

Người làm: Nguyễn Thị Lan Anh

Zalo: Lan Anh Dịu Dàng

Email: nguyethilananh0312@gmail.com

- số đt zalo: 0973044733

CD2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1. Tìm x thông thường

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm x biết: $\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7}$

A. $\frac{-102}{49}$

B. $\frac{3}{7}$

C. $\frac{102}{49}$

D. $\frac{-8}{15}$

Lời giải

Đáp án C

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 6z$ và $x - y + z = -15$

Lời giải

Ta có: $3x = 4y = 6z$

$$\frac{3x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{6z}{12}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x - y + z}{4 - 3 + 2} = \frac{-15}{3} = -5$$

Do đó:

$$x = -5 \cdot 4 = -20$$

$$y = -5 \cdot 3 = -15$$

$$z = -5 \cdot 2 = -10$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b, 5a = 3c$ và $ab + bc + ac = 204$

Lời giải

Ta có: $3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9}$

$$5a = 3c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Đặt: } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6k \\ b = 9k \\ c = 10k \end{cases}$$

Ta có: $ab + bc + ac = 204$

$$54k^2 + 60k^2 + 90k^2 = 204$$

$$204k^2 = 204$$

$$k^2 = 1$$

$$k = -1 \text{ hoặc } k = 1$$

$$\text{TH1: } k = -1$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = -6, b = -9, c = -10$$

$$\text{TH2: } k = 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = 6, b = 9, c = 10$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30} \text{ và } 4x+2y-z=10$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30}$$

$$\frac{7(6x-5y)}{7 \cdot 11} = \frac{5(7y-6z)}{5 \cdot 4} = \frac{6(5z-7x)}{6 \cdot 30} = \frac{42x-35y+35y-30z+30z-42x}{77+54+180} = 0$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{4x+2y-z}{20+12-7} = \frac{2}{5}$$

$$\text{suy ra } x=2; y=\frac{12}{5}; z=\frac{14}{5}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hải Dương, tỉnh Hải Dương, trường Điện Nông 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ và } y \text{ biết: } \frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+2y-1-4y}{18-24} = \frac{2y}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x} = \frac{1+4y-1-6y}{24-6x} = \frac{2y}{6x-24} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2): } \frac{2y}{6} = \frac{2y}{6x-24}$$

$$6x-24=6$$

$$x=5$$

$$\text{Thay } x=5 \text{ vào (*) ta được: } y=\frac{1}{4}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Điện Nông 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

Lời giải

$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

$$2(|6-3x|+1) = 3(|x-2|+2)$$

$$2|6-3x|+2 = 3|x-2|+6$$

$$2|6-3x|-3|x-2|=6-2$$

$$2.3 |2 - x| - 3|x - 2| = 4$$

$$6|x - 2| - 3|x - 2| = 4$$

$$3|x - 2| = 4$$

$$|x - 2| = \frac{4}{3}$$

$$x - 2 = \pm \frac{4}{3}$$

$$*) \text{ TH1: } x - 2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} + 2$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$*) \text{ TH2: } x - 2 = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 - \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

$$x, y, z \text{ biết: } \frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2} \quad (2)$$

Tìm các số

Xét $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow 2y+4x=0$ (vô lí)

Suy ra $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

Khi đó từ (2) suy ra:

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \quad \text{và} \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$$

Đặt $\frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}$

Suy ra : $x=2k; y=4k; z=6k$

$$x^2+y^2+z^2=28k \quad (3)$$

Thay $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ vào (3) ta được: $(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$
 $56k^2 - 28k = 0$
 $56k.(2k - 1) = 0$

$\Rightarrow k = 0$ (loại) hoặc $k = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Với $k = \frac{1}{2}$ thì tìm được $x = 1; y = 2; z = 3$

Vậy $x = 1; y = 2; z = 3$

Câu 7. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Tìm các số dương x, y, z biết: $\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5}$ và $xy + yz + 2zx = 280$

Lời giải

+ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5} = \frac{x+2y+y+2z+z+2x}{3+4+5} = \frac{x+y+z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2z}{4} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow y+2z = x+y+z \Rightarrow x = z$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+x}{4}$$

$$\Rightarrow 4x + 8y = 6x + 3y$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$

Thay $y = \frac{2}{5}x$ vào $xy + yz + 2zx = 280$ ta được:

$$x \cdot \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x \cdot x + 2x \cdot x = 280$$

Giải ra tìm được $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

$$\Rightarrow z = x = 10; y = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Tìm x biết $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

Lời giải

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} : \frac{5}{4}$$

Vậy $x = 1$

Câu 8. (HSG 7 huyện Ý Yên 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{5} - \frac{13}{5} \right) = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$

Lời giải

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{13}{5} = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{7}{10}x = \frac{7}{5} - \frac{13}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \right) x = \frac{-6}{5}$$

$$\frac{6}{10}x = \frac{-6}{5}$$

$$x = \frac{-6}{5} : \frac{6}{10}$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$.

Dạng 2. Đưa về dạng tích bằng 0

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức : $P = a^{2022} + b^{2023}$

Lời giải

Ta có : $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101}) \cdot (a + b) - ab \cdot (a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b (1)

Mà $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ (2)

Từ (1) và (2): $1 = (a + b) - ab$

$$(a - 1) \cdot (b - 1) = 0$$

TH1: $a = 1$

$$1^{100} + b^{100} = 1^{101} + b^{101} = 1^{102} + b^{102}$$

$$b^{100} = b^{101} = b^{102}$$

$$b = 0 \text{ hoặc } b = 1$$

Do $b > 0$ nên $b = 1$

TH2: $b = 1$

$$1^{100} + a^{100} = 1^{101} + a^{101} = 1^{102} + a^{102}$$

$$a^{100} = a^{101} = a^{102}$$

$$a = 0 \text{ hoặc } a = 1$$

Do $a > 0$ nên $a = 1$

$$\text{Do đó } P = a^{2022} + b^{2023} = 1^{2022} + 1^{2023} = 2$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

a) $x \in \mathbb{N}$ sao cho x lớn nhất thỏa mãn: $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^x < 2048$

b) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện:

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n - 1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+34}$$

Lời giải

a) Ta có

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^x < 2^{11}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + x < 11$$

$$\frac{(1+x)x}{2} < 11$$

$$x(x+1) < 22$$

Vì $x \in \mathbb{N}$ và x lớn nhất nên $x = 4$

b) Ta có $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+3} \quad (1)$

Đặt $C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$

$$2C = 2 \cdot (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}$$

$$2C - C = (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^{n+1} - 2^3$$

Đặt : $B = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n$

Khi đó:

$$B = -(2^{n+1} - 2^3) + n2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + 2^3 + n2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n2^{n+1} = (n-1)2^{n+1}$$

Vậy từ (1) ta có:

$$(n-1)2^{n+1} = 2^{n+3}$$

$$2^{n+3} - (n-1)2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} [2^{33} - (n-1)] = 0$$

Do đó $2^{33} - (n-1) = 0$ (vì $2^{n+1} \neq 0$ với mọi n)

$$n = 2^{33} + 1$$

Vậy $n = 2^{33} + 1$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Tìm x biết: $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

Lời giải

Ta có $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

$$\Rightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Rightarrow x-7=0 \text{ hoặc } (x-7)^{10}=1$$

$$\Rightarrow x=7 \text{ hoặc } x-7=\pm 1$$

$$\Rightarrow x=7 \text{ hoặc } x=8 \text{ hoặc } x=6$$

$$x \in \{8; 7; 6\}$$

Vậy

Dạng 3. Sử dụng tích chất lũy thừa

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường HỒNG LĨNH 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$

Lời giải

$$(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$$

$$(x-4)^{x+3} [1 - (x-4)^{10}] = 0$$

$$(x-4)^{x+3} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$(x-4)^{x+3} = 0$$

$$x-4=0 \quad (\text{Điều kiện } x+3 \neq 0)$$

$$x=4$$

$$1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$(x-4)^{10} = 1$$

$$x - 4 = 1 \text{ hoặc } x - 4 = -1$$

$$x = 5 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $x = 3, x = 4, x = 5$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Chung 2022 - 2023)

Tìm x biết:
$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

$$\frac{7^x \cdot 7^2 + 7^x \cdot 7^1 + 7^x}{57} = \frac{(5^2)^x + (5^2)^x \cdot 5^1 + (5^2)^x \cdot 5^3}{131}$$

$$\frac{7^x (7^2 + 7^1 + 1)}{57} = \frac{25^x (1 + 5^1 + 5^3)}{131}$$

$$7^x = 5^x$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = 1 \text{ (vì } 5^x \neq 0) \text{ với mọi } x$$

Vậy $x = 0$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

$$\forall y, y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$$

$$\forall 0 \leq (x - 2010)^2 \text{ và } x \in \mathbb{N}, (x - 2010)^2 \text{ là số chính phương nên}$$

$$\Rightarrow (x - 2010)^2 = 4 \text{ hoặc } (x - 2010)^2 = 1 \text{ hoặc } (x - 2010)^2 = 0$$

$$+ \text{ Với } (x - 2010)^2 = 4 \Rightarrow |x - 2010| = 2 \Rightarrow x = 2012 \text{ hoặc } x = 2008$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = -2 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } (x - 2010)^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 36 - 8 = 28 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } (x - 2010)^2 = 0 \Rightarrow x = 2010$$

$$y^2 = 36 \Rightarrow y = 6 \text{ hoặc } y = -6 \text{ (loại)}$$

$$(x, y) \in \{(2012; 2); (2008; 2); (2010; 6)\}.$$

Vậy

Dạng 4. Tìm ẩn dạng phân thức

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Cho $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có:
$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$

$$\frac{12x - 8y}{16} = \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{12x - 8y}{16} = \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{16 + 9 + 4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x - 8y = 0 \\ 8y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x = 8y \\ 8y = 6z \end{cases}$$

$$12x = 8y = 6z$$

$$\frac{12x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{6z}{24}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ (đpcm)}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS MINH KHAI 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết $\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11}$ và $a + b + c = 48$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11} = \frac{12a - 15b + 20c - 12a + 15b - 20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{12a - 15b}{7} = 0 &\Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c - 12a}{9} = 0 &\Rightarrow 20c = 12a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c$$

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} \text{ và } a + b + c = 48$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a + b + c}{12 + 15 + 20} = \frac{48}{5} = 240$$

$$\frac{a}{12} = 240 \Rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{15} = 240 \Rightarrow b = 16$$

$$\frac{c}{20} = 240 \Rightarrow c = 12$$

$$\frac{c}{20} = 240 \Rightarrow c = 12$$

$$\frac{c}{20} = 240 \Rightarrow c = 12$$

$$\frac{c}{20}$$

$$\text{Vậy } a = 20; b = 16; c = 12$$

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường LƯU KHÁNH ĐÀM 2022 - 2023)

Tìm x, y biết :

a, $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

b, $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

a) $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| \geq |x - 2010 + 2014 - x| + |x - 2012| \geq 4$ (*)

Mà $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

nên (*) xảy ra dấu “=”

Suy ra:
$$\begin{cases} x - 2012 = 0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases}$$

$$x = 2012$$

$$y = \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$$

b,

$$y = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

TH1: $2x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

TH2: $2x - 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Duyên Hà 2022 - 2023)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn $\frac{5z - 6y}{6} = \frac{6x - 4z}{7} = \frac{4y - 5x}{8}$ và $3x - 2y + 5z = 96$. Tìm x, y, z

Lời giải

$$\frac{5z - 6y}{6} = \frac{6x - 4z}{7} = \frac{4y - 5x}{8}$$

$$\frac{20z - 24y}{24} = \frac{30x - 20z}{35} = \frac{24y - 30x}{48}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{20z - 24y}{24} = \frac{30x - 20z}{35} = \frac{24y - 30x}{48} = \frac{(20z - 24y) + (30x - 20z) + (24y - 30x)}{24 + 35 + 48} = 0$$

Dẫn đến: $30x = 24y = 20z$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$$

Đặt:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 5k \\ z = 6k \end{cases} \quad (1)$$

$$3x - 2y + 5z = 96, \text{ tính được } k = 3$$

Mà

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 18 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được

Vậy $x = 12, y = 15, z = 18$.

Câu 5. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết: $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$ và $5a - 3b - 4c = 46$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} &= \frac{5(a-1)}{5 \cdot 2} = \frac{3(b+3)}{3 \cdot 4} = \frac{4(c-5)}{4 \cdot 6} = \frac{5a-5-3b-9-4c+20}{10-12-24} \\ &= \frac{5a-5-3b-9-4c+20}{-26} = \frac{(5a-3b-4c)+(-5-9+20)}{-26} = \frac{46+6}{-26} = -2 \\ \frac{a-1}{2} &= -2 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$a = -3$$

$$\frac{b+3}{4} = -2$$

Ta có:

$$b = -11$$

$$\frac{c-5}{6} = -2$$

Ta có:

$$c = -7$$

Vậy $a = -3, b = -11, c = -7$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (*)

$$\text{Ta có: } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó:

$$\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

Vậy $x = 27, y = 36, z = 60$

Câu 7. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{13} = \frac{xy}{200} = \frac{x+y+x-y}{3+13} = \frac{x}{8}$$

Nếu $x=0 \Rightarrow y=0$

Nếu $x \neq 0$

$$\frac{x \cdot y}{200} = \frac{x}{8}$$

$$\frac{y}{25} = 1$$

$$y = 25$$

Thay $y = 25$, ta có $\frac{x - 25}{3} = \frac{x}{8}$

$$8x - 200 = 3x$$

$$x = 40$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (40; 25)\}$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

a) Tìm x, y, z biết: $\frac{3x - 2y}{5} = \frac{2z - 5x}{3} = \frac{5y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 50$

b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2020x + y^{2019} + z^{2019}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Từ } \frac{3x - 2y}{5} &= \frac{2z - 5x}{3} = \frac{5y - 3z}{2} \\ \Rightarrow \frac{15x - 10y}{25} &= \frac{6z - 15x}{9} = \frac{10y - 6z}{4} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{15x - 10y}{25} = \frac{6z - 15x}{9} = \frac{10y - 6z}{4} = \frac{15x - 10y + 6z - 15x + 10y - 6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x - 10y = 0 \\ 6z - 15x = 0 \\ 10y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 5x \\ 5y = 3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\Rightarrow x = 10, y = 15, z = 25$$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$x + y + z = 0,5$$

$$\frac{0,5 - x + 1}{x} = \frac{0,5 - y + 2}{y} = \frac{0,5 - z - 3}{z} = 2$$

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{6}, z = \frac{-5}{6}$$

Khi đó ta có $A = 2020x + y^{2019} + z^{2019} = 2020 \cdot 0,5 + 0 = 1010$

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Vậy với x, y, z là các số thực thỏa mãn thì giá trị của biểu thức A là 1010

Câu 9. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

a) Tìm x, y biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3}$ và $x+y=2$

b) Cho a, b, c là các số thực khác 0.

Tìm các số thực x, y, z khác không thỏa mãn: $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{6x-3}{15} = \frac{6y-4}{6} = \frac{6x-3+6y-4}{15+6} = \frac{6(x+y)-7}{21}$$

$$= \frac{6 \cdot 2 - 7}{21} = \frac{5}{21} \quad (\text{vì } x+y=2)$$

Từ $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{5}{21}$ suy ra $\begin{cases} 42x-21=25 \\ 63y-42=15 \end{cases}$

$$\begin{cases} 42x=46 \\ 63y=57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{23}{21} \\ y = \frac{19}{21} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{23}{21}; y = \frac{19}{21}$

b) $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{xyz}{ayz+bxz} = \frac{yzx}{bzx+cyx} = \frac{zxy}{cxy+azy} \quad (x, y, z \neq 0)$

Suy ra $\begin{cases} ayz+bxz = bzx+cyz \\ bzx+cyz = cxy+azy \\ ayz+bxz = cxy+azy \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ayz = cyx \\ bzx = azy \\ bxz = cxy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} az = cx \\ bx = ay \\ bz = cy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$, thay vào $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$, ta có

$$\frac{ak.bk}{abk+bak} = \frac{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = k^2$$

$$\Rightarrow k = 2k^2$$

$$\Rightarrow k(1-2k) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \text{ vì } k \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases} \text{ . Vậy } \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết rằng $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

Lời giải

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

$\frac{2x}{18} = 3 \Rightarrow x = 27$

$\frac{3y}{36} = 3 \Rightarrow y = 36$

$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$

$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$

Vậy $x = 27; y = 36; z = 60$

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x + z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS MINH KHAI 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

Lời giải

Nhận xét: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| \geq 0$

suy ra $11x \geq 0$ hay $x \geq 0$.

Với $x \geq 0$ ta có: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$x = 1 - \frac{1}{11}$$

$$x = \frac{10}{11}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Tìm x, y thỏa mãn: $|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |x - 4| = 3$

Lời giải

Theo bài cho: $|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |x - 4| = 3$

$$|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |4 - x| = 3 \quad (1)$$

Ta có: $|x - 1| + |4 - x| \geq |(x - 1) + (4 - x)|$

$$|x - 1| + |4 - x| \geq 3 \quad (2)$$

$$|x - 2| \geq 0, |y - 3| \geq 0 \quad (3)$$

Từ (2), (3) và (1) suy ra:

$$\begin{cases} |x - 1| + |4 - x| = 3 & (4) \\ |x - 2| = 0 & (5) \\ |y - 3| = 0 & (6) \end{cases}$$

Từ (5) ta được $x = 2$, thay vào (4) ta có: $|2 - 1| + |4 - 2| = 3$
 $1 + 2 = 3$ (luôn đúng)

Từ (6) ta được $y = 3$.

Vậy: $x = 2, y = 3$.

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$

Lời giải

Ta có: $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$

Xét: $2x - 3 = 0$

$$x = \frac{3}{2}$$

Xét: $3x + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Ta có bảng xét dấu của

x	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	
$2x - 3$	-	-	0 +
$3x + 2$	+	0	+ -

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

+) Nếu $x < \frac{-2}{3}$ thì: $|2x - 3| = -(2x - 3) = -2x + 3$
 $|3x + 2| = -(3x + 2) = -3x - 2$

Khi đó: $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$

$$(-2x + 3) - (-3x - 2) = -4$$

$$-2x + 3 + 3x + 2 = -4$$

$$x + 5 = -4$$

$$x = -4 - 5$$

$$x = -9 \text{ (thỏa mãn)}$$

+) Nếu $\frac{-2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ thì: $|2x - 3| = -(2x - 3) = -2x + 3$
 $|3x + 2| = 3x + 2$

Khi đó: $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$

$$(-2x + 3) - (3x + 2) = -4$$

$$-2x + 3 - 3x - 2 = -4$$

$$-5x + 1 = -4$$

$$x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

+) Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì: $|2x - 3| = 2x - 3$

$$|3x + 2| = 3x + 2$$

Khi đó:

$$|2x - 3| - |3x + 2| = -4$$

$$(2x - 3) - (3x + 2) = -4$$

$$2x - 3 - 3x - 2 = -4$$

$$x = -1 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-9; 1\}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết:

$$|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3$$

Lời giải

$$|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3 \quad (1)$$

Với mọi x ta có:

$$x^2 \geq 0$$

$$2x^2 \geq 0$$

$$2x^2 + 3 \geq 3$$

$$|2x^2 + 3| = 2x^2 + 3$$

Khi đó (1) trở thành:

$$|7 - 3x| + 2(x^2 + 2) = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| + 2x^2 + 4 = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| = 3x - 7$$

$$\Rightarrow 3x - 7 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3x \geq 7$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

$$x \geq \frac{7}{3}$$

Vậy

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Trung 2022 - 2023)

$$x \text{ biết: } |x - 3| + |x - 2| = 1$$

Tìm

Lời giải

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |x - 3| + |x - 2| = 1 \quad (1)$$

$$\text{Xét: } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Ta có bảng xét dấu:

x	2	3
$x - 3$	-	+
$x - 2$	-	+

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

- Nếu $x < 2$ thì (1) trở thành:

$$-(x - 3) - (x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow -2x = -4$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

- Nếu $2 \leq x < 3$ thì (1) trở thành:

$$-(x-3)+(x-2)=1 \Rightarrow 0x=0 \text{ (Luôn đúng với } 2 \leq x < 3 \text{)}$$

- Nếu $3 \leq x$ thì (1) trở thành:

$$(x-3)+(x-2)=1$$

$$2x=6$$

$$x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $2 \leq x \leq 3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Cho biểu thức đại số $A = \frac{x^3 + 2x^2y - 0,5xy^2 + 2}{x^2 - xy + 1}$ tính giá trị của A
với x, y thỏa mãn $(2x-1)^2 + |y+1| = 0$

Lời giải

Ta có $(2x-1)^2 + |y+1| = 0$

Mà $(2x-1)^2 \geq 0$ và $|y+1| \geq 0$ với mọi x, y

$$\Rightarrow (2x-1)^2 + |y+1| \geq 0$$

Nên $\begin{cases} 2x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$$

Thay $x=\frac{1}{2}$ và $y=-1$ ta có

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1) - 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1}$$

$$A = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{11}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{14}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là $\frac{11}{14}$

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Lời giải

Điều kiện $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Nên từ $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

$$x+1+x+2+x+3=4x$$

$$x=6 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy $x=6$ là giá trị cần tìm.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x-1| + 2 = 3$

Lời giải

Lập luận được $|x - 1| + 2 > 0$

Nên $|x - 1| + 2 = 3$

$$\Rightarrow |x - 1| + 2 = 3$$

$$\Rightarrow |x - 1| = 1$$

$$\Rightarrow x - 1 = 1 \text{ hoặc } x - 1 = -1$$

Vậy $x = 2, x = 0$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| = 10x$

Lời giải

$$|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| = 10x \quad (1)$$

Mà $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq 0$ với mọi giá trị của x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow x + 1 > 0, x + 2 > 0, x + 3 > 0, x + 4 > 0$

$$\Rightarrow |x + 1| = x + 1, |x + 2| = x + 2, |x + 3| = x + 3, |x + 4| = x + 4 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 10x$

$$\Rightarrow 4x + 10 = 10x \Rightarrow 6x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn } x \geq 0 \text{)}$$

Vậy $x = \frac{5}{3}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

x biết: $\left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$

Tìm

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| \geq 0 (\forall x) \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| \geq 0 (\forall x) \end{cases}$$

mà

Nên $4044x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

+ Vì $x \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| > 0 \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| = \frac{1}{3} + 2021x \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = \frac{2}{3} + 2022x \end{cases}$$

$$\left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

Do đó :

$$\frac{1}{3} + 2021x + \frac{2}{3} + 2022x = 4044x$$

+ Tìm được $x = 1$ (Thỏa mãn)

+ KL

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x - 1| + |x - 2| = 5$.

Lời giải

$$|x - 1| + |x - 2| = 5 \quad (1)$$

+) Với $x \geq 2$ khi đó (1) có dạng: $x - 1 + x - 2 = 5 \Rightarrow 2x - 3 = 5$ (chọn)

+) Với $1 < x < 2$ khi đó (1) có dạng: $x - 1 + 2 - x = 5 \Rightarrow 0x = 4$ (vô lý)

+) Với $x \leq 1$ khi đó (1) có dạng: $1 - x + 2 - x = 5 \Rightarrow -2x + 3 = 5$ (chọn)

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x - 1| + |x - 2| = 5$.

Lời giải

$$|x - 1| + |x - 2| = 5 \quad (1)$$

+) Với $x \geq 2$ khi đó (1) có dạng: $x - 1 + x - 2 = 5 \Rightarrow 2x - 3 = 5$ (chọn)

+) Với $1 < x < 2$ khi đó (1) có dạng: $x - 1 + 2 - x = 5 \Rightarrow 0x = 4$ (vô lý)

+) Với $x \leq 1$ khi đó (1) có dạng: $1 - x + 2 - x = 5 \Rightarrow -2x + 3 = 5$ (chọn)

KL: $x = 4$ hoặc $x = -1$

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 4| = 3$

Lời giải

Nhận thấy

$$|x - 1| + |x - 4| = |x - 1| + |4 - x|$$

Ta có:

$$|x - 1| \geq x - 1$$

$$|4 - x| \geq 4 - x$$

$$\Rightarrow |x - 1| + |x - 4| = |x - 1| + |4 - x| \geq x - 1 + 4 - x$$

$$\Rightarrow |x - 1| + |x - 4| \geq 3$$

Lại có:

$$|x - 2| \geq 0 \Rightarrow |x - 1| + |x - 2| + |x - 4| \geq 3$$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi

Vậy $x = 2$

Lời giải

$$|x+1| \geq 0; |x+2| \geq 0; |x+3| \geq 0; \dots; |x+100| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| \geq 0$$

$$\Rightarrow 650x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Khi đó

$$100x + \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 605x$$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 605x$$

$$\Rightarrow 505x = 5050 \Rightarrow x = 10 \text{ (chọn vì thỏa mãn } x \geq 0)$$

$$V_{ay} \quad x=10$$

Tìm x biết: $\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}.$

Lời giải

$$\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

$$\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{3}{10}$$

$$x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

$$x = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

$$x = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

Vậy

Tìm x biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Tìm x biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Vì vế trái luôn không âm nên vế phải $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có bảng sau:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$ x - 2 $	$2 - x$	$2 - x$	0
$ 3 - 2x $	$3 - 2x$	0	$2x - 3$
$ x - 2 + 3 - 2x $	$2 - x + 3 - 2x$	$2 - x + 2x - 3$	$x - 2 + 2x - 3$

Nếu $x > 2$ ta có: $x - 2 + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Nếu $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2 - x + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0$ (loại)

Nếu $x < \frac{1}{2}$ ta có: $2 - x + 3 - 2x = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 4; x = \frac{6}{5}$.

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật

Câu 1. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

Tìm giá trị của x biết: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023} \\ & \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023} \\ & 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023} \\ & 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023} \\ & \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2021}{2023} \\ & \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2023} \\ & x+1 = 2023 \\ & x = 2022 \end{aligned}$$

Dạng 7. Tổng các biểu thức không âm bằng 0

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS MINH KHAI 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn:

$$|x - 1| + (y + 2)^{20} = 0$$

Lời giải

Do $|x - 1| \geq 0; (y + 2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x - 1| + (y + 2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

Kết hợp $|x - 1| + (y + 2)^{20} = 0$ suy ra $|x - 1| = 0$ và $(y + 2)^{20} = 0$

Nên: $x = 1; y = -2$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1; y = -2$

là: $C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$

Vậy $C = 2067$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + (x+2y-z)^{2023} = 0$

Chứng minh rằng $x = y.z$

Lời giải

Ta có: $(x-1)^{2022} \geq 0 \forall x$

$(2y-1)^{2020} \geq 0 \forall y$

$|x+2y-z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

$(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

Mà $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} = 0$

Nên dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} (x-1)^{2022} = 0 \\ (2y-1)^{2022} = 0 \\ |x+2y-z|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y.z$ (đều bằng 1) (đpcm)

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Cho $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z-3)^{2023} = 0$. Chứng minh $8x-2y+z=1$

Lời giải

Vì $(x-1)^{2022} \geq 0$ với mọi x

$|y-3| \geq 0$ với mọi y

$(x-y+z-3)^{2023} \geq 0$ với mọi x, y, z

Do đó $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z-3)^{2023} = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (x-1)^{2020} = 0 \\ |y-3| = 0 \\ |x-z-2|^{2023} = 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Khi đó $8x-2y+z=8.1-2.3-1=1$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Cho $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = 5x^2y^{2020}z^{2021}$.

Lời giải

Vì $|x-2| \geq 0$ với $\forall x$; $|y-1| \geq 0$ với $\forall y$; $(x+y-z-2)^{2020} \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Do đó $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |x-2|=0 \\ |y-1|=0 \\ (x+y-z-2)^{2020}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy $A = 20$.

Dạng 8. Tìm ẩn dựa vào tính chất bắc cầu

Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, Trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $x \leq y \leq z$

Vì x, y, z là các số tự nhiên khác 0 $\Rightarrow 1 \leq x \leq y \leq z$

Ta có $x + y + z = xyz$ (*)

$$\Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào (*) ta được

$$1 + y + z = yz$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1; 2; 3)$$

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên các bộ số (x, y, z) thỏa mãn bài toán là :

$(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Duyên Hải 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ biết: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

$$\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$$

Ta có: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4$$

$$\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16 \quad (1)$$

Ta có: $(x+2y-6)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$$

Vậy biểu thức: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (x+2y-6)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy $x=2; y=2$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Cho các số x, y thỏa mãn $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = 402x^2y + 284xy^2$

Lời giải

Vì $(x-3)^4 \geq 0; (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y nên

$(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y .

Mà theo đề bài: $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} = 0$

Hay: $(x-3)^4 = 0$ và $(2y-1)^{2020} = 0$

suy ra $x=3, y=\frac{1}{2}$

Khi đó tính được: $M = 2022$

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường LƯU KHÁNH ĐÀM 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2017x^2 + 2018 = y^2$

Lời giải

Có $2016x^2 + 2018 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ (*)

Từ (*) $\Rightarrow (y+x)(y-x)$ chẵn

Có $y+x+y-x=2y$ chẵn

$\Rightarrow y+x, y-x$ cùng chẵn $\Rightarrow (y+x)(y-x):4$

Mà $2016x^2 + 2018$ không chia hết cho 4

Vậy không tìm được số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức trên

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

Giả sử $x > y$, ta có: $2^x + 2^y = 2^y (2^{x-y} + 1) = 2^3 \cdot 9$

Do $2^{x-y} + 1$ là số lẻ nên $2^{x-y} + 1 \in \{1; 3; 9\}$

$2^{x-y} + 1 = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 9$	$2^y = 2^3$ (thoả mãn)

Với $2^y = 2^3$ và $2^{x-y} + 1 = 9 \Rightarrow y = 3$ và $x = 6$.

Vậy $x = 6; y = 3$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b + c)$

Lời giải

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \quad (1) \quad \text{và} \quad a^2 = 2(b + c) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra a^2 chẵn $\Rightarrow a$ chẵn.

Từ (1) suy ra $a > b; a > c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c)$

Kết hợp với (2) $\Rightarrow a^2 < 4a \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 2$ thay vào (2)

Ta được: $b + c = 2 \Rightarrow b = c = 1$ (vì b, c nguyên dương).

Thử lại thấy đúng, vậy $a = 2, b = c = 1$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó là: a, b . ĐK: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Theo bài ra ta có: $2(a + b) = ab$

$$2a + 2b = ab$$

$$2a - ab + 2b = 0$$

$$2a - ab - 4 + 2b = -4$$

$$a(2 - b) - 2(2 - b) = -4$$

$$(2 - b)(a - 2) = -4$$

Vì a, b là các số nguyên dương nên $2 - b \in \mathbb{Z}; a - 2 \in \mathbb{Z}$

Để $(2 - b)(a - 2) = -4$ thì $2 - b$ và $a - 2$ phải là ước của -4

$$\text{Có } U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Lập bảng giá trị của a, b ta có:

$a - 2$	- 1	1	- 2	2	4	- 4
a	1	3	0 (loại)	4	6	- 2 (loại)
$2 - b$	4	- 4	2	- 2	- 1	1
b	- 2	6	0 (loại)	4	3	1
	Loại		Loại			Loại

Vậy với $(a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Đức Nông 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $x; y$ sao cho: $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

Lời giải

$$(2^x + 2^y) - 2^{x+y} = 0$$

$$2^x + 2^y - 2^x \cdot 2^y = 0$$

$$2^x (1 - 2^y) + 2^y = 0$$

$$2^x (1 - 2^y) - (1 - 2^y) + 1 = 0$$

$$(1 - 2^y)(2^x - 1) = -1$$

$$(2^y - 1)(2^x - 1) = 1 \quad (1)$$

Vì x, y là số tự nhiên (bài cho) nên:

$$\begin{cases} (2^y - 1) \in \mathbb{N} \\ (2^x - 1) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra: $(2^y - 1)(2^x - 1) = 1.1$

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 1 \\ 2^y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 1; y = 1$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Y Yên 2021 - 2022)

Tìm tất cả các giá trị nguyên x, y thỏa mãn: $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$.

Lời giải

Với mọi giá trị của y nguyên thì $|y - 45|$ và $y - 45$ luôn có cùng tính chẵn hay tính lẻ, suy ra $|y - 45| + y - 45$ luôn có giá trị là số nguyên chẵn

Do đó $2^x + 37$ là số nguyên chẵn, mà 37 là số lẻ nên 2^x là số nguyên lẻ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Với $x = 0$, ta có $1 + 37 = |y - 45| + y - 45 \Leftrightarrow |y - 45| + (y - 45) = 38 \quad (*)$

+ Trường hợp 1: $(y - 45) < 0 \Rightarrow |y - 45| = -(y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $-(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow 0 = 38$, điều này vô lí.

+ Trường hợp 2: $(y - 45) \geq 0 \Rightarrow |y - 45| = (y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$ (chọn)

Vậy $(x; y) = (0; 64)$

Câu 6. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x nguyên biết: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 90| = 2025$

Lời giải

Viết lại: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 45| + |x - 46| + \dots + |x - 90| = 2025$

$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 45| + |46 - x| + \dots + |90 - x| = 2025$$

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$|x - 1| \geq x - 1; |x - 2| \geq x - 2; \dots; |x - 45| \geq x - 45$$

$$|46 - x| \geq 46 - x; |47 - x| \geq 47 - x; \dots; |90 - x| \geq 90 - x$$

$$\Rightarrow VT = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |90 - x| \geq x - 1 + x - 2 + \dots + 90 - x$$

$$\Rightarrow VT \geq (46 + 47 + \dots + 90) - (1 + 2 + 3 + \dots + 45)$$

$$\Rightarrow VT \geq 2025$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left. \begin{array}{l} |x-1|=x-1 \\ |x-2|=x-2 \\ \dots\dots\dots \\ |x-45|=x-45 \\ |x-46|=46-x \\ |x-47|=47-x \\ \dots\dots\dots \\ |x-90|=90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots\dots\dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots\dots\dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

Mà x là số nguyên $\Rightarrow x \in \{45; 46\}$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $xy + 3x - 2y = 11$

Lời giải

Ta có: $xy + 3x - 2y = 11$

$$xy + 3x - 2y - 6 = 5$$

$$x(y+3) - 2(y+3) = 5$$

$$(x-2)(y+3) = 5$$

Vì x, y là số nguyên nên $5 : (x-2) \Rightarrow (x-2) \in \{1; -1; 5; -5\}$

Ta có bảng sau:

$x-2$	1	-1	5	-5
$y+3$	5	-5	1	-1
x	3	1	7	-3
y	2	-8	-2	-4

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là: $(3; 2); (1; -8); (7; -2); (-3; -4)$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{x-2}$. Tìm số nguyên x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

ĐK: $x \neq 2$

$$A = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$$

A có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{x-2}$ nguyên.

Do x nguyên nên $x-2 \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Ta xét bảng sau:

$x-2$	-1	1	-5	5
x	1	3	-3	7

$$x \in \{-1; 1; 3; 7\} \quad (\text{TMĐK})$$

Vậy $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$ thì A có giá trị nguyên.

Câu 9. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $2xy - y = 4x + 3$

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$2xy - y = 4x + 3$$

$$2xy - 4x - y + 2 = 5$$

$$2x(y - 2) - (y - 2) = 5$$

$$(2x - 1)(y - 2) = 5$$

$$(2x - 1)(y - 2) = 5 = 1.5 = 5.1 = (-1).(-5) = (-5).(-1)$$

Vì x, y là số nguyên nên ta có bảng sau:

$y - 2$	5	1	-1	-5
$2x - 1$	1	5	-5	-1
x	1	3	-2	0
y	7	3	1	-3

Vậy: $x \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022)

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Lời giải

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Ta có: $100 - y^2 \leq 100$

$$\Rightarrow 8(x - 2021)^2 \leq 100$$

$$\Rightarrow (x - 2021)^2 \leq 12,5$$

Do x, y nguyên nên $(x - 2021)^2$ và y^2 là số chính phương, nên

+ TH 1: $(x - 2021)^2 = 0 \Rightarrow x = 2021$ thay vào $\Rightarrow y = 10; y = -10$

+ TH 2: $(x - 2021)^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2021 = 1 \\ x - 2021 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2020 \end{cases} \text{ Thay vào } \Rightarrow y^2 = 92 \text{ (loại)}$$

+ TH 3: $(x - 2021)^2 = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2021 = 2 \\ x - 2021 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2023 \\ x = 2019 \end{cases} \text{ Thay vào } \Rightarrow y^2 = 68 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ TH 4: } (x - 2021)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x - 2021 = 3 \\ x - 2021 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2024 \\ x = 2018 \end{cases}$$

Thay vào $\Rightarrow y^2 = 28$ (loại)

Vậy $x = 2021; y = 10$ và $x = 2021; y = -10$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>