

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 8-9-10 ĐIỂM**Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn****Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến**

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int_a^b f[u(x)]dx$ thì ta sẽ đặt $u(x) = t$

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{-5}^1 f(x)dx = 9. \text{ Tích phân } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx \text{ bằng}$$

- A. 15. B. 27. C. 75. D. 21.

Câu 2. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn

$$\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^{10} f(x)dx = 1. \text{ Tính } P = \int_0^1 f(2x)dx.$$

- A. $P = 6$. B. $P = -6$. C. $P = 3$. D. $P = 12$.

Câu 3. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho $I = \int_1^5 f(x)dx = 26$. Khi đó $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1]dx$ bằng

- A. 15. B. 13. C. 54. D. 52.

Câu 4. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tích phân } I = \int_0^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 8$. B. $I = 6$. C. $I = 4$. D. $I = 10$.

Câu 5. (THPT Cẩm Giàng 2019) Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 [f(5-3x)+7]dx$.

- A. $P = 15$. B. $P = 37$. C. $P = 27$. D. $P = 19$.

Câu 6. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho $\int_0^4 f(x)dx = 2018$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)]dx.$$

- A. $I = 0$. B. $I = 2018$. C. $I = 4036$. D. $I = 1009$.

Câu 7. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$; $\int_1^3 f(-2x)dx = 3$.

Giá trị của $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$ là

- A. $I = 5$. B. $I = 2$. C. $I = 14$. D. $I = 11$.

Câu 8. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018, \text{ tính } I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx.$$

- A. $I = 1008$. B. $I = 2019$. C. $I = 2017$. D. $I = 1009$.

Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 8.

Câu 10. (Sở Hà Nội 2019) Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 4. D. -1.

Câu 11. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 f(4-x) dx + 2 \int_1^2 g(2x-1) dx$$

- A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1) dx = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x) dx$.

- A. $I = 16$. B. $I = 18$. C. $I = 8$. D. $I = 20$.

Câu 13. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(10-x)$ và

$$\int_3^7 f(x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_3^7 xf(x) dx.$$

- A. 80. B. 60. C. 40. D. 20.

Câu 14. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 9$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx.$$

- A. $I = 5$. B. $I = 9$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 15. (Chuyên Quốc Học Huế -2019) Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tính tích phân

$$J = \int_0^2 f(2x) dx.$$

- A. $J = 32$ B. $J = 64$ C. $J = 8$ D. $J = 16$

Câu 16. (Việt Đức Hà Nội 2019) Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của

$$\int_1^4 f(3x-3) dx \text{ là}$$

- A. 0. B. 24. C. 27. D. 3.

Câu 17. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x)dx = 2$. Tích phân

$$\int_0^2 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 8. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 18. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x)dx$.

- A. $I = \frac{1}{2017}$. B. $I = 0$. C. $I = 2017$. D. $I = 1$.

Câu 19. Cho tích phân $\int_1^2 f(x)dx = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$ theo a .

- A. $I = 4a$. B. $I = \frac{a}{4}$. C. $I = \frac{a}{2}$. D. $I = 2a$.

Câu 20. (Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 8.

Câu 21. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; x \geq 1 \\ 5 - x; x < 1 \end{cases}$. Tính

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx.$$

- A. $I = \frac{71}{6}$. B. $I = 31$. C. $I = 32$. D. $I = \frac{32}{3}$.

Câu 22. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019) Cho $I = \int_1^2 f(x)dx = 2$. Giá trị của

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx \text{ bằng}$$

- A. 2. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. -2.

Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Biết $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_4^5 f(x)dx = 20$. Tính

$$\int_1^2 f(4x - 3)dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x})e^{2x} dx.$$

- A. $I = \frac{15}{4}$. B. $I = 15$. C. $I = \frac{5}{2}$. D. $I = 25$.

Câu 24. (Chuyên Thái Bình 2019) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(2 - x) = x \cdot e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\text{A. } I = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

$$\text{B. } I = \frac{2e - 1}{2}.$$

$$\text{C. } I = e^4 - 2.$$

$$\text{D. } I = e^4 - 1.$$

Câu 25. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

$$\text{A. } I = 5$$

$$\text{B. } I = 6$$

$$\text{C. } I = 3$$

$$\text{D. } I = 2$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$.

Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

$$\text{A. } 0.$$

$$\text{B. } 1.$$

$$\text{C. } 4.$$

$$\text{D. } 8.$$

Câu 27. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$

$$\text{A. } 4$$

$$\text{B. } 6$$

$$\text{C. } 7$$

$$\text{D. } 10$$

Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$\int_0^{2018} f(x) dx = 2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx$ bằng

$$\text{A. } 4.$$

$$\text{B. } 1.$$

$$\text{C. } 2.$$

$$\text{D. } 3.$$

Câu 29. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$ và

$\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\text{A. } I = 2.$$

$$\text{B. } I = 6.$$

$$\text{C. } I = 3.$$

$$\text{D. } I = 4.$$

Câu 30. (SGD Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

$$\text{A. } I = 3.$$

$$\text{B. } I = \frac{3}{2}.$$

$$\text{C. } I = 2.$$

$$\text{D. } I = \frac{5}{2}.$$

Câu 31. (SGD - Nam Định - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn

$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int_3^4 f(x) dx$.

$$\text{A. } I = 3 + 2 \ln^2 2.$$

$$\text{B. } I = 2 \ln^2 2.$$

$$\text{C. } I = \ln^2 2.$$

$$\text{D. } I = 2 \ln 2.$$

Câu 32. (Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 4]$ và thỏa mãn

$$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

- A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$. B. $I = 2 \ln^2 2$. C. $I = \ln^2 2$. D. $I = 2 \ln 2$.

Câu 33. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn

$[-2; 2]$. Biết rằng $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$. B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4$.
C. $\int_0^1 f(x) dx = -1$. D. $\int_0^2 f(x) dx = -3$.

Câu 34. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$.

Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$$

- A. $I = \frac{4}{3}$. B. $I = \frac{2}{3}$. C. $I = -\frac{2}{3}$ D. $I = \frac{1}{3}$.

Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

- A. $I = 6$. B. $I = 4$. C. $I = 10$. D. $I = 2$.

Câu 36. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(2020 - x)$ và

$$\int_3^{2017} f(x) dx = 4. \text{ Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 16160. B. 4040. C. 2020. D. 8080.

Câu 37. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 38. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4. \text{ Giá trị } \int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{52}{25}$. B. 52. C. $\frac{48}{25}$. D. 48.

Câu 39. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 30.

B. 28.

C. 36.

D. 16.

Câu 40. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} xf'(\sin x) dx$$

A. $I = \frac{5}{2}\pi$.

B. $I = 10\pi$.

C. $I = 5$.

D. $I = 5\pi$.

Câu 41. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x^2)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Câu 42. (Hùng Vương Gia Lai 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng:}$$

A. $\frac{8}{9}$.

B. $\frac{16}{9}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 43. (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm

liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1) = 1$ và $f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x}, \forall x \in [0;1]$. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{1}{10}$.

B. $I = \frac{2}{5}$.

C. $I = -\frac{1}{60}$.

D. $I = \frac{1}{10}$.

Câu 44. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$2 \cos x \cdot f(1 + 4 \sin x) - \sin 2x \cdot f(3 - 2 \cos 2x) = \sin 4x + 4 \sin 2x - 4 \cos x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Khi đó $I = \int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. 8.

D. 16.

Câu 45. (THPT Đô Lương – Nghệ An – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn

$$f(x) + 2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (x+t)f(t)dt, \text{ với } \forall x \in [-1; 1] \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^1 f(x)dx$$

- A. $I = 3$
- B. $I = 4$
- C. $I = 2$
- D. $I = 1$

Câu 46. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$xf^2(x)[2f(x) - 1] = -2f^2(x)[f(x) + 1] + x - 2, \forall x \neq -1.$$

Biết $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6 \ln 2 \left(\frac{1}{4^x + 1} - \frac{1}{(4^x + 1)^2} \right) f(4^x) dx = -a \ln b$; (với a, b nguyên dương). Giá trị $T = 2a + b$

là

- A. $T = 5$.
- B. $T = 6$.
- C. $T = 4$.
- D. $T = 0$.

Câu 47. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = xe^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

- A. $I = e^4 - 1$.
- B. $I = e^4 - 2$.
- C. $I = \frac{2e-1}{2}$.
- D. $I = \frac{e^4-1}{4}$.

Câu 48. (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc 2022) Cho $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x) dx = 1, \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = 3$. Giá

trị của $\int_1^5 f(x) dx$ bằng:

- A. 13.
- B. -13.
- C. 16.
- D. -16.

Câu 49. (THPT Lương Bắc Bằng - Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x.f'(2x) dx$$

- A. $I = 13$.
- B. $I = 7$.
- C. $I = 12$.
- D. $I = 20$.

Câu 50. (THPT Nguyễn Cảnh Quân - Nghệ An 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $f(6) = 1$ và $\int_0^1 xf(6x) dx = 1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x) dx$ bằng

- A. -36.
- B. 34.
- C. 24.
- D. 36.

Câu 51. (Sở Thái Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_1^2 xf'(x) dx.$$

- A. $I = 5$.
- B. $I = -1$.
- C. $I = 2$.
- D. $I = 3$.

Câu 52. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(x) + f(-x) = 2\sin^2 x. \text{ Tính } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. 0.

D. π .

Câu 53. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y = f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x = -1, x = 0, x = 1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Giá trị tích phân

$$I = 2 \int_{-1}^0 f'(x) f''(x) dx + 4 \int_0^1 [f'(x)]^3 f''(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$.

B. $I = \frac{1}{3}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{26}{3}$.

Câu 54. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) dx = 8$. Giá trị

tích phân $I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx$ là

A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = 32$.

D. $I = 16$.

Câu 55. (Sở Hà Nội 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$e^x f'(e^x) = 1 + e^x. \text{ Khi đó } \int_1^e f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{e^2 - 1}{2}$

B. $\frac{3e^2 - 2}{2}$.

C. $\frac{e^2 + 1}{2}$

D. $\frac{e^2}{2}$.

Câu 56. (Sở Đắk Nông 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của

$$f(x) \text{ trên } \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } F(8) + G(8) = 8 \text{ và } F(0) + G(0) = -2. \text{ Khi đó } \int_{-2}^0 f(-4x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. 5.

C. -5.

D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 57. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2, \forall x \geq 0. \text{ Tính } \int_1^5 f(x) dx.$$

- A. $\frac{37}{6}$.
- B. $\frac{527}{3}$.
- C. $\frac{61}{6}$.
- D. $\frac{464}{3}$.

Câu 58. (Sở Phú Thọ 2023) Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } I = \int_1^4 x f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 15$.
- B. $I = -1$.
- C. $I = 14$.
- D. $I = 6$.

Câu 59. (THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 8]$

$$\text{thỏa mãn } \int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3) dx - \frac{4}{3} \int_1^8 f(x) dx = -\frac{247}{15}. \text{ Khi đó } \int_0^1 x f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{257 \ln 2}{2}$.
- B. $\frac{257 \ln 2}{4}$.
- C. 160.
- D. $\frac{639}{4}$.

Câu 60. (Sở Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = 7, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx = 3. \text{ Giá trị của } \int_1^3 [f(x) + 2x] dx \text{ bằng}$$

- A. 10.
- B. 15.
- C. -10.
- D. 12.

Câu 61. (Sở Hà Nam 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) = 4x^3 + k$ với

$$k = \int_0^1 x^2 f(x^2) dx. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx$$

- A. $\frac{3}{2}$.
- B. $\frac{5}{3}$.
- C. 2.
- D. $\frac{2}{3}$.

Câu 62. (Sở Nam Định 2023) Biết rằng tồn tại duy nhất bộ số $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản sao

cho $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x + 2}{\sqrt{1 + e^x}} dx = a + 2 \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ thuộc khoảng

- A. $(6; 10)$.
- B. $(16; 20)$.
- C. $(11; 15)$.
- D. $(1; 5)$.

Câu 63. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(9) + G(9) = 5$ và $F(0) + G(0) = 2$. Khi đó $\int_0^3 f(3x) dx$ bằng

- A. 3.
- B. $\frac{1}{2}$.
- C. 7.
- D. $\frac{3}{2}$.

Câu 64. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^e \frac{1 + f(\ln x)}{x} dx = 2$ và

$f(1) = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x f'(x) dx$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$.
- B. $-\frac{2}{3}$.
- C. $\frac{2e}{3}$.
- D. $\frac{5}{3}$.

Câu 65. (Sở Hải Dương 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + 2023.G(0) = 5$ và $F(0) + 2023G(2) = 2$. Khi đó $\int_3^5 f(5-x) dx$ bằng

- A. 2023.
- B. $-\frac{3}{2022}$.
- C. 3.
- D. $\frac{3}{2022}$.

Câu 66. (Sở Kon Tum 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) - x$ $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) + G(4) = 5$ và $F(1) + G(1) = -1$. Giá trị của $\int_0^1 f(3x+1) dx$ là:

- A. $\frac{1}{3}$.
 B. 6.
 C. 2.
 D. 1.

Câu 67. (Sở Cà Mau 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) = 6f(3x-1)$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(2) - F(3) = -24$. Khi đó $\int_5^8 f(x)dx$ bằng

- A. -12.
 B. -24.
 C. 24.
 D. 12.

Câu 68. (Sở Bà Rịa - Vũng Tàu 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(4) = 2023, \int_0^4 f(x)dx = 2024. \text{ Biểu thức } \int_0^2 x \cdot f'(2x)dx \text{ bằng}$$

- A. 2024. B. 1517. C. 2023. D. 1012.

Câu 69. (THPT Kim Liên - Hà Nội 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6) + G(6) = 8; F(0) + G(0) = -2$. Khi đó $\int_0^2 f(3x)dx$ bằng.

- A. 1. B. $\frac{5}{4}$. C. 5. D. $\frac{5}{3}$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ ta sẽ đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$

Câu 1. (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I = -12$ B. $I = 8$ C. $I = 1$ D. $I = -8$

Câu 2. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và

$$\int_0^1 xf'(3x)dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^3 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{25}{3}$. B. 3. C. 7. D. -9.

Câu 3. (Mã 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và

$$\int_0^1 xf'(4x)dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^4 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 8. B. 14. C. $\frac{31}{2}$. D. -16.

Câu 4. (Mã 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6) = 1$ và $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. B. 34. C. 24. D. -36.

Câu 5. (Mã 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx = 1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 B. 23 C. $\frac{123}{5}$ D. -25

Câu 6. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1) = -\frac{1}{18}$, $\int_0^1 x.f'(x)dx = \frac{1}{36}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{36}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $-\frac{1}{36}$.

Câu 7. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác 0. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx$ bằng

A. $6 - e^2$. B. $\frac{6 - e^2}{2}$. C. $9 - e^2$. D. $\frac{9 - e^2}{2}$.

Câu 8. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. $I = 20$ B. $I = 7$ C. $I = 12$ D. $I = 13$

Câu 9. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{21}$, $f(1) = 0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{12}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $-\frac{7}{10}$.

Câu 10. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x]dx$.

A. -1. B. $1 - \ln(\cos 1)$. C. 0. D. $1 - \cot 1$.

Câu 11. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

A. -1

B. 1

C. 3

D. -3

Câu 12. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m)dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \leq 0$.B. $0 < m \leq 3$.C. $3 < m \leq 6$.D. $m > 6$.

Câu 13. (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx$$

A. 4

B. $\frac{7}{5}$

C. 1

D. $\frac{7}{4}$

Câu 14. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$$[0;1] \text{ và } f(0) + f(1) = 0. \text{ Biết } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. π .B. $\frac{3\pi}{2}$.C. $\frac{2}{\pi}$.D. $\frac{1}{\pi}$.

Câu 15. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{7}{5}$

B. 1

C. $\frac{7}{4}$

D. 4

Câu 16. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36 \text{ và } \int_0^1 x.f(x) dx = \frac{1}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{3}{2}$

C. 4

D. $\frac{2}{3}$

Câu 17. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa

$$\text{mãn } f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4 \text{ và } \int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{115}$ B. $\frac{297}{115}$ C. $\frac{562}{115}$ D. $\frac{266}{115}$

Câu 18. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5 \text{ và } \int_0^1 x.f(x) dx = -\frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{15}{19}$ B. $\frac{17}{4}$ C. $\frac{17}{18}$ D. $\frac{15}{4}$

Câu 19. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn

$$f(2) = 6, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^2 x.f(x) dx = \frac{17}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 8

B. 6

C. 7

D. 5

Câu 20. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn

$$f(3) = 6, \int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2 \text{ và } \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3}. \text{ Tính phân } \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{53}{5}$ B. $\frac{117}{20}$ C. $\frac{153}{5}$ D. $\frac{13}{5}$

Câu 21. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa

$$\text{mãn } f(1) = 2, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8 \text{ và } \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx = 10. \text{ Tính phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{2}{285}$ B. $\frac{194}{95}$ C. $\frac{116}{57}$ D. $\frac{584}{285}$

Câu 22. (Bắc Giang - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $I = 2 - e.$ B. $I = e - 2.$ C. $I = \frac{e}{2}.$ D. $I = \frac{e-1}{2}.$

Câu 23. (Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$$\text{Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$$

- A. $I = 1.$ B. $I = \frac{1}{2}.$ C. $I = 2.$ D. $I = \frac{1}{4}.$

Câu 24. (Chuyên Vinh - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và

$$f(0) + f(1) = 0. \text{ Biết } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\pi.$ B. $\frac{1}{\pi}.$ C. $\frac{2}{\pi}.$ D. $\frac{3\pi}{2}.$

Câu 25. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\text{thỏa mãn } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1 \text{ và } \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2. \text{ Tính phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx \text{ bằng:}$$

- A. $4.$ B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}.$ C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}.$ D. $6.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1) = 0, \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$

$$\text{và } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\frac{\pi}{2}.$ B. $\pi.$ C. $\frac{1}{\pi}.$ D. $\frac{2}{\pi}.$

Câu 27. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 28. (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

- A. $\frac{e-1}{2}$. B. $\frac{e^2}{4}$. C. $e-2$. D. $\frac{e}{2}$.

Câu 29. (Sở Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn

$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{7}{5}$. B. $I = -\frac{7}{5}$. C. $I = -\frac{7}{20}$. D. $I = \frac{7}{20}$.

Câu 30. (THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

thỏa mãn: $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = \frac{7}{5}$. C. $I = 4$. D. $I = \frac{7}{4}$.

Câu 31. (Yên Phong 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$f(1)=3$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

- A. $\frac{35}{11}$. B. $\frac{65}{21}$. C. $\frac{23}{7}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 32. (THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và

thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x) dx$.

- A. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$.

Câu 33. (Sở Bạc Liêu - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$,

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{3} - \ln 3$ và $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2} dx = 2 \ln 3 - \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{4} dx$ bằng.

- A. $\frac{1-3 \ln 3}{3}$. B. $\frac{4-\ln 3}{3}$. C. $\frac{-\ln 3}{16}$. D. $-\ln \frac{3}{16}$.

Câu 34. (Sở Hưng Yên - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$;

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$ và $\int_0^1 (2x-1) f(x) dx = -\frac{1}{30}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{11}{30}$.

B. $\frac{11}{12}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{1}{30}$.

Câu 35. (Sở Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \text{ Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx.$$

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tích phân

$$\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx \text{ bằng}$$

A. 112.

B. 12.

C. 56.

D. 144.

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^1 x.f'(2x) dx.$$

A. 7.

B. 12.

C. 20.

D. 13.

Câu 38. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = 10, f(1) = \cot 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx.$$

A. $1 - \ln(\cos 1)$.

B. -1.

C. -9.

D. $1 - \cot 1$.

Câu 39. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 3]$ thỏa mãn $f(3) = 0$,

$$\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6} \text{ và } \int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}. \text{ Tính phân } \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $-\frac{7}{3}$.

B. $-\frac{97}{30}$.

C. $\frac{7}{6}$.

D. $-\frac{7}{6}$.

Câu 40. (Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; 1)$ thỏa

$$\text{mãn } f(0) = 0 \text{ và } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}; \int_0^1 f'(x) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $\frac{2}{\pi}$.

B. $\frac{1}{\pi}$.

C. $\frac{6}{\pi}$.

D. $\frac{4}{\pi}$.

Câu 41. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên

$$\text{đoạn } [0; 1] \text{ sao cho } f(1) = 1 \text{ và } f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x}, \forall x \in [0; 1]. \text{ Tính } I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx.$$

A. $I = -\frac{1}{60}$.

B. $I = \frac{1}{10}$.

C. $I = -\frac{1}{10}$.

D. $I = \frac{1}{10}$.

Câu 42. (Sở Nam Định-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn:

$$f(2) = 0, \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3} \text{ và } \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \text{ Tính tích phân } \int_1^2 f(x) dx.$$

- A. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$. B. $\ln \frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$ và

$$\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ là:}$$

- A. $\frac{35}{11}$. B. $\frac{65}{21}$. C. $\frac{23}{7}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$,

$$f(1) = 0, \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}. \text{ Tính } \int_1^2 xf(x) dx.$$

- A. $-\frac{19}{60}$. B. $\frac{7}{120}$. C. $-\frac{1}{5}$. D. $\frac{13}{30}$.

Câu 45. (Chuyên ĐH Vinh- 2019) Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(1) = f'(1) = 1 \text{ và } f(1-x) + x^2 \cdot f''(x) = 2x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 xf'(x) dx.$$

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = \frac{2}{3}$.

Câu 46. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2022) Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x) dx$. Giá trị của $f(\ln 2022)$ bằng bao nhiêu?

- A. 2022. B. 2021. C. 2023. D. 2024.

Câu 47. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(4) = 2, \int_0^4 f(x) dx = 4$. Tính

$$\int_0^2 xf'(2x) dx$$

- A. $I = 17$. B. $I = 1$. C. $I = 12$. D. $I = 4$.

Câu 48. (Chuyên KHTN 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 3x) = x^2 + 2$

với mọi số thực x . Từ đó hãy tính $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$

- A. $\frac{27}{4}$
B. $\frac{219}{18}$
C. $\frac{357}{4}$
D. $\frac{27}{8}$

Câu 49. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$[f(x)]^3 + 2f(x) = 1 - x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} \text{ biết } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Tính } a^2 + b^2?$$

A. 11.

B. 305.

C. 65.

D. 41.

Câu 50. (Sở Lai Châu 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và

$$\int_0^1 xf(5x)dx = 1, \text{ khi đó tích phân } \int_0^5 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

A. -25.

B. $\frac{123}{5}$.

C. 23.

D. 15.

Câu 51. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^1 x.f'(2x)dx$$

A. $I = 13$.

B. $I = 12$.

C. $I = 7$.

D. $I = 20$.

Câu 52. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn

$$f(1) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

Câu 53. (THPT Ngũ Hành Sơn - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(2) = \frac{2}{e^2}. \text{ Biết } F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ thỏa mãn } F(0) = 3 + \frac{2}{e},$$

khi đó $F(1)$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 54. (Sở Hòa Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = 3\pi,$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x - x).f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2\pi \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x dx$$

A. $\frac{8+5\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{8+5\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{8-5\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{8-5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 55. (THPT Thanh Miện 2 - Hải Dương 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$,

biết $f(1) = e$ và $(x+2).f(x) = x.f'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 + 4e - 4$.

B. $2e^3 - 2e + 2$.

C. $4e^2 - 2e + 2$.

D. $4e^2 - 4e + 4$.

Câu 56. (Sở Gia Lai 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$, khi đó

$$\int_0^1 [2f(1-x) - 3x^2 + 5] dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Câu 57. (Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $f(1) + f(2) = 0$. Biết $\int_1^2 (f(x))^2 dx = \frac{1}{2}$, $\int_1^2 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

A. π .

B. $\frac{1}{\pi}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{-2}{\pi}$.

Câu 58. (Sở Hòa Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$; $f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 x \cdot f^2(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{19}{4}$.

Câu 59. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; e]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$; $[f'(x) - 1]x = f(x)$, $\forall x \in [1; e]$. Tích phân $\int_1^e f(x) dx$ bằng

A. $\frac{e^2 - 1}{4}$

B. $\frac{e^2 + 1}{2}$.

C. $\frac{e^2 + 1}{4}$.

D. $\frac{e^2 - 1}{2}$.

Câu 60. (Sở Ninh Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$$\int_{-2}^{-1} f(x+2) dx = 3 \text{ và } f(1) = 4. \text{ Khi đó tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f'(\sin x) dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 5.

Câu 61. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^e \frac{1 - f(\ln x)}{x} dx = 2$

và $f(1) = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x f'(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$.
- B. $\frac{2e}{3}$.
- C. $\frac{4}{3}$.
- D. $\frac{2}{3}$.

Dạng 1.3 Biến đổi

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

(Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$$

Câu 1. (Mã 102 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $-\frac{7}{6}$ D. $-\frac{11}{6}$

Câu 2. (Mã 104 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{4}{35}$ B. $-\frac{71}{20}$ C. $-\frac{79}{20}$ D. $-\frac{4}{5}$

Câu 3. (Minh họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx ?$$

- A. $-\frac{17}{20}$. B. $-\frac{13}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. -1 .

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 4. B. -1. C. 2. D. 6.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$

- A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$. B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 7. D. $-\frac{19}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng?}$$

- A. $\frac{23}{15}$. B. $\frac{13}{15}$. C. $-\frac{17}{15}$. D. $-\frac{7}{15}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $-\frac{10}{3}$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết

$$4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}. \text{ Giá trị của } f(4) \text{ bằng}$$

- A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. B. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa $f(1) = 0$,

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } [0; 2]. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{5}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{14}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0; 1]$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- A. $\frac{3}{4} + 2\ln 2$. B. $3 + \ln 2$. C. $\frac{3}{4} + \ln 2$. D. $\frac{3}{2} + 2\ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ ta được kết quả:

- A. $I = e + 4$. B. $I = 8$. C. $I = 2$. D. $I = e + 2$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^5) + f(1-x^4) = x^{11} + x^8 + x^6 - 3x^4 + x + 3, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{35}{6}$. B. $-\frac{15}{4}$. C. $-\frac{7}{24}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$. Khi đó

$$I = \int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x \cdot f'(3x) dx \text{ bằng:}$$

- A. $\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$. B. $\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$. C. $-\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$. D. $-\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $\int_0^1 xf'(x) dx$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1. \text{ Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ có giá trị là}$$

- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 7. D. $-\frac{19}{3}$.

Câu 18. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$.

$$\text{Tích phân } I = \int_{-1}^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = \frac{14}{3}$. B. $I = \frac{28}{3}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.

Câu 19. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 20. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = f'(0) = 2. \text{ Tính giá trị của } T = f^2(2)$$

- A. $\frac{160}{15}$ B. $\frac{268}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{268}{30}$

Câu 21. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2. \text{ Tính } I = \int_1^5 f(x) dx$$

- A. $\frac{37}{6}$. B. $\frac{527}{3}$. C. $\frac{61}{6}$. D. $\frac{464}{3}$.

Câu 22. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều

$$\text{kiện } f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx$$

- A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 1. D. π .

Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{2}{3}$ và

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})f'(x) = 1, \forall x \geq -1. \text{ Biết rằng } \int_0^1 f(x) dx = \frac{a\sqrt{2} + b}{15} \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } T = a + b.$$

- A. -8. B. -24. C. 24. D. 8.

Câu 24. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$$4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{16}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 25. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(3) = 3$ và $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$. B. $\frac{59}{3}$. C. $\frac{45}{4}$. D. 88.

Câu 26. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1; 4]$, thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ với mọi $x \in [1; 4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x)dx$

A. $\frac{1188}{45}$. B. $\frac{1187}{45}$. C. $\frac{1186}{45}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 27. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính $I = \int_0^4 f(x)dx$.

A. $\frac{2018}{11}$. B. $\frac{7063}{3}$. C. $\frac{98}{3}$. D. $\frac{197764}{33}$.

Câu 28. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f^2(1-x) = (x^2+3)f(x+1).$$

Biết rằng $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $I = \int_0^2 (2x-1)f''(x)dx$.

A. 8. B. 0. C. -4. D. 4.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

Câu 30. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. B. $-\ln 2$. C. $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2+x)f'(x) + (6x+1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 32. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và

$$f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x \cdot x \cdot \sqrt{x-x^2}} \quad \forall x \in (0; 1).$$

Biết $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right) \geq \frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$ D. $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{6}$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \int_0^1 [2f(x) + 3x] f(x) dx - \int_0^1 [4f(x) + x] \sqrt{xf(x)} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{12}$ D. $-\frac{1}{6}$

Câu 34. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = a.e^2 + b$, với $a; b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a - b$ bằng.

A. 1. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 35. (Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot (3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2 - 1} dx.$$

A. $\ln \frac{7}{9}$. B. $\ln \frac{2}{9}$. C. $\ln \frac{5}{9}$. D. $\ln \frac{8}{9}$.

Câu 36. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{4}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 37. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018) Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$?

A. $I = \frac{2a}{3}$. B. $I = \frac{a}{2}$. C. $I = \frac{a}{3}$. D. $I = a$.

Câu 38. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tính phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 39. (Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2 . B. $e^{\frac{3}{2}}$. C. e^3 . D. $e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 40. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0; 3]$;

$$f(3-x) \cdot f(x) = 1, f(x) \neq -1 \text{ với mọi } x \in [0; 3] \text{ và } f(0) = \frac{1}{2}. \text{ Tính tích phân: } \int_0^3 \frac{x \cdot f'(x)}{[1 + f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx.$$

- A. 1. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 41. (Sở Bình Phước - 2018) Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên

đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$?

- A. $I = \frac{a}{3}$. B. $I = \frac{a}{2}$. C. $I = a$. D. $I = \frac{2a}{3}$.

Câu 42. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên

$$\mathbb{R} \text{ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện } f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0. \text{ Gọi}$$

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} dx. \text{ Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của } I.$$

- A. $I \in (-1; 0)$. B. $I \in (1; 2)$. C. $I \in (0; 1)$. D. $I \in (-2; -1)$.

Câu 43. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \text{ và } \int_0^1 x f'(x) dx = \frac{3}{2}. \text{ Hỏi giá trị nhỏ nhất của } \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

- A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{34}{5}$. C. 7. D. 8.

Câu 44. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \text{ và } f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2. \text{ Giá trị } f(3) \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$. C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Câu 45. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1). \text{ Biết } \int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của}$$

$$a+b+2c \text{ bằng}$$

A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

Câu 46. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$$6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{20}$. C. $\frac{\pi}{16}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 47. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x \text{ và } f(0) = 2. \text{ Tính } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{147}{63}$.

B. $\frac{149}{63}$.

C. $\frac{148}{63}$.

D. $\frac{352}{63}$.

Câu 48. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Câu 49. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 50. (Chuyên Lam Sơn 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; \pi]$. Biết $f(0) = 2e$ và $f(x)$ thỏa mãn hệ thức $f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}$, $\forall x \in [0; \pi]$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $I \approx 6,55$.

B. $I \approx 17,30$.

C. $I \approx 10,31$.

D. $I \approx 16,91$.

Câu 51. (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0; 1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0; 1]$. Tính giá trị $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 52. (THPT Cẩm Bình 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$f(x) = x \cdot \ln \left(\frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \int_1^5 f(x) dx$.

A. $12 \ln 13 - 13$.

B. $13 \ln 13 - 12$.

C. $12 \ln 13 + 13$.

D. $13 \ln 13 + 12$.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0; 1]$. Tính phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 54. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1). Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $2(a^2 + b^2)$ là:

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 55. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$;

$f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]; f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng

$\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Câu 56. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

A. $f(3)=1$.B. $f(3)=e^2$.C. $f(3)=e^3$.D. $f(3)=e$.

Câu 57. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x) = (x^2+3) \cdot f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $I = \int_0^2 (2x-1) f''(x) dx$.

A. 4.

B. 0.

C. 8.

D. -4.

Câu 58. (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.D. $\frac{21}{4}$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ và $\int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20}$. Giá trị của biểu thức $f(2) + f(3)$ bằng

A. 110.

B. 90.

C. 20.

D. 25.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$.B. $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$.C. $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$.D. $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{5}{2}$.B. $\frac{13}{4}$.C. $\frac{25}{4}$.D. $\frac{9}{2}$.

Câu 62. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = e + 2$.B. $I = 2e + 4$.C. $I = 2$.D. $I = 8$.

Câu 63. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2;4]$. Biết rằng

$f(2) = \frac{7}{4}$ và $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2;4]$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$.B. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$.C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$.D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[e; e^2]$. Biết $x^2 f'(x) \cdot \ln x - xf(x) + \ln^2 x = 0, \forall x \in [e; e^2]$

và $f(e) = \frac{1}{e}$. Tính tích phân $I = \int_e^{e^2} f(x) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = \ln 2$.

Câu 65. (Chuyên Vinh – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn

$f(1) = 2, f(2) = 1$ và $\int_1^2 [xf'(x)]^2 dx = 2$. Tích phân $\int_1^2 x^2 f(x) dx$ bằng

- A. 4.
B. 2.
C. 1.
D. 3.

Câu 66. (Liên trường Hà Tĩnh – 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$\begin{cases} e^{3x}(4f(x) + f'(x)) = 2\sqrt{f(x)}, \forall x \geq 0 \text{ và } f(0) = 1. \\ f(x) > 0 \end{cases}$ Tính $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$

- A. $I = \frac{11}{24}$.
B. $I = -\frac{1}{12}$.
C. $I = \frac{209}{640}$.
D. $I = \frac{201}{640}$.

Câu 67. (THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ $f(0) = 1$ và $f'(x) = -4x^3 (f(x))^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx$.

- A. $I = \frac{\ln 2}{4}$. B. $I = \ln 2$. C. $I = \frac{1}{4}$. D. $I = \frac{1}{6}$.

Câu 68. (Sở Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$2f(x) + xf'(x) = 3x + 10, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 6$. Biết

$\int_{-1}^4 \frac{\ln(2 + \sqrt{f(x)})}{f^2(x) - 6f(x) + 9} dx = a \ln 5 + b \ln 6 + \sqrt{c} \ln(2 + \sqrt{3}), (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$.
B. $(2; 3)$.
C. $(0; 1)$.
D. $(-1; 0)$.

Câu 69. (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$x(f'(x) + x) = (x + 1)f(x); f(1) = e + 1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{b}$; trong đó a, b là những số nguyên dương và

phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $(2a + b)$ tương ứng bằng:

- A. 4.
B. 5.
C. 8.
D. 7.

Câu 70. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;1]$ và $[f(x)]^2 \cdot [f'(x)]^2 (x^2 + 1)^2 = 1 + [f(x)]^2$. Nếu $f(0) = \sqrt{3}$ thì giá trị $f(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.
- B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.
- C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.
- D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Câu 71. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; \pi)$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) \cdot \cot x + 2x \cdot \sin x$. Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $\frac{\pi^2}{36}$.
- B. $\frac{\pi^2}{72}$.
- C. $\frac{\pi^2}{54}$.
- D. $\frac{\pi^2}{80}$.

Câu 72. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi)$. Khi đó

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi$.
- B. $\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} + \pi$.
- C. $-\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.
- D. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.

Câu 73. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi}{16}$.
- B. $\frac{\pi}{4}$.
- C. $\frac{\pi}{6}$.
- D. $\frac{\pi}{20}$.

Câu 74. (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và

$f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 5.
- B. 20.
- C. 15.
- D. 10.

Câu 75. (Sở Lạng Sơn 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{3}{2}$.
- B. $\frac{3}{2}$.
- C. $-\frac{3}{4}$.
- D. $\frac{3}{4}$.

Câu 76. (Sở Thanh Hóa 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + G(2) = 4$ và $F(1) + G(1) = 1$. Khi đó $\int_0^x \sin \frac{x}{2} f\left(\cos \frac{x}{2} + 1\right) dx$ bằng

- A. 6.
- B. $\frac{3}{2}$.
- C. 3.
- D. $\frac{3}{4}$.

Câu 77. (Sở Bắc Ninh 2023) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số a để $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a(1 + \tan x) dx \geq \frac{\pi}{16}$ bằng

- A. 9.
- B. 10.
- C. 5.
- D. 14.

Câu 78. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) - 2G(4) = 6$ và $F(-8) - 2G(-8) = -2$. Khi đó $\int_{-1}^3 f(3x - 5) dx$ bằng

- A. 8.
- B. $\frac{8}{3}$.
- C. -3.
- D. $-\frac{8}{3}$.

Câu 79. (Sở Sơn La 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(11) + G(11) = 55$ và $2F(-1) + G(-1) = 1$. Khi đó $\int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx$ bằng

- A. 7.
- B. 20.
- C. 5.
- D. 22.

Câu 80. (THPT Nam Trực – Nam Định 2023) Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $\sqrt{x^3 + 1} \cdot [4x \cdot f'(1 - x) - f'(x)] = x^5, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ có kết quả dạng

$\frac{a - b\sqrt{2}}{c}, (a, b, c \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{c}, \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản})$. Giá trị $T = a - 2b + 3c$ bằng

- A. 89.
- B. 27.
- C. 35.
- D. 81.

Câu 81. (Sở Phú Thọ 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(x) > -1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) dx$ bằng

- A. 3.
- B. 8.
- C. -1.
- D. 6.

Câu 82. (Sở Thừa Thiên Huế 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) + x = \int_0^2 [f(x) - x] dx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xác định giá trị m để $\int_0^2 [mx + f(x)] dx = 0$.

- A. $m = 0$.
- B. $m = -2$.
- C. $m = -1$.
- D. $m = -3$.

Câu 83. (Cụm Nam Trực – Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn

$$\sqrt{x^3+1}[4xf'(1-x)-f(x)]=x^5. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}, (a,b,c \in \mathbb{Z}^+; (a,c)=(b,c)=1). \text{ Giá trị}$$

$T = a - 2b + 3c$ bằng

- A. 89.
- B. 27.
- C. 35.
- D. 81.

Câu 84. (Sở Hà Nam 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \geq 0 \text{ và } (x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}, \forall x \geq 0. \text{ Tính } \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}.$$

- A. $\ln \frac{9}{8}$.
- B. $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}$.
- C. $\ln \frac{4}{3}$.
- D. $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

Câu 85. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và khác 0 trên $[-1;2]$,

thỏa mãn $x \cdot f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f^2(x) + 2f(x)$ và $f(1) = \frac{1}{2}$. Biết

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = a + b \ln 2, (a,b \in \mathbb{Z}), \text{ biểu thức } a + b \text{ bằng}$$

- A. -9.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 0.

Câu 86. (Sở Quảng Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm

của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(10) + G(1) = -11$ và $F(0) + G(10) = 1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x)dx$ bằng

- A. 5.
- B. 10.
- C. -12.
- D. -6.

Câu 87. (Sở Phú Thọ 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x, \forall x \in \left[\frac{1}{3};3\right]. \text{ Tích phân } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{2}{3}$.
- B. $\frac{16}{9}$.
- C. $\frac{8}{9}$.
- D. $\frac{3}{4}$.

Câu 88. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(1) = 5 \text{ và } xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 - 5x^4 + 7x + 3 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x)dx.$$

- A. $-\frac{5}{6}$

B. $-\frac{13}{12}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{17}{6}$

Câu 89. (Sở Lạng Sơn 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$ với mọi

$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0) = 0$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{3\pi + 2 \ln 2}{10}$.

B. $\frac{\pi - \ln 2}{5}$.

C. $\frac{-\pi + \ln 2}{5}$.

D. $\frac{\pi + 4 \ln 2}{20}$.

Câu 90. (Sở Kon Tum 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$f(0) = 0$ và $f(x) + f'(x) = x - 2, \forall x \in [0; 1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{5e + 3}{2e}$.

B. $\frac{3 - 2e}{5}$.

C. $\frac{e - 6}{2e}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 91. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin 2x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot f'(2x) dx$

gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 1,08.

B. 0,07.

C. 0,83.

D. 0,17.

Câu 92. (Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ không âm và có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$. Biết $f(1) = 3$ và $[2f(x) + 1 - 3x^2] f'(x) = 6x[1 + f(x)], \forall x \in [0; 1]$. Tích phân

$\int_0^1 \left[f^3(x) - \frac{6}{7} \right] dx$ bằng

A. 2.

B. $\frac{27}{7}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{7}$.

Câu 93. (Sở Cà Mau 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ và thỏa mãn

$$f(x-1) - 3 \cdot f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \quad \forall x \neq \frac{1}{2}. \text{ Biết } I = \int_1^2 f(x) dx = a + b \ln 3 + c \ln 5 \text{ với } a, b, c \text{ là các số hữu tỉ.}$$

Tính giá trị biểu thức $P = 8a - 16b + 16c$

A. $P = 16$.

B. $P = 4$.

C. $P = 10$.

D. $P = 8$.

Câu 94. (THPT Cù My - Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$

thỏa mãn $6x^2 \cdot f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $\frac{\pi}{8}$

B. $\frac{\pi}{16}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{20}$.

Câu 95. (Sở Bà Rịa - Vũng Tàu 2023) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$, biết rằng $f(1) = 0$ và với mọi x dương thì $f(x) = x + (x^2 + x)f'(x)$. Các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x(x+1)} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c. \text{ Giá trị của biểu thức } a + b + c \text{ bằng}$$

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. -1 .

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 96. (Sở Bạc Liêu 2023) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$. Biết

$$f(1) = 1 \text{ và } f(x)f(1-x) = e^{x^2-x} \text{ với mọi } x \in [0; 1]. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{10}$.

C. $-\frac{1}{10}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 97. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1; 3]$, thỏa mãn

$$x^2 + 4x^2 f(x) = [f'(x)]^2, \quad \forall x \in [1; 3], f(2) = 2. \text{ Tính } I = \int_1^3 f(x) dx.$$

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{117}{15}$.

C. $\frac{23}{3}$.

D. $\frac{233}{30}$.

Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số $y = f(x)$ có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số chẵn.

Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng $-x$ sẽ tính được $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$).

Thường gặp cung góc đối nhau của $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x).dx = 0$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a; a]$ thì $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x).dx = 2 \int_0^a f(x).dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x).dx \end{cases}$.

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau** dạng $-a \rightarrow a$):

□ Bước 1. Phân tích: $I = \int_{-a}^a f(x).dx = \int_{-a}^0 f(x).dx + \int_0^a f(x).dx = A + B$.

□ Bước 2. Tính $A = \int_{-a}^0 f(x).dx$? bằng cách đổi biến $t = -x$ và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có:

$$\int_{-2014}^0 \frac{3t^2 \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_{-2014}^0 \frac{3x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x).dx.$$

$$+ \int_a^{\pi-a} xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_a^{\pi-a} f(\sin x).dx \text{ và } \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx.$$

$$+ \int_a^{2\pi-a} xf(\cos x).dx = \pi \int_a^{2\pi-a} f(\cos x).dx \text{ và } \int_0^{2\pi} x.f(\cos x).dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x).dx$$

→ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x =$ cận trên + cận dưới $- t$ ($x = a + b - t$). Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x).dx = \int_0^T f(x).dx \text{ và } \int_0^{nT} f(x).dx = n \int_0^T f(x).dx.$$

Lưu ý: Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T) = f(x)$.

→ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

Bước 1. Tách: $I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \underbrace{\int_a^0 f(x) dx}_A + \underbrace{\int_0^T f(x) dx}_B + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x) dx}_C \quad (i)$

Bước 2. Tính $C = \int_T^{a+T} f(x) dx$?

Đặt $x = t + T \Rightarrow dx = dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = a + T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó:

$$C = \int_0^a f(t+T) dt = -\int_a^0 f(t) dt = -\int_a^0 f(x) dx = -A \quad (ii)$$

Thế (i) vào (ii) ta được: $I = B = \int_0^T f(x) dx$.

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

- A. $I = -6$ B. $I = 0$ C. $I = -2$ D. $I = 6$

Câu 2. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$b < 15$. Khi đó $a + b + c$ bằng:

- A. 10. B. 9. C. 11. D. 12.

Câu 3. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a; a]$ và $k > 0$.

Giá trị tích phân $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$ bằng

- A. $\int_0^a f(x) dx$. B. $\int_{-a}^a f(x) dx$. C. $2 \int_{-a}^a f(x) dx$. D. $2 \int_0^a f(x) dx$.

Câu 4. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}. \text{ Biết } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}. \text{ Khi đó giá trị của } m \text{ là}$$

- A. $m = 2$. B. $m = 20$. C. $m = 5$. D. $m = 10$.

Câu 5. (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019) Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}. \text{ Tính } I = \int_{-2}^2 f(x) dx.$$

- A. $I = \frac{\pi}{20}$. B. $I = \frac{\pi}{10}$. C. $I = \frac{-\pi}{20}$. D. $I = \frac{-\pi}{10}$.

Câu 6. (Hà Nội - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

- A. $I = -10$. B. $I = -6$. C. $I = 6$. D. $I = 10$.

Câu 7. (Hồng Quang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a; b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 8. (Chuyên ĐH Vinh - 2018) Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1. \text{ Giá trị của } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 9. (SGD&ĐT BRVT - 2018) Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = 10$. Tính

$$I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx.$$

- A. $I = 10$. B. $I = \frac{10}{3}$. C. $I = 20$. D. $I = 5$.

Câu 10. (Yên Phong 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 6. \text{ Kết quả của } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx \text{ bằng}$$

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 11. (Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases} \text{ và } \int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)} = \frac{ba}{c}, \text{ trong đó } b, c \text{ là hai số nguyên dương và } \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản.}$$

Khi đó $b + c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(11; 22)$. B. $(0; 9)$. C. $(7; 21)$. D. $(2017; 2020)$.

Câu 12. (Chuyên Sơn La - 2020) Tích phân $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 0$. B. $S = 2021$. C. $S = 2020$. D. $S = 4042$.

Câu 13. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}. \text{ Biết } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

- A. $P = -2$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 14. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của

tích phân $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$ là

- A. $\frac{2}{2019}$. B. 2. C. 4. D. 0.

Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)|.dx$?

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Giả sử trên đoạn $[a; b]$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_o \in [a; b]$ và có bảng xét dấu sau:

x		a	x_o	b	
$f(x)$		+	0	-	

Bước 2. Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên $[a; x_o], [x_o; b]$ ta được:

$$I = \int_a^b |f(x)|.dx = \int_a^{x_o} f(x) dx + \int_{x_o}^b [-f(x)] dx = A + B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính $A, B \Rightarrow I$.

Câu 1. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$. B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$. C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$. D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Câu 2. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m \in (4; 6)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (1; 3)$.

Câu 3. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$. B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.
C. $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$. D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 4. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = abc$.

A. $P = -36$ B. $P = 0$ C. $P = -18$ D. $P = 18$

Câu 5. (Chuyên Hạ Long 2019) Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx \right|$.

A. Vô số. B. 0. C. Duy nhất. D. 2.

Câu 6. (Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. B. $\ln 2$. C. $2 \ln 2$. D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 7. (KTNL Gia Bình 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$.

Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x - 1|) dx$

- A. $I = 8$ B. $I = 6$ C. $I = \frac{3}{2}$ D. $I = 4$

Câu 8. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx = 8$ và

$$\int_0^5 f(x)dx = 4. \text{ Tính } \int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx.$$

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. 3. D. 6.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx.$$

- A. 30. B. 32. C. 34. D. 36.

Câu 10. (Phong 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;3)$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2; \int_0^3 f(x)dx = 8$. Giá trị

của tích phân $\int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx = ?$

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx = 8$ và $\int_0^5 f(x)dx = 4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. 3. D. 6.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x . Giả sử $f(2) = m$, $f(-3) = n$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(-2) - f(3)$.

- A. $T = m + n$. B. $T = n - m$. C. $T = m - n$. D. $T = -m - n$.

Câu 13. (Sở Bạc Liêu 2023) Cho hàm số $f(x) = |x-2| - |x+2|$, biết $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x)dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})$, với a là số nguyên dương. Giá trị biểu thức $T = a + b + c$ là?

- A. $T = 15$. B. $T = 5$. C. $T = 0$. D. $T = 10$.

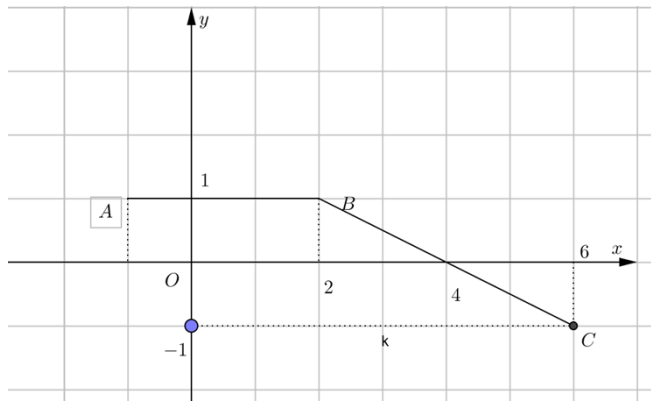
Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

Câu 1. (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f

trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 27. B. 29. C. 12. D. 33.

Câu 2. (Mã 101-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị đường gấp khúc ABC như hình bên. Biết F là một nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng



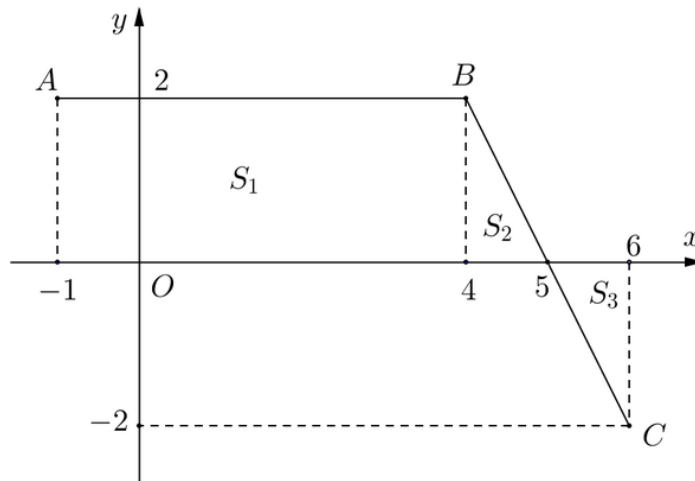
A. 10.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 3. (Mã 120-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$.



Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

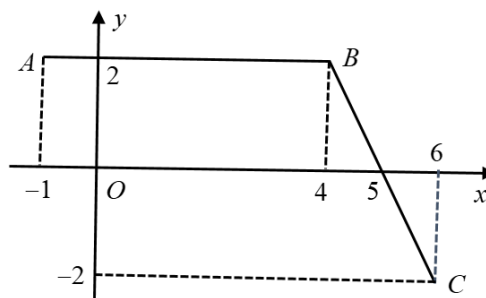
A. 19.

B. 17.

C. 22.

D. 18.

Câu 4. (Mã 111-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



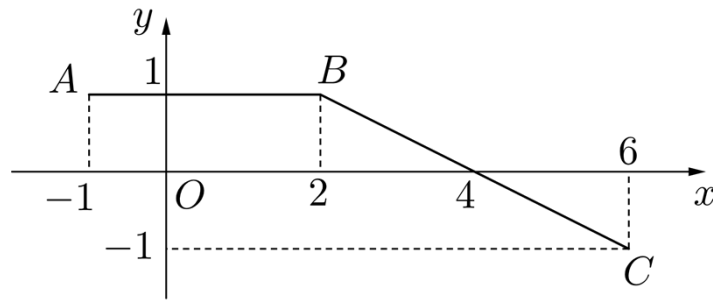
A. 21.

B. 25.

C. 23.

D. 19.

Câu 5. (Mã 102-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới.



Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng
A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 6. (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Câu 7. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
A. 9. **B.** 15. **C.** 11. **D.** 6.

Câu 8. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
A. 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Câu 9. (Đề Tham Khảo 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx$ bằng
A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 4$. Giá trị của $F(-2) + 3F(4)$ bằng
A. 106. **B.** 110. **C.** 12. **D.** 36.

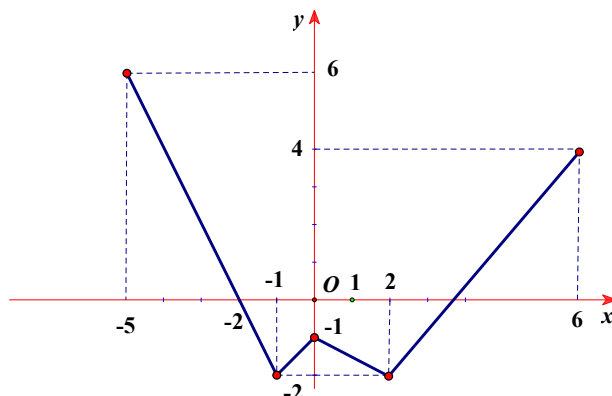
Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.
A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Giá trị của $F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. -1 . C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 13. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.

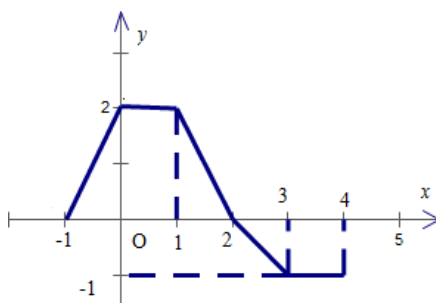


- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{19}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 14. (Sở Lào Cai - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 15. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng

- A. 4. B. 1. C. 5,5. D. 2,5.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

- A. $I = e + 2\sqrt{3} - 22$. B. $I = e + 2\sqrt{3} + \frac{22}{3}$. C. $I = e - 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$. D. $I = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 5 \\ 2x - 6, & x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1) \cdot e^x dx$ bằng

A. $\frac{77}{3}$. B. $\frac{77}{9}$. C. $\frac{68}{3}$. D. $\frac{77}{6}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ bằng

A. $\frac{28}{3}$. B. 8. C. $\frac{341}{48}$. D. $\frac{341}{96}$.

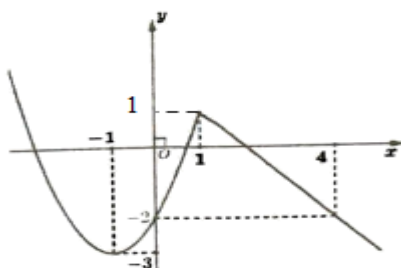
Câu 19. (Chuyên ĐHSP - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{khi } x > 3 \\ ax - 3a + 7, & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1) e^x dx = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. B. $6e - 6$. C. $6e + 6$. D. $-6e + 6$.

Câu 20. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \leq 8 \\ \frac{40}{x - 7} & \text{khi } x > 8 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx$ bằng

- A. $36 + \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{15}{7} \ln 3$. B. $-6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3$.
C. $36 - \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{20}{7} \ln 3$. D. $6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3$.

Câu 21. (Sở Bạc Liêu - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; 1]$ là một phần của Parabol có đỉnh $(-1; -3)$ và trên $(1; +\infty)$ đồ thị là một phần của đường thẳng (tham khảo hình vẽ).



Tích phân $I = \int_1^{\sqrt{17}} f(\sqrt{x^2 - 1}) x dx$ bằng

- A. $I = -\frac{73}{12}$. B. $I = \frac{11}{6}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 2.

Câu 22. (Chuyên Tuyên Quang - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3 & \text{khi } x \geq 7 \\ 2x + 3 & \text{khi } x < 7 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3) e^x dx$ bằng

A. $\frac{1148}{3}$.

B. $\frac{220}{3}$.

C. $\frac{115}{3}$.

D. $\frac{287}{3}$.

Câu 23. (Cụm Ninh Bình – 2021) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 0) \\ 2\cos x - 3 & (x < 0) \end{cases}$. Tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2\cos x - 1|) \sin x dx \text{ bằng}$$

A. 0.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 24. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6} - 1$.

B. $\frac{2a}{3} + 1$.

C. $\frac{a}{6} + 1$.

D. $\frac{2a}{3} - 1$.

Câu 25. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên

$\mathbb{R}$ và

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Q}). \text{ Tổng } a + b + 3c \text{ bằng}$$

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

Câu 26. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Tính tích phân $\int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\} dx$

A. $e - 1$.

B. $\frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e})$.

C. $e - \sqrt[3]{e}$.

D. $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$

A. $I = \frac{71}{6}$.

B. $I = 31$.

C. $I = 32$.

D. $I = \frac{32}{3}$.

Câu 28. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{khi } x < 2 \\ 4x^3 - 1, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(0) = 3$. Giá trị $F(3) - 5F(-5)$ bằng

A. 12.

B. 16.

C. 13.

D. 7.

Câu 29. (THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x + 1 & \text{khi } x < 0 \\ 2^x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Giả sử

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $F(1) = \frac{2}{\ln 2}$. Tính $F(-\pi)$.

A. $F(-\pi) = -2\pi + \frac{1}{\ln 2}$.

B. $F(-\pi) = -\pi - \frac{1}{\ln 2}$.

C. $F(-\pi) = -2\pi$.

D. $F(-\pi) = -2\pi - \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 30. (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2(x^3 + 1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = a \cdot e - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $\frac{b}{c}$ tối giản ($e = 2,718281828$). Biểu thức $a + b + c + m$ bằng

- A.** 13.
B. 35.
C. -11 .
D. 36.

Câu 31. (Sở Bạc Liêu 2022) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tích phân

$I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x} dx = \frac{a}{b} + ce$ biết $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b + c$?

- A. 35.** **B. 29.** **C. 36.** **D. 27.**

Câu 32. (Sở Phú Thọ 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln(x+1) & \text{ khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x^2+3}+1 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = a\sqrt{3} + b \ln 2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a + b + 6c$ bằng

- A.** 35. **B.** -14. **C.** -27. **D.** 18.

Câu 33. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thoả mãn

$\int_0^2 f(x) dx = 13$. Tính $T = a + b - ab$?

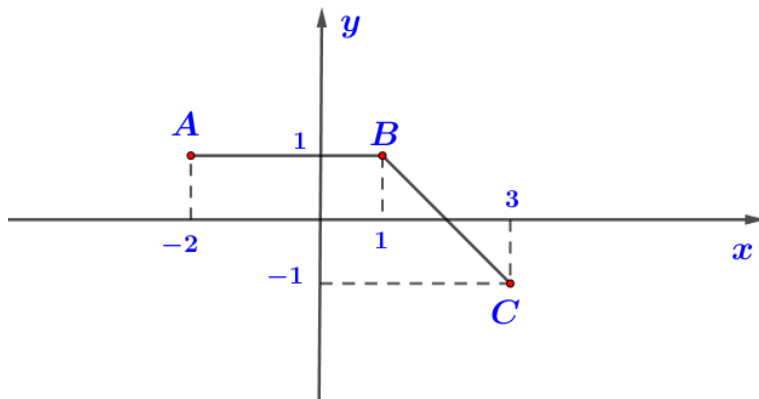
- A.** $T = -11$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = -1$.

Câu 34. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x - 3, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x - 1)\cos x dx + \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của tổng $a + b$ bằng

- A. 350.** **B. 305.** **C. -350.** **D. 19.**

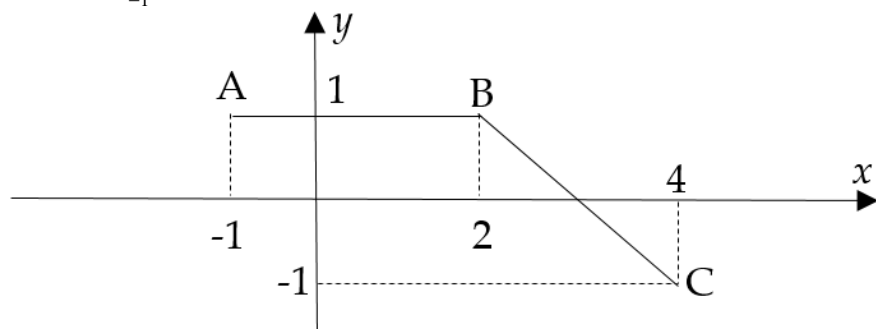
Câu 35. (Mã 101-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng



- A.** 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Câu 36. (Mã 102-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

$[-1; 4]$. Tích phân $\int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng



A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 3.

D. 4.