

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Môn Toán lớp 7

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Tính
$$P = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$$

b) Biết $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$. Tính $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$

c) Không dùng máy tính, hãy so sánh:
$$A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$$
 với 4

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2007$. Tính a, b, c

b) Chứng minh rằng: từ tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \neq 1$ ta có tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE . Gọi M là giao điểm của DC và BE

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC$

b) Tính số đo $\angle BMC$

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC . M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác ABC . AN, BP, CQ là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{2^{19} \cdot (3^3)^3 + 3 \cdot 5 \cdot (2^2)^9 \cdot (3^2)^4}{(2 \cdot 3)^9 \cdot 2^{10} + (3 \cdot 2^2)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 3^{10} \cdot 2^{20}} \\ &= \frac{2^{18} \cdot 3^2 \cdot (2 + 5)}{3^9 \cdot 2^{19} \cdot (1 + 3 \cdot 2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$b) \text{ có : } 2^3 = (2 \cdot 1)^3 = 2^3 \cdot 1^3$$

$$4^3 = (2 \cdot 2)^3 = 2^3 \cdot 2^3$$

$$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

.....

$$20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow S = 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + 10^3) = 8 \cdot 3025 = 24200$$

$$\begin{aligned} c) A &= \frac{2007 - 1}{2007} + \frac{2008 - 1}{2008} + \frac{2009 - 1}{2009} + \frac{2006 + 3}{2006} \\ &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\ &= 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \end{aligned}$$

$$\text{Do } \frac{1}{2006} > \frac{1}{2007}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2008}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2009} \Rightarrow A > 4$$

Câu 2.

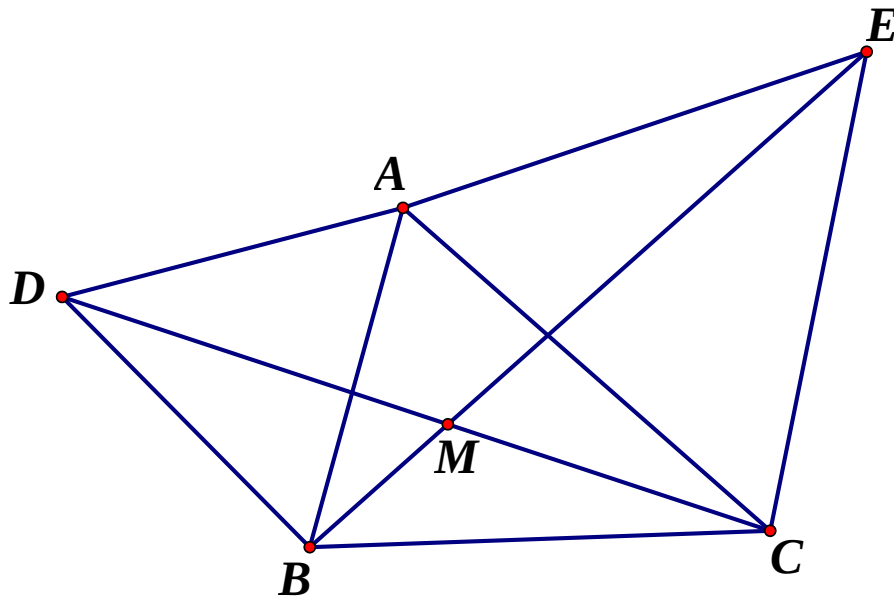
$$\begin{aligned} a) \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 &\Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \\ &\text{. Tương tự } b = c \\ &\Rightarrow a = b = c = \frac{2007}{3} = 669 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{a+b}{a-b} \neq 1 \Rightarrow b \neq 0; \frac{c+d}{c-d} \neq 1 \Rightarrow d \neq 0$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$$

$$\Rightarrow 2bc = 2ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (đpcm)}$$

Câu 3.



$\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

$$AD = AB (\triangle ADB \text{ đều}); AE = AC (\triangle AEC \text{ đều})$$

$$\angle BAE = \angle DAC (=60^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \Rightarrow \angle ACM = \angle AEM$$

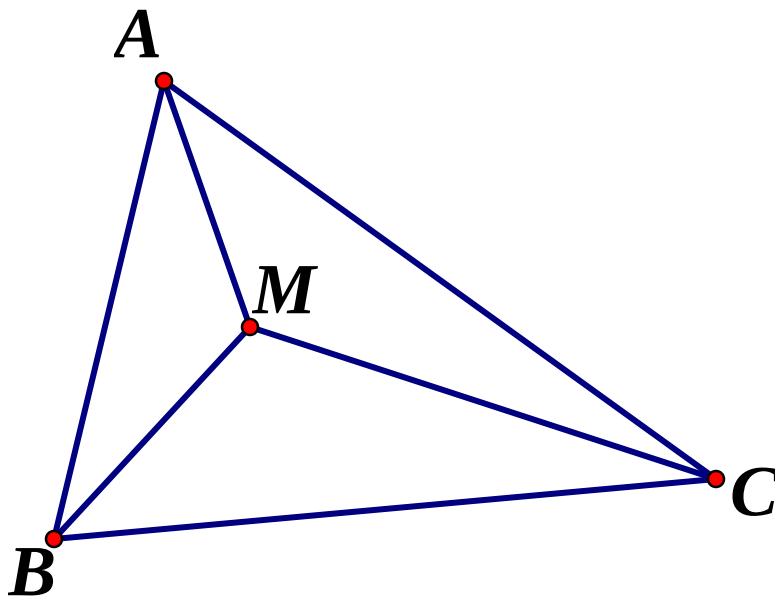
$$\angle BMC = \angle MCE + \angle CEM$$

$$= \angle MCA + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEM + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEC + \angle ACE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Câu 4.



a) Tam giác MBC có : $MB + MC > BC$

Tương tự : $MC + MA > AC; MA + MB > AB$

$$\Rightarrow 2MA + 2MB + 2MC > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng câu a ta có:

$$2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$$

Có: $GA = \frac{2}{3}AN; GB = \frac{2}{3}BP; GC = \frac{2}{3}CQ$

Thay vào trên được:

$$2\left(\frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}BP + \frac{2}{3}CQ\right) > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$