

Câu 1. (Sở Yên Bái 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Gọi (N) là khối nón có đỉnh là tâm của (S) , đáy là hình tròn (C) . Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by - z + c = 0$. Giá trị của $a - 2b + 3c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 14

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q) .

Đặt $IH = x$ ta có $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{27 - x^2}$

Vậy thể tích khối nón tạo được là $V = \frac{1}{3} \cdot IH \cdot S_{(C)} = \frac{1}{3} x \cdot \pi (\sqrt{27 - x^2})^2 = \frac{1}{3} \pi (27x - x^3)$.

Gọi $f(x) = 27x - x^3$ với $x \in (0; 3\sqrt{3})$. Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x) = 27 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 27 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	0	3	$3\sqrt{3}$
f'		+	-
f	0	54	0

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3} \pi \cdot 54 = 18\pi$ khi $x = IH = 3$.

Mặt phẳng $(\alpha): ax + by - z + c = 0$ đi qua hai điểm $A(0;0;-4)B(2;0;0)$, nên $\begin{cases} c = -4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow (\alpha): 2x + by - z - 4 = 0$

Và $d(I; (Q)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + b \cdot (-2) - 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + b^2 + (-1)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-2b - 5| = 3\sqrt{5 + b^2}$

$\Leftrightarrow 4b^2 + 20b + 25 = 45 + 9b^2 \Leftrightarrow -5b^2 + 20b - 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy giá trị của $a - 2b + 3c = 2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) = -14$

Câu 2. (Chuyên KHTN 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và $B(-1;-6;7)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z - 3 = 0$. Xét điểm M thuộc mặt phẳng (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + MB^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 63

Gọi $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\vec{2IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(1; -2; 3)$.

Khi đó $2MA^2 + MB^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 3MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{2IA} + \vec{IB}) + 2IA^2 + IB^2 = 3MI^2 + 2IA^2 + IB^2$

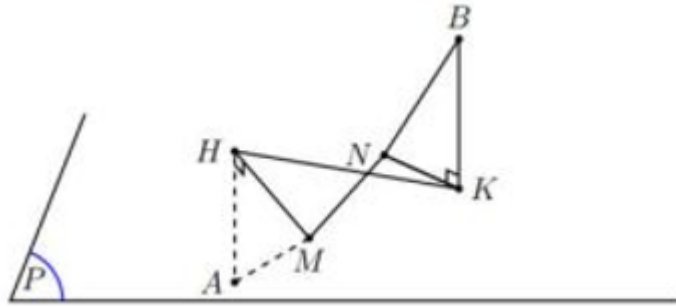
Vậy $2MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất

Khi đó $2MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất bằng $3d^2(I, (P)) + 2IA^2 + IB^2 = 63$.

Câu 3. (Sở Hòa Bình 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$ và $B(3; 4; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. Lấy M, N là hai điểm thuộc (P) tùy ý sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là?

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $\begin{cases} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z - 14 = 0 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$ nên mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu có phương trình $z = 0$ suy ra $(P) \equiv (Oxy)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên (Oxy) . Suy ra $H(0; 0; 0), K(3; 4; 0)$.

Do đó $AH = 2, BK = 1$ và $HK = 5$.

$AM + BN = \sqrt{AH^2 + HM^2} + \sqrt{BK^2 + NK^2}$ nhỏ nhất khi $M, N \in HK$.

Đặt $HM = x$ suy ra $NK = HK - MN - HM = 4 - x$.

Khi đó $AM + BN = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{1^2 + (4-x)^2} \geq \sqrt{(2+1)^2 + (x+4-x)^2} = 5$.

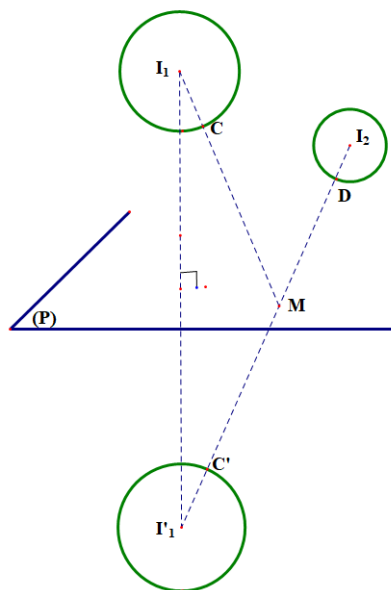
Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{2} = \frac{4-x}{1} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

Câu 4. (Liên Trường Nghệ An 2024) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$; $(S_2): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 11 = 0$. Gọi C, D lần lượt là các điểm thuộc mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Điểm

$M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho $MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 5



Xét thấy $\begin{cases} (S_1): I_1(1;1;2); R_1=3 \\ (S_2): I_2(2;5;-1); R_2=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} d(I_1;(P)) > R_1 \\ d(I_2;(P)) > R_2 \end{cases}$, dễ thấy $(S_1); (S_2)$ cùng phía so với (P) .

Gọi (S_1') đối xứng với (S_1) qua mặt phẳng (P) , suy ra (S_1') có tâm $I_1'(-7;-3;-6)$

Khi đó với mọi điểm M thuộc mặt phẳng (P) ta có: $MC + MD = MC' + MD \geq C'D$

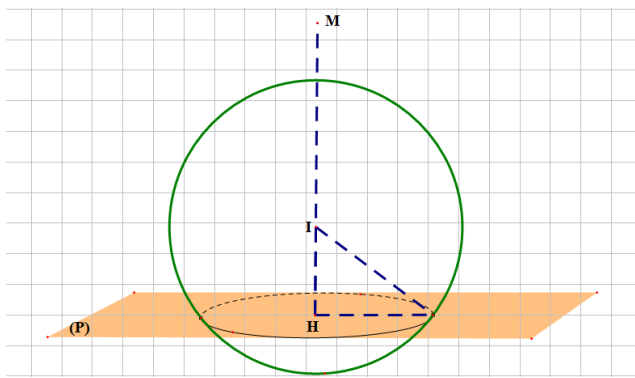
Ta có $C'D_{\min} = |I_1'I_2 - R_1 - R_2| = \sqrt{170} - 5$

Khi đó $M = I_1'I_2 \cap (P)$, suy ra tọa độ điểm $M\left(\frac{-5}{2}; 1; \frac{-7}{2}\right)$

Câu 5. (Sở Thừa Thiên Huế 2024) Trong hệ trục $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 6$ và điểm $M(3;5;4)$. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn cắt mặt cầu (S) có đường tròn giao tuyến với bán kính $r = \sqrt{2}$. Khi khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị của $b + c + d$.

Lời giải

Trả lời: 7



Xét mặt cầu (S) có: $I(1;1;0); R = \sqrt{6}$

Suy ra $IH = 2; MI > R \Rightarrow M$ nằm ngoài (S)

Vậy $d(M; (P))_{\max} = MH = MI + IH = 8$

Ta có $\frac{MH}{MI} = \frac{4}{3} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$

Nên $n_{(P)} = \vec{MI} = (2; 4; 4) \Rightarrow (P): x + 2y + 2z + 3 = 0 \rightarrow b + c + d = 7$

Câu 6. (Sở Thái Bình 2024X) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$, $(S_2): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) . Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) . Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a; b; c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: - 1

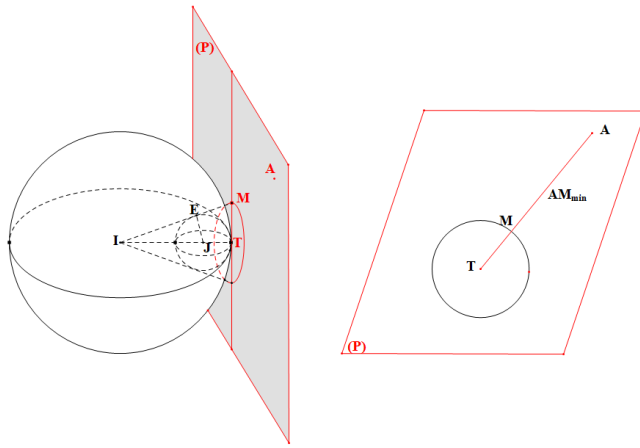
Xét (S_1) có tâm $I(0; 1; 2); R_1 = 4$

Xét (S_2) có tâm $J(1; -1; 0); R_2 = 1$.

Vì $IJ = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 = R_1 - R_2$ nên 2 mặt cầu đã cho tiếp xúc trong

(P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả 2 mặt cầu nên (P) đi qua T , và vuông góc với IJ .

Dễ thấy, M thuộc đường tròn tâm T , cố định trên (P) .



Có $\vec{IT} = \frac{4}{3} \vec{IJ} = \frac{4}{3}(1; -2; -2) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{8}{3} \right) \Rightarrow T \left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \right)$

Có $\Delta IJE \sim \Delta IMT \Rightarrow \frac{JE}{MT} = \frac{IE}{IT} \Leftrightarrow \frac{1}{MT} = \frac{\sqrt{9-1}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MT = \sqrt{2}$

Có (P) qua T ; VTPT là $\vec{n} // \vec{IJ} = (1; -2; -2) \Rightarrow (P): x - \frac{4}{3} - 2\left(y + \frac{5}{3}\right) - 2\left(z + \frac{2}{3}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow (P): x - 2y - 2z - 6 = 0$

Xét thấy $A \left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3} \right) \in (P); TA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$AM \geq AT - TM = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}, "=" \Leftrightarrow \vec{MA} + 3\vec{MT} = 0$
 $\Leftrightarrow M \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right) \Rightarrow a + b + c = -1.$

Câu 7. (Sở Thái Nguyên 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1), B(7; -4; -3)$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Biết $a > 2$, giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng?

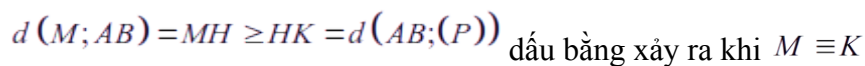
Lời giải

Trả lời: 0

Ta có $\vec{AB} = (4; -8; -4) \Rightarrow AB = \sqrt{96}; \vec{n}_{(P)} = (1; 1; -1)$ ta thấy $\vec{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow AB // (P)$

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2} d(M; AB) \cdot \sqrt{96}$, ta thấy $S_{\min} \Leftrightarrow d(M; AB)_{\min}$

Kẻ $MH \perp AB$ tại H , kẻ K là hình chiếu vuông góc của H lên (P)



Suy ra $(Q): x + z - 4 = 0; M \in (P) \cap (Q) = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

$$M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3(tm) \\ t = \frac{5}{3}(L) \end{cases} \Rightarrow M(3; -4; 1)$$

Câu 8. (Sở Quảng Bình 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và bán kính $r=3\sqrt{2}$. Xét khối nón (N) có đỉnh I , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) . Khi khối nón (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua điểm $M(0;1;1)$ có phương trình dạng $x+by+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=b+c-d$ bằng?

Đặt $(P): x + by + cz + d = 0$.



$$IH = d(I, (P)) = h, (0 < h < 3\sqrt{2}).$$

Ta có bán kính đường tròn đáy của (N) là $r_1 \Rightarrow r_1^2 = r^2 - h^2 = 18 - h^2$.

Thể tích khối nón (N) bằng $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{1}{3}\pi(18 - h^2)h$

V lớn nhất khi $V'(h) = \pi(6 - h^2) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow 6 - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{6}$

h	0	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	
$V'(h)$		+	0	-
$V(h)$				
	0			0

Thể tích khối nón (N) lớn nhất khi $h = \sqrt{6}$.

Mà $\overline{IH} = (-1; 1; -2) \Rightarrow IH \perp \overline{IH} \Rightarrow |IH| = \sqrt{6} = d(I, (P)) \Rightarrow M$ là hình chiếu của I lên (P) .

Do đó $n = (1; -1; 2)$ là véc tơ pháp tuyến của $(P) \Rightarrow (P): x - y + 2z + d = 0$.

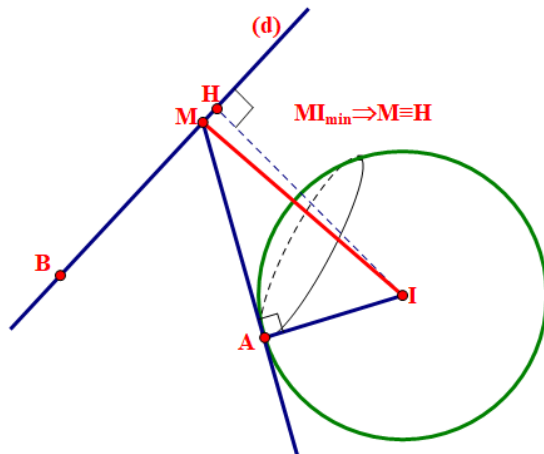
$$M \in (P) \Rightarrow -1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow a + b - d = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Câu 9. (Sở Sóc Trăng 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 1$

và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Từ điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d kẻ tiếp tuyến MA đến mặt cầu (S) (A là điểm tiếp xúc). Tính $a + b + c$ khi MA nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 0



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -3; 1)$ và bán kính $R = 1$.

Đường thẳng d có đi qua điểm $B(-1; -2; 0)$ và có một vectơ chỉ phương $u = (2; -1; 2)$ nên

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

phương trình tham số là

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng d .

Suy ra $H(-1 + 2t; -2 - t; 2t) \in d$.

$$\text{Mà } \vec{IH} \cdot \vec{u} = 0; \begin{cases} \vec{IH} = (2t - 3; -t + 1; 2t - 1) \\ u = (2; -1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2(2t - 3) - (-t + 1) + 2(2t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $H(1; -3; 2)$.

Theo đề MA là tiếp tuyến của mặt cầu (S) tại A nên $\triangle MIA$ vuông tại A

$$\Rightarrow MA = \sqrt{IM^2 - IA^2} = \sqrt{IM^2 - 1}.$$

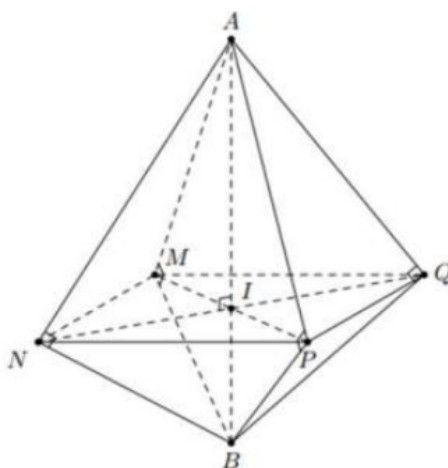
Do đó MA nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng d hay $M \equiv H$.

Suy ra $M(1; -3; 2)$ hay $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$.

Câu 10. (Sở Sóc Trăng 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$. Xét khối chóp tứ giác đều đỉnh A nội tiếp mặt cầu đường kính AB . Khi khối chóp có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa mặt đáy của khối chóp có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 18



Ta có $\vec{AB}(4; 4; 2)$ nên $AB = 6$.

Đặt $SI = x \Rightarrow IB = 6 - x$. Khi đó $NI^2 = IB \cdot IA = x(6 - x)$.

Vì $MNPQ$ là hình vuông nên $NQ = MN\sqrt{2} \Rightarrow 2NI = MN\sqrt{2} \Leftrightarrow MN^2 = 2NI^2$.

$$V_{AMNPQ} = \frac{1}{3} \cdot MN^2 \cdot SI = \frac{2}{3} x^2 (6-x) = \frac{8}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^2 (6-x) \leq \frac{8}{3} \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 6-x}{3}\right)^3 = \frac{64}{3}$$

Do đó

$$\frac{x}{2} = 6-x \Leftrightarrow x=4$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$IA = 2IB \Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I\left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$$

Suy ra

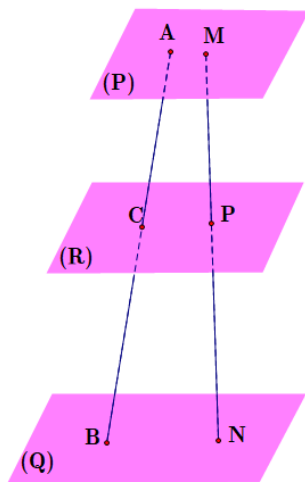
$$\text{Suy ra phương trình } (MNPQ) \text{ là } 2+2y+z-21=0$$

$$\text{Vậy } b+c+d = -18$$

Câu 11. (Sở Cà Mau 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+5=0, (Q): 2x+2y+z+1=0; (R): 2x+2y+z+3=0$. Một đường thẳng Δ thay đổi, cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = AB^2 + \frac{216}{AC}$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 108



$$\text{Ta có: } (\alpha): ax+by+cz+d=0; (\alpha'): ax+by+cz+d'=0 \Rightarrow d((\alpha) // (\alpha')) = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$MP = d((P), (R)) = \frac{|5-3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}$$

$$PN = d((R), (Q)) = \frac{|3-1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP} = 2 \Rightarrow AB^2 = 4AC^2$$

Talet:

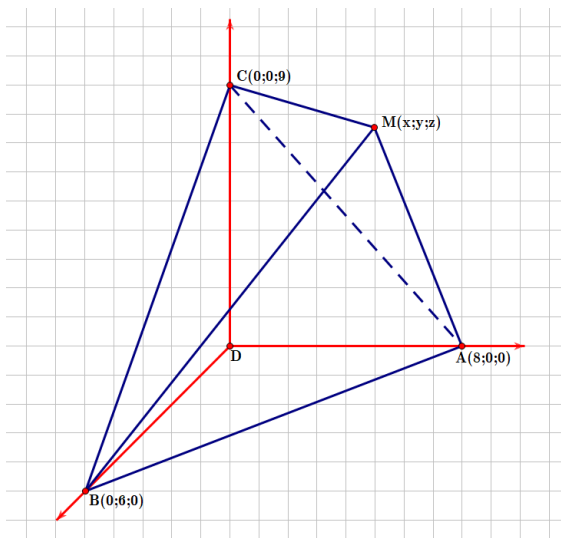
$$\Rightarrow AB^2 + \frac{216}{AC} = 4AC^2 + \frac{216}{AC} = 4AC^2 + \frac{108}{AC} + \frac{108}{AC} \dots 3\sqrt{4 \cdot 108 \cdot 108} = 108.$$

Câu 12. (Sở Bắc Ninh 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7; -2; -3), B(-1; 4; -3), C(-1; -2; 6), D(-1; -2; -3)$ và điểm M thay đổi tùy ý. Khi biểu thức $F = MA + MB + MC + \sqrt{5}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất thì thể tích khối tứ diện $MABC$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 72

Xét thấy $\begin{cases} \overrightarrow{DA} = (8; 0; 0) \\ \overrightarrow{DB} = (0; 6; 0) \\ \overrightarrow{DC} = (0; 0; 9) \end{cases} \Rightarrow DA, DB, DC$ đôi một vuông góc với nhau



Đặt $M(x; y; z)$ khi đó: $\begin{cases} MA = \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(x-8)^2} = |x-8| \geq 8-x \\ MB = \sqrt{x^2 + (y-6)^2 + z^2} \geq \sqrt{(y-6)^2} = |y-6| \geq 6-y \\ MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-9)^2} \geq \sqrt{(z-9)^2} = |z-9| \geq 9-z \\ \sqrt{5}MD = \sqrt{5(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z \end{cases}$

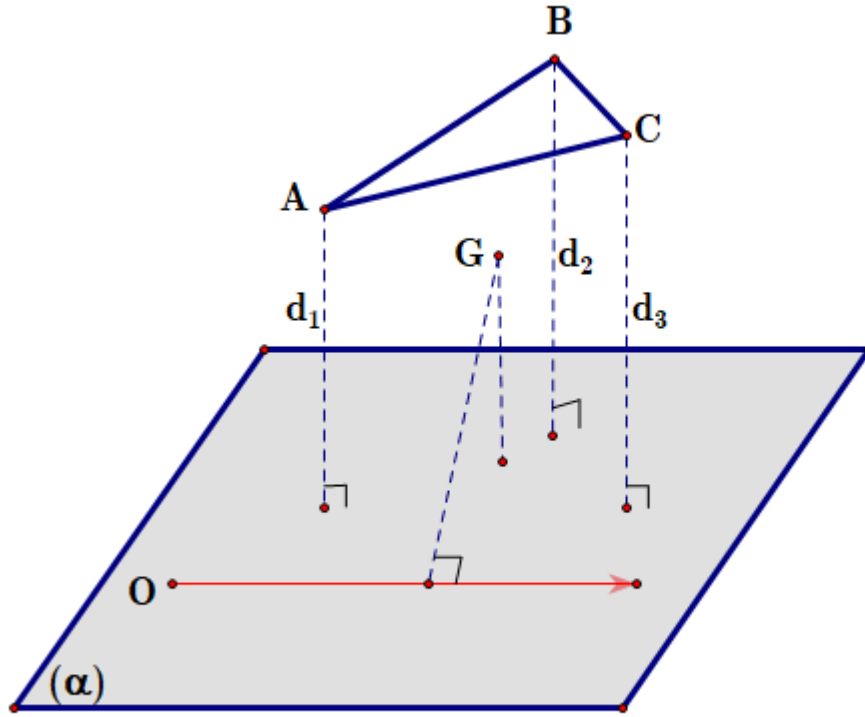
Suy ra $F \geq 8 - x + 6 - y + 9 - z + x + y + z = 23$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$ hay điểm $M \equiv D$

Vậy $V_{DABC} = 72$

Câu 13. (Sở Ninh Bình 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(3; 4; 1), C(-5; 2; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục hoành sao cho A, B, C nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (α) và d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ bằng $a\sqrt{b}$ (với $a \in \mathbb{N}^*, b$ là số nguyên tố). Tính $S = 3a + 2b$.

Lời giải

Trả lời: 38



Lấy A' thỏa mãn: $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \Rightarrow A' \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$ và $d(A', (\alpha)) = \frac{1}{6} d_1 \Leftrightarrow d_1 = 6d(A', (\alpha))$

Lấy B' thỏa mãn: $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \Rightarrow B' \left(1; \frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right)$ và $d(B', (\alpha)) = \frac{1}{3} d_2 \Rightarrow 2d_2 = 6d(B', (\alpha))$

Lấy C' thỏa mãn: $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \Rightarrow C' \left(-\frac{5}{2}; 1; \frac{1}{2} \right)$ và $d(C', (\alpha)) = \frac{1}{2} d_3 \Rightarrow 3d_3 = 6d(C', (\alpha))$
 $\Rightarrow T = 6(d(A', (\alpha)) + d(B', (\alpha)) + d(C', (\alpha)))$

Gọi G là trọng tâm tam giác $\Delta A'B'C' \Rightarrow G \left(-\frac{4}{9}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \right)$ và $T = 6.3d(G, (\alpha)) = 18d(G, (\alpha))$

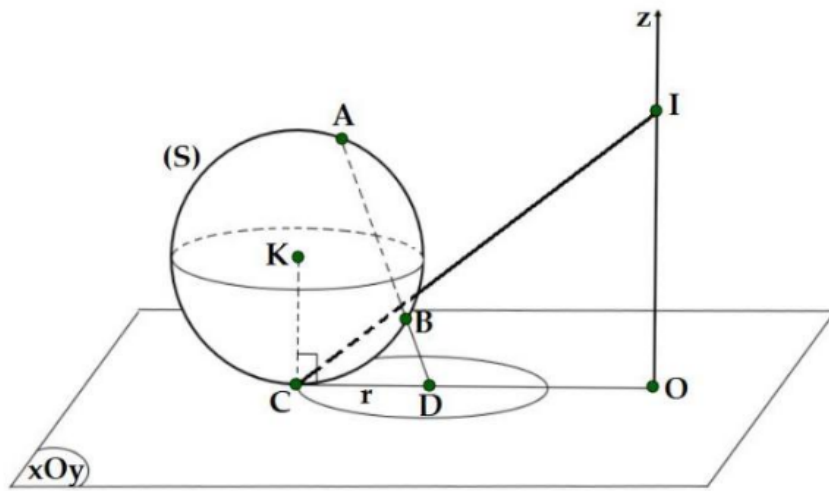
Ta có: $d(G, (\alpha)) \leq d(G, Ox) = \sqrt{y_G^2 + z_G^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{81}} = \frac{2\sqrt{13}}{9}$

$\Rightarrow T \leq 4\sqrt{13} \Rightarrow a = 4; b = 13 \Rightarrow S = 3a + 2b = 12 + 26 = 38.$

Câu 14. (Sở Bình Thuận 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(1; 2; 2), I(0; 0; 4)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $C(m; n; 0)$. Khi độ dài đoạn thẳng IC đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $m + n$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 3



$$AB: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$$

Ta có $\overline{AB} = (0; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng $(AB) \cap (xOy) = D(1; 0; 0) \Rightarrow DB = 2\sqrt{2}; DA = \sqrt{2}$

Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $C(m; n; 0)$. Khi đó:
 $DC^2 = DB \cdot DA = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \Rightarrow DC = 2 \Rightarrow C$ thuộc đường tròn $(D; 2)$.

Trong tam giác vuông $O CI$:

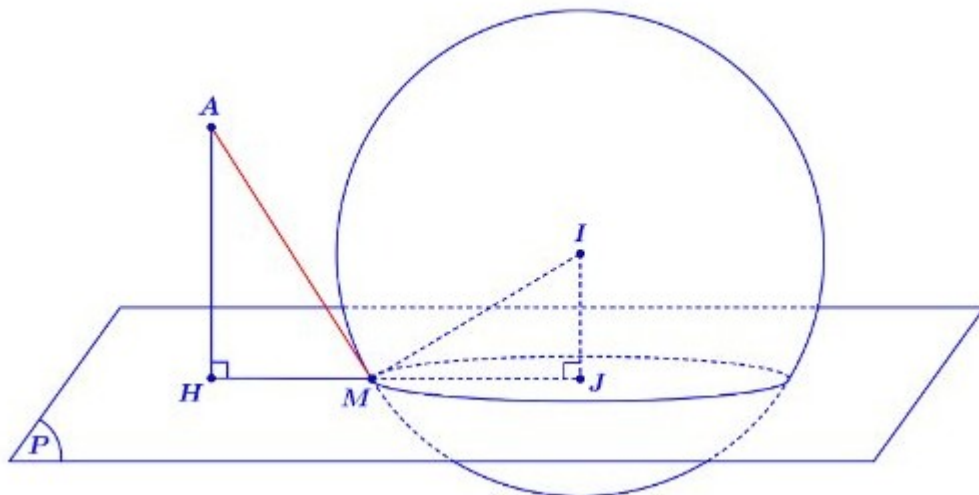
$$IC = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{16 + OC^2} \Rightarrow IC_{\max} \Leftrightarrow OC_{\max} \Leftrightarrow OC = OD + DC = 1 + 2 = 3.$$

Khi đó: $\overline{OC} = 3\overline{OD} \Rightarrow C(3;0;0) \Rightarrow m=3; n=0 \Rightarrow m+n=3$

Câu 15. (Sở Tiền Giang 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -12; 4)$, mặt phẳng $(P): y + z + 4 = 0$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4z + 5 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (ω) . Điểm M thuộc (ω) sao cho đoạn thẳng AM ngắn nhất. Tính độ dài OM

Lời giải

Trả lời: 5



Goi I, J lần lượt là tâm mặt cầu (S) và tâm của đường tròn (ω) .

Mặt cầu (S) có tâm $I(-5; 0; -2)$, bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

$\triangle IMJ$ vuông tại J có $IM^2 = IJ^2 + JM^2 \Leftrightarrow R^2 = d^2(I, (P)) + r_{(\omega)}^2 \Rightarrow r_{(\omega)} = \sqrt{22}$.

Kẻ $AH \perp (P)$ tại H . Suy ra $AH = d(A, (P)) = \frac{|-12 + 4 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$.

Vì H, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A và I lên mặt phẳng (P) nên ta tìm được $J(-5; -1; -3)$ và $H(1; -10; 6)$. Suy ra $HJ = 3\sqrt{22}$.

$\triangle AHM$ vuông tại H có $AM^2 = AH^2 + HM^2 = 8 + HM^2$.

Để AM ngắn nhất $\Leftrightarrow HM$ ngắn nhất. Khi đó $HM = |HJ - r_{(\omega)}| = 2\sqrt{22}$.

Suy ra $AM_{\min} = \sqrt{8 + (2\sqrt{22})^2} = 4\sqrt{6}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $M = HJ \cap (\omega)$ và M nằm giữa H và J .

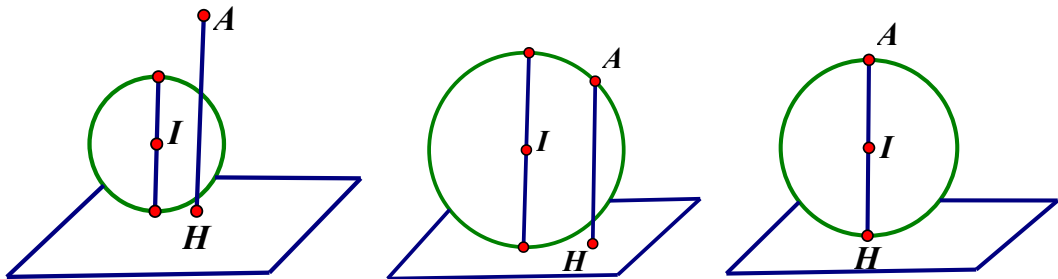
Ta có $\frac{MJ}{HJ} = \frac{MJ}{HJ} \cdot HJ = \frac{1}{3} HJ$ nên ta tìm được tọa độ điểm M là $M(-3; -4; 0)$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $OM = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$.

Câu 16. (Sở Hậu Giang 2024) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 4)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - z - 6 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 8



- Kẻ $AH \perp (P)$ tại H . Vì A cố định và (S) đi qua A nên đường kính mặt cầu phải lớn hơn hoặc bằng khoảng cách từ A đến $(P) \Rightarrow 2R \geq AH$. Đẳng thức xảy ra khi A, I, H thẳng hàng, với A thuộc (S) . Do đó, R nhỏ nhất khi A, I, H thẳng hàng, hay I là trung điểm của đoạn thẳng AH .

- Đường thẳng AH :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

- PT tọa độ giao điểm của AH và (P) : $(2 + t) + 2(1 + 2t) - (4 - t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

- Tìm được điểm $H(3; 3; 3)$ là giao điểm của AH và (P) .

- Suy ra $I\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{7}{2}\right)$. Khi đó $T = a + b + c = 8$.