c + \int_c^d + \int_d^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq \left(\int_0^{x_1} + \int_c^d + \int_{x_2}^1 \right) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq -P(x_1)^m \int_0^{x_1} f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \\ &\quad - P(x_2)^m \int_{x_2}^1 f(x) dx. \end{aligned}$ Do $0 \leq P(x_1) < 1$ và $0 \leq P(x_2) < 1$ nên qua giới hạn khi $m \rightarrow +\infty$ ta phải có $\int_c^d f(x) dx \leq 0.$ Đây là điều vô lý do f liên tục và $f > 0$ trên $[c, d]$.	3,00
b		Khi điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất	3,00
		Do mọi đa thức $P(x)^m$ đều được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các lũy thừa nguyên không âm của các đa thức bậc 1 nên kết quả của ý (b) vẫn đúng.	3,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Nếu $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ với mọi hàm liên tục g mà $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$ Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2].$ Xét hàm g trên $[0, 1]$ được xác định bởi $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_0, \\ \frac{f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_2 - x) & \text{nếu } x_0 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{nếu } x_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Khi đó $g \geq 0$, liên tục trên $[0, 1]$, và có $g(0) = g(1) = 0$. Với hàm g đó, ta có $\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f(x)g(x)dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_0} + \int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} f(x)g(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x)g(x)dx \\ &\geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{2} > 0. \end{aligned}$ Đây là điều vô lý.	3,00 3,00
b		Kết luận ở ý (b) còn đúng không nếu ta thêm giả thiết $g(1/2) = 0$? Kết luận ở ý (b) vẫn đúng vì lần lượt áp dụng các hàm trong lời giải ý (b) cho đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và cho đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$ ta thu được $f \equiv 0 \text{ trên } [0, \frac{1}{2}] \text{ và trên } [\frac{1}{2}, 1].$ Vậy $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.	3,00 3,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.5****6 điểm**

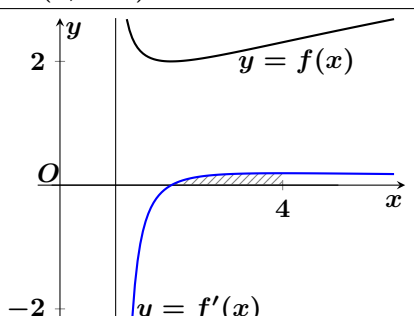
Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Có tồn tại $d \in (0, 1)$ sao cho $f'(d) \leq (f(d))^2$?	2,00
	1	Khẳng định không tồn tại d và đưa ra được 1 ví dụ	1,00
		Xét hàm số f được cho bởi $f(x) = x \quad 0 \leq x \leq 1.$ Khi đó f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$, và có $f(0) = 0$.	1,00
	2	Kiểm tra được tính đúng đắn của ví dụ	1,00
		Tính toán ta thấy $ f'(x) = 1 > x^2 = (f(x))^2$ với mọi $x \in (0, 1)$.	1,00
b		Nếu $f'(x) \leq (f(x))^2$ với mọi $x \in (0, 1)$ thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.	2,00
		Do tính liên tục của f nên ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$ là đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó tập hợp $E = \{x \in [0, x_0] : f(x) = 0\}$ bị chặn (do $E \subset [0, 1]$) và không rỗng (do $0 \in E$). Đặt $x_1 = \sup E$. Dễ thấy $x_1 \in E$ do f liên tục. Điều này có nghĩa là $0 \leq x_1 < x_0$, $f(x_1) = 0$, và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_0]$. Từ đó cùng với giả thiết ta thu được $-1 \leq \frac{f'(t)}{(f(t))^2} \leq 1 \quad \forall t \in (x_1, x_0].$ Lấy tích phân theo t trên đoạn $[x, x_0]$ ở cả 3 vế của bất đẳng thức kép ta thu được $x - x_0 \leq g(x) - g(x_0) \leq x_0 - x,$ trong đó g là hàm số được cho bởi $g(x) = -1/f(x)$. Từ đây ta thu được $g(x) - g(x_0) \leq x_0 - x \quad \forall x \in (x_1, x_0].$ Cho $x \rightarrow x_1^+$ ta thu được điều vô lý.	2,00
c		Tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $(f(c))^2 \leq f'(c)$	2,00
		Do f liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $ f(x) \leq M$ với mọi $x \in [0, 1]$. Nếu $f(c) = 0$ với $c \in (0, 1)$ nào đó thì c chính là điểm cần tìm và do đó ta chỉ cần xét trường hợp $f \neq 0$ trên toàn $(0, 1)$. Do tính liên tục nên ta có thể giả thiết $f > 0$ trên $(0, 1)$. Do $f(0) = 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1/2)$ sao cho $\ln f(x_0) - \ln f\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\frac{M}{2}.$ Theo Định lý Lagrange áp dụng cho hàm $\ln f(x)$ ta có $-\frac{M}{2} \geq \ln f(x_0) - \ln f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \quad \text{với } c \in (x_0, \frac{1}{2}) \text{ nào đó.}$ Từ đây ta thu được $\frac{f'(c)}{f(c)} > 0$ và do đó $-\frac{M}{2} \geq -\frac{1}{2} \frac{f'(c)}{f(c)}$. Vậy $\left \frac{f'(c)}{f(c)}\right = \frac{f'(c)}{f(c)} \geq M$. Ghi chú. Thí sinh có thể giải như sau và vẫn được điểm tối đa. Trong trường hợp $f \equiv 0$, ta có thể chọn $c \in (0, 1)$ tùy ý. Trong trường hợp còn lại, nếu kết luận là sai, tức là $(f(x))^2 > f'(x)$ với mọi $x \in (0, 1)$, thì theo kết luận của ý (b) ta phải có $f \equiv 0$, mâu thuẫn.	2,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1, +\infty)$	2,00
		Để thấy $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ với mọi $x > 1$, và dấu bằng đạt được khi $x = 2$. Vậy hàm f đạt được giá trị nhỏ nhất trên $(1, +\infty)$ tại $x = 2$. Từ đó ta kết luận phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ trên $(1, +\infty)$. 	2,00
b		Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x	2,00
		Tính toán trực tiếp thu được $f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.$	2,00
c		Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình)	2,00
	1	Thiết lập công thức tính $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Hoành độ giao điểm giữa đồ thị của hàm f' và đường thẳng $y = 0$ là $x = 2$. Do f đơn điệu tăng (ngặt) trên $(2, +\infty)$ nên $f' \geq 0$ trên $[2, 4]$. Vậy ta có công thức tính diện tích cần tìm $\int_2^4 f'(x)dx.$	1,00
	2	Tính tích phân $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Theo công thức Newton–Leibniz ta có $\int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2,$ và đây là diện tích cần tìm.	1,00



(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng B

Bài B.1. (6 điểm)

(a) Cho x là một số thực. Tính định thức của ma trận sau theo x :

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm các số thực x sao cho hạng của ma trận A nhỏ hơn 3. Tính hạng của ma trận A với x vừa tìm được.

Bài B.2. (6 điểm)

Giả sử $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số.

(a) Với $\lambda = 3$, hãy tìm

(a1) Một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\text{Ker}(f)$.

(a2) Một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$.

(b) Tìm số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$ như một hàm số của λ .

Bài B.3. (6 điểm)

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0, 3 đồng mà nó sản xuất được trước đó và lượng nước tương đương 0, 1 đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0, 2 đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương 0, 4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

- (b) Cho $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Bài B.4. (6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1$, A^0 là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

- (a) Với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hãy tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

- (b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở phần (a).

Bài B.5. (6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

- (a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .
- (b) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Từ đó hãy tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

————— Hết —————

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và bất cứ loại máy tính nào. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bài B.1. (Tổng = 6 điểm)

(a) Cho x là một số thực. Tính định thức của ma trận sau theo x :

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm các số thực x sao cho hạng của ma trận A nhỏ hơn 3. Tính hạng của ma trận A với x vừa tìm được.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $a = 2022$, ký hiệu định thức của ma trận cần tìm là $f(x)$. Cộng hàng 2 và hàng 3 vào hàng 1 suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x + 2a + 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{pmatrix}, \\ &= -(x + 2a + 1) (x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a + 1), \\ &= -(x + 4045) (x^2 - 4045x + 4090507). \end{aligned}$$

(b): (4 điểm) Hạng của ma trận nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi định thức $f(x) = 0$. Vì biệt thức

$$\Delta = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a + 1) < 0,$$

nên phương trình $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a + 1 = 0$ không có nghiệm thực. Do đó có duy nhất một số thực $x = -2a - 1 = -4045$ để $f(x) = 0$. Vậy số thực duy nhất để hạng của ma trận nhỏ hơn 3 là $x = -4045$. Lúc đó hạng của ma trận bằng hạng của

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2022 & 2023 & -4045 \\ 2023 & -4045 & 2022 \end{pmatrix}.$$

Vậy hạng của ma trận A khi đó bằng 2.

Bài B.2. (Tổng = 6 điểm)

Giả sử $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số.

(a) Với $\lambda = 3$, hãy tìm

(a1) Một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\text{Ker}(f)$.

(a2) Một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$.

(b) Tìm số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$ như một hàm số của λ .

Hướng dẫn giải

Ánh xạ tuyến tính đề bài cho có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$ là

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a1): (2 điểm) Với $\lambda = 3$, hạt nhân $\text{Ker}(f)$ là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất với ma trận hệ số là

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp suy ra số chiều $\dim \text{Ker}(f) = 2$ với một cơ sở

$$(-8, 5, 7, 0); (-17, 1, 0, 7).$$

(a2): (2 điểm) Từ phần (a1), dùng công thức $\dim \text{Im}(f) = n - \dim \text{Ker}(f)$ suy ra số chiều của không gian ảnh bằng $4 - 2 = 2$.

Mặt khác mỗi vectơ thuộc $\text{Im}(f)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột của $A(3)$. Do đó ảnh của ánh xạ f là không gian con sinh bởi các vectơ cột. Chuyển vị ma trận A rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng suy ra một cơ sở của $\text{Im}(f)$ là $(1, 2, 1), (0, 1, -1)$.

(b): (2 điểm) Số chiều của ảnh chính là hạng của ma trận:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp hàng thu được

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & \lambda - 10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda + 12 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda + 12 & 3 \\ 0 & \lambda - 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda + 12 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21} & \frac{\lambda-3}{7} \end{pmatrix}.$$

Vậy $\text{Rank } A = 2$ nếu $\lambda = 3$, và $\text{Rank } A = 3$ nếu $\lambda \neq 3$. Do đó số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$ bằng 2 nếu $\lambda = 3$, và bằng 3 nếu $\lambda \neq 3$.

Bài B.3. (A.2=B.3) (Tổng=6 điểm)

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0, 3 đồng mà nó sản xuất được trước đó và lượng nước tương đương 0, 1 đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0, 2 đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương 0, 4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Hướng dẫn giải

(a): (4 điểm) Giả sử x_1, x_2 tương ứng là giá trị (tổng thể) cần sản xuất của hai nhà máy (E) và (W), đo bằng tỷ đồng. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 0, 3x_1 + 0, 2x_2 + 12, \\ x_2 = 0, 1x_1 + 0, 4x_2 + 8. \end{cases}$$

Thật vậy, nhà máy (E) sản xuất được x_1 (tỷ đồng) giá trị về điện thì nó cần dùng $0, 3x_1$ để làm nguyên liệu cho chính nó và chuyển lượng điện tương đương $0, 2x_2$ tỷ đồng cho nhà máy (W), và còn lại lượng điện tương đương 12 tỷ phục vụ người dân. Do đó ta có phương trình thứ nhất. Tương tự ta có phương trình thứ hai. Thế thì $x = Ax + d$ trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0, 3 & 0, 2 \\ 0, 1 & 0, 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$x = (I - A)^{-1}d = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Vậy tổng khối lượng cần sản xuất của nhà máy (E) là 22 tỷ đồng, và của nhà máy (W) là 17 tỷ đồng.

(b): (2 điểm) Với $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta chứng minh $I - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả sử ngược lại $I - A$ không khả nghịch. Thế thì các hàng của ma trận là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại bộ số (α_1, α_2) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 = (0, 0),$$

trong đó α_i là hàng thứ i . Do đó

$$\begin{cases} a_1(1 - a_{11}) - a_2a_{21} = 0, \\ -a_1a_{12} + a_2(1 - a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Không mất tổng quát giả sử $|a_1| = \max\{|a_1|, |a_2|\} > 0$. Từ hệ phương trình trên suy ra

$$a_1 = a_1a_{11} - a_2a_{21}.$$

Do đó

$$0 < |a_1| \leq |a_1|(a_{11} + a_{21}) < |a_1|$$

Điều này vô lý. Vậy điều giả sử là sai, suy ra $I - A$ khả nghịch. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = (I - A)^{-1}d$.

(Nhận xét: khẳng định vẫn đúng cho A là ma trận vuông cấp n bất kỳ.)

Bài B.4. (Tổng = 6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1$, A^0 là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hãy tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở phần (a).

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Đa thức đặc trưng $P_A(X) = (X - 1)(X - 2)$. Các giá trị riêng là 1 và 2. Các vectơ riêng tương ứng là $(1, 0)^T$, $(-1, 1)^T$. Vậy với ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b): (3 điểm) Từ phần (a) suy ra

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Cùng với tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$e^A = C \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} e & e - e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Bài B.5. (Tổng = 6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

- (a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .
- (b) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Từ đó hãy tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{3 \times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1, 2, 3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số 0, 1. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b): (4 điểm) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = (a_{ij})_{n \times n}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{n \times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{jk}. \quad (1)$$

Vậy tồn tại $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \neq m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \neq k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $(AA^{-1})_{kl} \geq 1$. Điều này vô lý vì $k \neq l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1, 2, \dots, n\}$. Tương ứng từ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n . Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = (b_{ij})_{n \times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A . Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n . Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.

Thang điểm phần (b):

- Xây dựng ánh xạ từ P_n vào S_n (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là đơn ánh (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là toàn ánh (1 điểm).
- Suy ra đáp số $|P_n|$ (1 điểm).


ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.1** và **B.1**
6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.1	Điểm B.1
a		Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$	2,00	2,00
	1	Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng	1,00	1,00
		Từ định nghĩa $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) = u_n$ với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$	1,00	1,00
		Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.	1,00	1,00
b		Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n	2,00	2,00
	1	Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được $\ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$ Vậy ta có đánh giá $\ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
c		Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ và tính gần đúng giới hạn	2,00	2,00
		Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n) .	1,00	2,00
		Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được $\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$ Từ đó ta có $\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$ Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ ta thu được $\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1 - 1/4} - \frac{1}{2} \frac{1/16}{1 - 1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$ Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số 1, 3.	1,00	
		Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \frac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $ x \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.		



ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.2** và **B.2**

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.2	Điểm B.2
a		Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0	2,00	2,00
	1	Tính giới hạn của f tại 0	1,00	1,00
		Từ định nghĩa của f ta có $ f(x) = \begin{cases} \frac{ x }{2} & \text{nếu } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Do đó ta luôn có $0 \leq f(x) \leq x \forall x \in [-1, 1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định tính liên tục của f tại 0	1,00	1,00
		Ở bước trước ta đã có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.	1,00	1,00
b		Hàm f có khả vi tại 0 không?	2,00	2,00
	1	Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \rightarrow 0$	1,00	1,00
		Xét sự tồn tại của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$	1,00	1,00
	2	Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \rightarrow 0$ là không tồn tại	1,00	
		Từ định nghĩa của f ta thấy $\lim_{\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q} \not\ni x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q} \not\ni x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$ Vậy giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.	1,00	1,00
c		Hàm f có giá trị lớn nhất/nhỏ nhất trên đoạn $[-1, 1]$ không?	2,00	2,00
	1	Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1, 1]$	2,00	
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1, 1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \leq 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $ M = f(x_0) = x_0 /2 \leq 1/2$. Vậy ta phải có $M \leq 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1, 1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.	2,00	
	2	Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1, 1]$		2,00
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1, 1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \geq -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $ m = f(x_0) = x_0 /2 \leq 1/2$. Vậy ta phải có $m \geq -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1, 1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.		2,00
		Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên (đúng) (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1, 1]$ của hàm số f , nhưng “cận” này không phải là một giá trị của hàm f .		

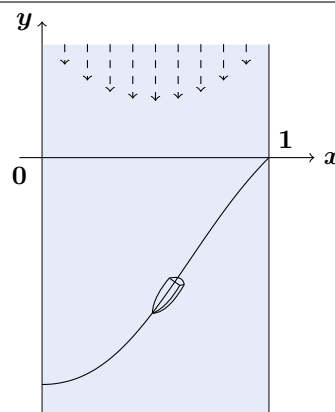


ĐÁP ÁN

 Lời giải bài A.3 và B.3

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Con thuyền có đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến không?	2,00
		Con thuyền đến được điểm $(0, 0)$ khi và chỉ khi điểm $(0, 0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}.$ Để thấy điều này là không xảy ra.	2,00
b		Con thuyền có cập được bờ trái hay không?	2,00
		Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Để thấy $y(0) = -\frac{1}{2}$ và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.	2,00
c		Vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0, 0)$ là ngắn nhất	2,00
		Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x, y) trong đó $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$ với $0 \leq x \leq 1$. Khoảng cách từ điểm $(0, 0)$ đến điểm (x, y) là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)^2}.$ Xét hàm số f được xác định bởi $f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)^2$ với $0 \leq x \leq 1$. Trên $[0, 1]$ ta có $f'(x) = \frac{2x(x^9 + 6x^6 - x^5 + 16x^3 + 4x^2 - 3x + 4)}{(x^3 + 2)^3}.$ Để ý rằng $\begin{aligned} x^9 + 6x^6 - x^5 + 16x^3 + 4x^2 - 3x + 4 \\ = x^9 + 6x^6 + x^3(1 - x^2) + 15x^3 + 4x^2 + 3(1 - x) + 1 > 0 \end{aligned}$ nên f đồng biến trên $[0, 1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái.	2,00





ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4
6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Nếu $\int_0^1 f(x)P(x)^m dx = 0$ với mọi $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [x_1, x_2]$. Đặt $c = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad d = \frac{x_0 + x_2}{2}.$ Ta có $x_1 < c < x_0 < d < x_2$. Xét đa thức $P(x) = (x - c)(d - x) + 1.$ Để thấy $P \geq 0$ trên $[0, 1]$ và $P \geq 1$ trên $[c, d] \subset [x_1, x_2] \subset (0, 1)$. Từ tính đơn điệu của P ta thấy $0 \leq P(x) \leq P(x_1) < 1 \quad \forall x \in [0, x_1]$ và $0 \leq P(x) \leq P(x_2) < 1 \quad \forall x \in [x_2, 1].$ Với đa thức P ở trên ta có đánh giá $\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f(x)P(x)^m dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^c + \int_c^d + \int_d^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq \left(\int_0^{x_1} + \int_c^d + \int_{x_2}^1 \right) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq -P(x_1)^m \int_0^{x_1} f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \\ &\quad - P(x_2)^m \int_{x_2}^1 f(x) dx. \end{aligned}$ Do $0 \leq P(x_1) < 1$ và $0 \leq P(x_2) < 1$ nên qua giới hạn khi $m \rightarrow +\infty$ ta phải có $\int_c^d f(x) dx \leq 0.$ Đây là điều vô lý do f liên tục và $f > 0$ trên $[c, d]$.	3,00
b		Khi điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất	3,00
		Do mọi đa thức $P(x)^m$ đều được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các lũy thừa nguyên không âm của các đa thức bậc 1 nên kết quả của ý (b) vẫn đúng.	3,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Nếu $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ với mọi hàm liên tục g mà $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$ Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2].$ Xét hàm g trên $[0, 1]$ được xác định bởi $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_0, \\ \frac{f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_2 - x) & \text{nếu } x_0 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{nếu } x_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Khi đó $g \geq 0$, liên tục trên $[0, 1]$, và có $g(0) = g(1) = 0$. Với hàm g đó, ta có $\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f(x)g(x)dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_0} + \int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} f(x)g(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x)g(x)dx \\ &\geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{2} > 0. \end{aligned}$ Đây là điều vô lý.	3,00 3,00
b		Kết luận ở ý (b) còn đúng không nếu ta thêm giả thiết $g(1/2) = 0$? Kết luận ở ý (b) vẫn đúng vì lần lượt áp dụng các hàm trong lời giải ý (b) cho đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và cho đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$ ta thu được $f \equiv 0 \text{ trên } [0, \frac{1}{2}] \text{ và trên } [\frac{1}{2}, 1].$ Vậy $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.	3,00 3,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài **A.5****6 điểm**

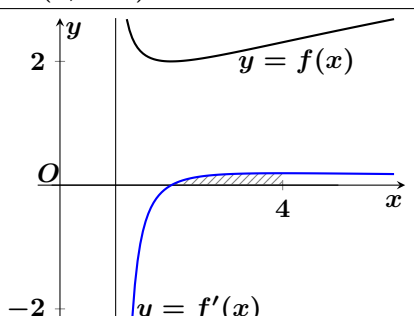
Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Có tồn tại $d \in (0, 1)$ sao cho $f'(d) \leq (f(d))^2$?	2,00
	1	Khẳng định không tồn tại d và đưa ra được 1 ví dụ	1,00
		Xét hàm số f được cho bởi $f(x) = x \quad 0 \leq x \leq 1.$ Khi đó f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$, và có $f(0) = 0$.	1,00
	2	Kiểm tra được tính đúng đắn của ví dụ	1,00
		Tính toán ta thấy $ f'(x) = 1 > x^2 = (f(x))^2$ với mọi $x \in (0, 1)$.	1,00
b		Nếu $f'(x) \leq (f(x))^2$ với mọi $x \in (0, 1)$ thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.	2,00
		Do tính liên tục của f nên ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$ là đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó tập hợp $E = \{x \in [0, x_0] : f(x) = 0\}$ bị chặn (do $E \subset [0, 1]$) và không rỗng (do $0 \in E$). Đặt $x_1 = \sup E$. Dễ thấy $x_1 \in E$ do f liên tục. Điều này có nghĩa là $0 \leq x_1 < x_0$, $f(x_1) = 0$, và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_0]$. Từ đó cùng với giả thiết ta thu được $-1 \leq \frac{f'(t)}{(f(t))^2} \leq 1 \quad \forall t \in (x_1, x_0].$ Lấy tích phân theo t trên đoạn $[x, x_0]$ ở cả 3 vế của bất đẳng thức kép ta thu được $x - x_0 \leq g(x) - g(x_0) \leq x_0 - x,$ trong đó g là hàm số được cho bởi $g(x) = -1/f(x)$. Từ đây ta thu được $g(x) - g(x_0) \leq x_0 - x \quad \forall x \in (x_1, x_0].$ Cho $x \rightarrow x_1^+$ ta thu được điều vô lý.	2,00
c		Tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $(f(c))^2 \leq f'(c)$	2,00
		Do f liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $ f(x) \leq M$ với mọi $x \in [0, 1]$. Nếu $f(c) = 0$ với $c \in (0, 1)$ nào đó thì c chính là điểm cần tìm và do đó ta chỉ cần xét trường hợp $f \neq 0$ trên toàn $(0, 1)$. Do tính liên tục nên ta có thể giả thiết $f > 0$ trên $(0, 1)$. Do $f(0) = 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1/2)$ sao cho $\ln f(x_0) - \ln f\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\frac{M}{2}.$ Theo Định lý Lagrange áp dụng cho hàm $\ln f(x)$ ta có $-\frac{M}{2} \geq \ln f(x_0) - \ln f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \quad \text{với } c \in (x_0, \frac{1}{2}) \text{ nào đó.}$ Từ đây ta thu được $\frac{f'(c)}{f(c)} > 0$ và do đó $-\frac{M}{2} \geq -\frac{1}{2} \frac{f'(c)}{f(c)}$. Vậy $\left \frac{f'(c)}{f(c)}\right = \frac{f'(c)}{f(c)} \geq M$. Ghi chú. Thí sinh có thể giải như sau và vẫn được điểm tối đa. Trong trường hợp $f \equiv 0$, ta có thể chọn $c \in (0, 1)$ tùy ý. Trong trường hợp còn lại, nếu kết luận là sai, tức là $(f(x))^2 > f'(x)$ với mọi $x \in (0, 1)$, thì theo kết luận của ý (b) ta phải có $f \equiv 0$, mâu thuẫn.	2,00



ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5

6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		Chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1, +\infty)$	2,00
		Để thấy $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ với mọi $x > 1$, và dấu bằng đạt được khi $x = 2$. Vậy hàm f đạt được giá trị nhỏ nhất trên $(1, +\infty)$ tại $x = 2$. Từ đó ta kết luận phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ trên $(1, +\infty)$. 	2,00
b		Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x	2,00
		Tính toán trực tiếp thu được $f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.$	2,00
c		Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình)	2,00
	1	Thiết lập công thức tính $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Hoành độ giao điểm giữa đồ thị của hàm f' và đường thẳng $y = 0$ là $x = 2$. Do f đơn điệu tăng (ngặt) trên $(2, +\infty)$ nên $f' \geq 0$ trên $[2, 4]$. Vậy ta có công thức tính diện tích cần tìm $\int_2^4 f'(x)dx.$	1,00
	2	Tính tích phân $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Theo công thức Newton–Leibniz ta có $\int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2,$ và đây là diện tích cần tìm.	1,00