ĐỀ 91

HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 _ YÊN BÁI _2023-2024

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho x và y là các số thực thỏa mãn x - y = - 4 và xy = -2. Tìm giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2$.

2. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn

$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}=\sqrt{a+\frac{1}{b}}+\sqrt{b+\frac{1}{a}}$. Chứng minh a = b

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{9x-5}+1=3\sqrt{2-x}\left(\sqrt{9x-5}-1\right)$

2. Cho đường thẳng d: y = mx + m - 1, với m là tham số thực và $m \neq 0$

a) Đường thẳng d cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B. Tìm tọa độ của A và B theo m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{5}$

Câu 3. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A (AB > BC) nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ các đường cao AD và BH của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BH. AM cắt đường tròn (O) tại N (N ≠ A).

a) Chứng minh DM ⊥ BH và BMDN là một tứ giác nội tiếp. Từ đó chỉ ra BN ⊥ BH.

b) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại S. SN cắt đường tròn (O) tại E (E ≠ N). Chứng minh rằng $SB^2 = SN.SE$ và ODNE là một tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh rằng ba điểm C, O và E thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng nếu đường thẳng SN đi qua trung điểm của đoạn thẳng BD thì $\tan \widehat{BAC}=\sqrt{2}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Chứng minh rằng nếu n là một số chính phương thì n3 - n chia hết cho 60.

2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p,q,r) thỏa mãn p > 2 và $p = q^2 + r^3$.

Câu 5. (3,0 điểm)

1. Cho x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x+y-z}}+\frac{y}{\sqrt{y+z-x}}+\frac{z}{\sqrt{z+x-y}} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

2. Trên bảng cho một dãy gồm n số nguyên dương đầu tiên ($n \in N$, $n > 3$) được sắp xếp theo thứ tự tăng dần từ 1 đến n. Bạn An xóa đi ba số hạng liên tiếp trong dãy, sau đó tính tổng tất cả các số còn lại trên bảng thì nhận được kết quả bằng 2022. Tìm ba số mà bạn An đã xóa.

------ HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho x và y là các số thực thỏa mãn x - y = - 4 và xy = -2. Tìm giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2$.

2. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn

$\sqrt{a+\frac{1}{a}} + \sqrt{b+\frac{1}{b}} = \sqrt{a+\frac{1}{b}} + \sqrt{b+\frac{1}{a}}$. Chứng minh a = b

Lời giải

1. Ta có $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$$= (x - y)\left[(x-y)^2+3xy\right] = (-4)\left[(-4)^2+3.(-2)\right] = -40.$$

2. Bình phương hai vế đẳng thức đã cho ta được

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + 2\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)} = a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a} + 2\sqrt{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) = \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} = ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a = b$$

Lưu ý. Thí sinh có thể sử dụng bất đẳng thức AM - GM $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$ để chỉ ra a = b

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{9x-5} + 1 = 3\sqrt{2-x}\left(\sqrt{9x-5}-1\right)$

2. Cho đường thẳng d: y = mx + m - 1, với m là tham số thực và $m \neq 0$

c) Đường thẳng d cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B. Tìm tọa độ của A và B theo m.

d) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{5}$

Lời giải

1. ĐXXĐ: $\frac{5}{9} \leq x \leq 2$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương

$\sqrt{9x-5} + 1 = 3\sqrt{2-x}\left(\sqrt{9x-5}-1\right)$ (1)

Đặt $t = \sqrt{9x-5} + 3\sqrt{2-x}$ thì $t \geq 0$ và

$$t^2 = 9x - 5 + 9(2 - x) + 6.\sqrt{(9x-5)(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow 3.\sqrt{(2-x)(9x-5)} = \frac{t^2-13}{2} \quad (2)$$

Phương trình (1) trở thành

$$t + 1 = \frac{t^2-13}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-3 \end{array}\right.$$

Do $t \geq 0$ nên t = 5

Thay t = 5 vào (2), ta được

$$\sqrt{(2-x)(9x-5)} = 2 \Leftrightarrow -9x^2 + 23x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{14}{9} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{1;\frac{14}{9}\right\}$

Lưu ý.

- Thí sinh cũng có thể đặt a = $\sqrt{9x-5}$ và b = $3\sqrt{2-x}$ để đưa vào hệ phương trình

$$\begin{cases} a+1=b(a-1) \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-ab+1=0 \\ (a+b)^2-2ab=13 \end{cases}$$

Giải hệ ta có a + b = 5 và ab = 6. Từ đó tìm được x = 1 hoặc x = $\frac{14}{9}$

- Nếu thí sinh không tìm ĐKXĐ của phương trình và/hoặc sử dụng biến đổi hệ quả ($\Rightarrow$) mà không sử dụng biến đổi tương đương ($\Leftrightarrow$) thì cần thử lại nghiệm; nếu không giám khảo trừ 0,25 điểm.

2.

a) Cho x = 0 ta được y = m - 1. Do đó B(0; m - 1)

Cho y = 0 ta được mx + m - 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{1-m}{m}$. Do đó A$\left(\frac{1-m}{m};0\right)$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d. Khi đó OH = $\frac{1}{5}$

Nếu m = 1 thì O = A = B. Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ nên không tiếp xúc với đường tròn $\left(O;\frac{1}{5}\right)$

Do đó m ≠ 1, dẫn đến ba điểm O, A, B phân biệt.

Tam giác OAB vuông tại O có OH là đường cao nên

$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}$ (3).

Ta có OA = $\left|\frac{1-m}{m}\right|$ và OB = $|m-1|$

Thay vào (3), ta được

$\frac{m^2}{(m-1)^2}+\frac{1}{(m-1)^2}=25 \Leftrightarrow m^2+1=25(m-1)^2$

$\Leftrightarrow 12m^2-25m+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{4} \\ m=\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là m = $\frac{3}{4}$ và m = $\frac{4}{3}$

Câu 3. (7,0 điểm)

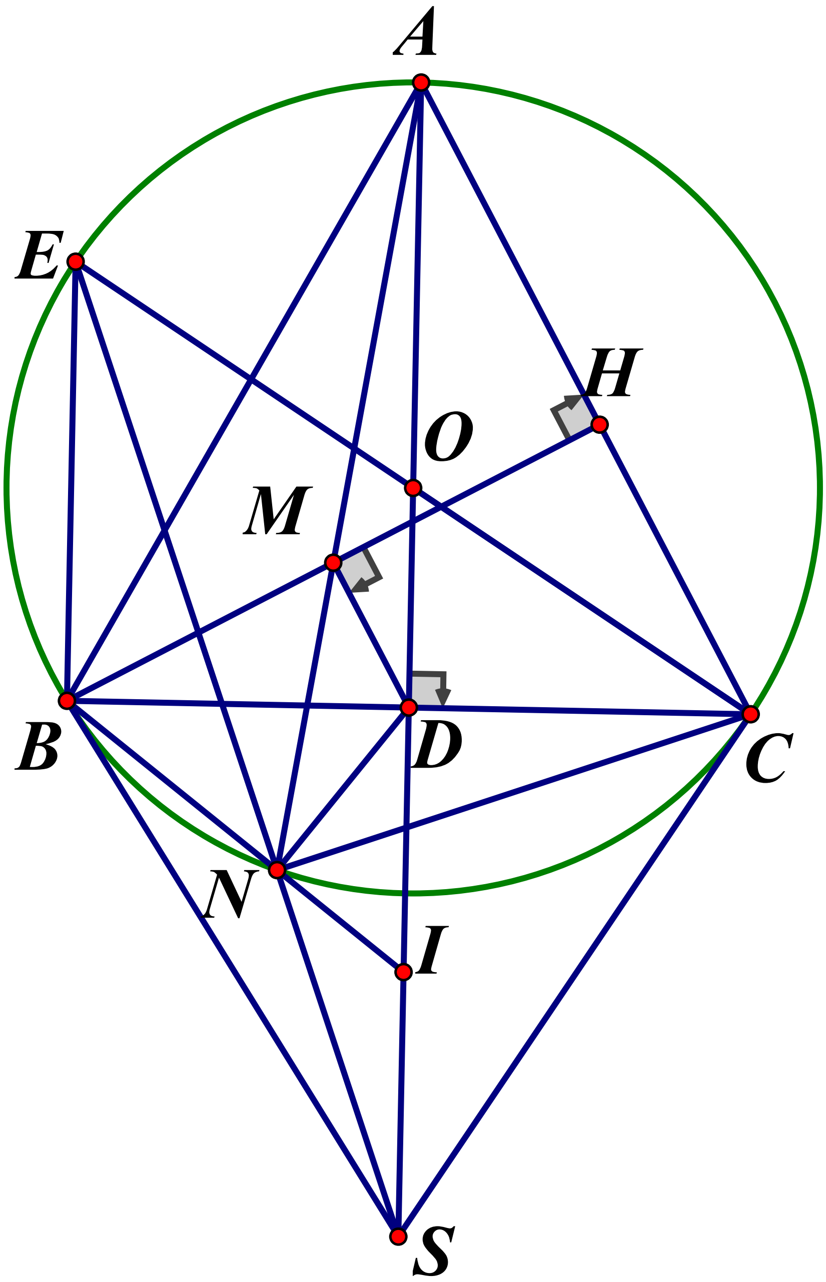
Cho tam giác ABC cân tại A (AB > BC) nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ các đường cao AD và BH của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BH. AM cắt đường tròn (O) tại N (N ≠ A).

a) Chứng minh DM $\perp$ BH và BMDN là một tứ giác nội tiếp. Từ đó chỉ ra BN $\perp$ BH.

b) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại S. SN cắt đường tròn (O) tại E (E ≠ N). Chứng minh rằng SB^2 = SN.SE và ODNE là một tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh rằng ba điểm C, O và E thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng nếu đường thẳng SN đi qua trung điểm của đoạn thẳng BD thì tan $\widehat{BAC} = \sqrt{2}$.



Lời giải

a) Tam giác BCH có DM là đường trung bình nên DM ∥ CH, suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{BCH} = \widehat{BCA} = \widehat{BNA} = \widehat{BNM}$, do đó BMDN là tứ giác nội tiếp.

Vì DM ∥ CH nên DM ⊥ BH, kéo theo $\widehat{BND} = 180° - \widehat{BMD} = 90°$.

b) Vì SB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{SBN} = \widehat{BEN}$.

Từ đó ta có △SBN △SEB (g.g), suy ra $\frac{SB}{SN} = \frac{SE}{SB}$. Do đó

SB^2 = SN.SE

Tam giác SBO vuông tại B nên SB^2 = SD.SO, kéo theo SD. SO = SN.SE.

Khi đó $\frac{SD}{SN} = \frac{SE}{SO}$, dẫn đến △SDN △SEO, cho ta $\widehat{SDN}$ = $\widehat{SEO}$.

Vậy ODNE là tứ giác nội tiếp.

c) Theo b) thì $\widehat{SDN} = \widehat{DNB} = \widehat{SCN}$, do đó SNDC nội tiếp

Bởi vậy $\widehat{SNC}$ = 90°, kéo theo CE là đường kính của (O).

d) Gọi I là giao điểm của BN và SD. Theo c) ta có SNDC nội tiếp nên

$\widehat{ISN} = \widehat{NCD} = \widehat{NCB} = \widehat{SBN}$, suy ra △ISN △IBS (g.g).

Từ đây ta có $\frac{IS}{¿} = \frac{IB}{IS}$ hay IS^2 = IB.IN

Lại có DN ⊥ BI nên ID^2 = IB.IN. Vậy ID = IS.

Do đó BN đi qua trung điểm của SD.

Khi đó nếu SN đi qua trung điểm BD thì N là trọng tâm của tam giác SBD, mà như vậy thì $\frac{BN}{¿} = 2$.

Mặt khác, ta lại có $\frac{BN}{¿} = \frac{BN.BI}{¿.BI} = \frac{BD^2}{ID^2} = 4.\frac{BD^2}{SD^2}$, thành ra $\frac{BD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lúc đó thì $\tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} = \sqrt{2}$ hay $\tan \widehat{BAC} = \widehat{SBD}$

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Chứng minh rằng nếu n là một số chính phương thì n^3 - n chia hết cho 60.

2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p,q,r) thỏa mãn p > 2 và $p = q^2 + r^3$.

Lời giải

1. Đặt $n = x^2$ ($x \in Z$). Khi đó $n^3 - n = x^6 - x^2 = x^2(x^4-1)$.

+ Nếu x chẵn thì $x^2 \vdots 4$ nên $x^2(x^4-1) \vdots 4$.

+ Nếu x lẻ thì x^4 là số chính phương lẻ nên $x^4 - 1 \vdots 4$, suy ra $x^2(x^4-1) \vdots 4$

Lại có $x^2(x^4-1) \vdots 4 = (x^2-1)x^2(x^2+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3.

Mặt khác $x^2(x^4-1) = x(x^2-1)(x^2+1)$

+ Nếu x = 0 (mod 5) thì x^2 = 0 (mod5).

+ Nếu x = ± 1 (mod5) thì x^2 - 1 = 0 (mod5).

+ Nếu x = ± 2 (mod5) thì x^2 + 1 = 4 + 1 = 0 (mod5).

Do đó trong mọi trường hợp ta đều có $x^2(x^2-1)(x^2+1) \vdots 5$

Vậy n^3 - n chia hết cho cả 3, 4 và 5 nên chia hết cho 60.

2. Giả sử (p,q,r) là một bộ số nguyên tố thỏa mãn p > 2 và p = q^2 + r^3

Để ý rằng q lẻ. Nếu r cũng lẻ thì p chẵn, khi đó p = 2 và p = q^2 + r^3 = 2, vô lí.

Do đó r chẵn, mà như vậy thì r = 2

Với r = 2 thì p = q^2 + 8

+ Nếu q = 3 thì p = 3^2 + 8 = 17 (thỏa mãn)

+ Nếu q > 3 thì q^2 = 1 (mod3), kéo theo q^2 + 8 $\vdots$ 3, hay p $\vdots$ 3.

Do đó, p = 3, khi đó q^2 + 8 = 3, mâu thuẫn

Vậy (p,q,r) = (17,3,2) là bộ số duy nhất thỏa mãn.

Câu 5. (3,0 điểm)

1. Cho x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x+y-z}} + \frac{y}{\sqrt{y+z-x}} + \frac{z}{\sqrt{z+x-y}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

2. Trên bảng cho một dãy gồm n số nguyên dương đầu tiên (n ∈ N, n > 3) được sắp xếp theo thứ tự tăng dần từ 1 đến n. Bạn An xóa đi ba số hạng liên tiếp trong dãy, sau đó tính tổng tất cả các số còn lại trên bảng thì nhận được kết quả bằng 2022. Tìm ba số mà bạn An đã xóa.

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x+y-z}} + \frac{y}{\sqrt{y+z-x}} + \frac{z}{\sqrt{z+x-y}} \geq \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{\sqrt{x+y-z}+\sqrt{y+z-x}+\sqrt{z+x-y}}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ ta được

$\sqrt{x+y-z}+\sqrt{y+z-x} \leq \sqrt{2(x+y-z+y+z-x)} = 2\sqrt{y}$

Tương tự ta có

$\sqrt{y+z-x} + \sqrt{z+x-y} \leq 2\sqrt{z}$

$\sqrt{z+x-y} + \sqrt{x+y-z} \leq 2\sqrt{x}$.

Cộng vế ba bất bình đẳng trên ta được

$\sqrt{x+y-z}+\sqrt{y+z-x}+\sqrt{z+x-y} \le \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Từ đó suy ra

$$\frac{x}{\sqrt{x+y-z}}+\frac{y}{\sqrt{y+z-x}}+\frac{z}{\sqrt{z+x-y}} \ge \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Lưu ý. Thí sinh cũng có thể sử dụng bất đẳng thức AM - GM để chứng minh như sau

Đặt $\begin{cases} y+z-x=a^2 \\ z+x-y=b^2 \\ x+y-z=c^2 \end{cases}$ (a,b,c > 0)

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{b^2+c^2}{2c}+\frac{c^2+a^2}{2a}+\frac{a^2+b^2}{2b} \ge \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{b^2+c^2}{2c}+c \ge 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}.c}=2.\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \ (1)$$

Lại có $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \ge \frac{b+c}{2}$ nên từ (1) ta có

$$\frac{b^2+c^2}{2c}+c \ge \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{b+c}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+c^2}{2c}+\frac{c-b}{2} \ge \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$$

Lập hai đẳng thức tương tự và cộng vế ta thu được điều phải chứng minh

2. Giả sử ba số bạn An xóa đi là m - 2, m - 1 và m (3≤ m ≤ n).

Theo giải thiết, ta có

$$(1+2+\ldots+n)-(m-2+m-1+m)=2022$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}-(3m-3)=2022$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)-6m=4038 \ (2).$$

Hiển nhiên từ (2) ta có n(n+1) > 4038, suy ra n ≥ 64

Lại có 4038 = n(n+1) - 6m ≥ n(n+1) - 6n = n(n-5).

Do đó n ≤ 66. Như vậy n ∈ {64; 65; 66}

Mặt khác từ (2) ta thấy n(n+1) chia hết cho 3 nên n ∈ {65; 66}

Với n = 65, thay vào (2) ta được m = 42.

Khi đó ba số cần tìm là 40, 41, 42.

Với n = 66, thay vào (2) ta được m = 6.

Khi đó ba số cần tìm là 62, 63, 64.

------ HẾT -----