

CHỦ ĐỀ 07 : TIẾP TUYẾN – SỰ TIẾP XÚC

LÍ THUYẾT

❖ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:

- Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm M .
 - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$.
 - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$.

❖ Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.

- Bước 1: Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k .
- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k \quad (1)$.
- Giải (1) tìm x_0 . Suy ra $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = k(x - x_0) + y_0$

❖ Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc

- Cho hai hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Đồ thị (C) và (C') **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B . Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4 + 2\sqrt{2}$.

B. 4.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Giả sử $M(m; y_M) \in (C)$ ($m > 1$) $\Rightarrow y_M = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$; $y'(m) = -\frac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1}$

$$\Leftrightarrow 2x + (m-1)^2 y - m^2 - 2m + 1 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x = 2m-1 \Rightarrow A(2m-1; 1).$$

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} \Rightarrow B\left(1; 1 + \frac{4}{m-1}\right).$$

$$\text{Suy ra: } AB = \sqrt{(2-2m)^2 + \left(\frac{4}{m-1}\right)^2} = \sqrt{4(m-1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2}} = \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4}.$$

$$d(O; \Delta) = \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O; \Delta) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \cdot \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4}$$

$$= \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{|m-1|} = \frac{m^2 + 2m - 1}{m-1} \quad (\text{vì } m > 1) = m + 3 + \frac{2}{m-1} = 4 + m - 1 + \frac{2}{m-1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\frac{2}{m-1}$: $(m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 4 + (m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4 + 2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1 = \frac{2}{m-1} \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{2} \\ m > 1 \end{cases}$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C). Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua. Phương trình của đường thẳng AB là

- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)$ và $B\left(b; \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}b^2 + 2\right)$ với $a \neq b$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

Ta có $f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 3a = \frac{3}{2}b^2 - 3b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2(a - b) \Leftrightarrow a + b = 2$.

Gọi $I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{1}{4}(a^3 + b^3) - \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + 2\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Với $a + b = 2$ ta có $I\left(1; \frac{8-6ab}{4} - \frac{3(4-2ab)}{4} + 2\right)$ hay $I(1; 1)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\left(b-a; \frac{1}{2}(b^3 - a^3) - \frac{3}{2}(b^2 - a^2)\right)$ cùng phương với $\vec{u}\left(2; (a^2 + b^2 + ab) - 3(a + b)\right)$.

Hay $\vec{u}(2; -2 - ab)$. Nên đường thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2 + ab; 2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(2 + ab)(x - 1) + 2(y - 1) = 0$.

Do đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$ nên $4(2 + ab) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4ab + 12 = 0 \Leftrightarrow ab = -3$.

Thay $ab = -3$ vào phương trình AB ta được: $x - 2y + 1 = 0$.

Cách 2 – trắc nghiệm: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C) có điểm uốn là $I(1; 1)$.

Do đó đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$ và $I(1; 1)$ có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

- A. 2020. B. 2018. C. 2017. D. 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}, x \neq 1$.

Phương trình đường tiếp tuyến tại điểm x_0 : $y = \frac{-3}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 1}$.

Tiếp tuyến tại điểm $A(0; a)$ là: $a = \frac{3x_0 + (x_0 + 2)(x_0 - 1)}{(x_0 - 1)^2} y' = \frac{-3}{(x - 1)^2}$.

$$\Rightarrow (a - 1)x_0^2 - 2(a + 2)x_0 + a + 2 = 0 \quad (1).$$

Để từ điểm A kẻ được 2 tiếp tuyến đến $(C) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow (a + 2)^2 - (a - 1)(a + 2) > 0 \Rightarrow a > -2.$$

Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(a + 2)}{a - 1} \\ x_1 x_2 = \frac{a + 2}{a - 1} \end{cases}.$$

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía trục hoành thì: $y(x_1)y(x_2) < 0$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0 \Rightarrow \frac{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \Rightarrow \frac{9a + 6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > \frac{-2}{3}$$

Mà $a \in [-2018; 2018]$; $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in [0; 2018]$.

VÍ DỤ 4: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2px + q$. Biết rằng qua $A(2; 1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) và tập hợp tất cả các điểm $M(p; q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \leq 0$. Biểu thức $T = 3a - 2b^2 + c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A. 10. B. 9. C. 11. D. -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 2x - 2p$.

Gọi $M(x_0; x_0^2 - 2px_0 + q)$ là tiếp điểm, tiếp tuyến với (P) tại M có phương trình:

$$y = (2x_0 - 2p)(x - x_0) + x_0^2 - 2px_0 + q \Leftrightarrow x_0^2 - 2xx_0 + 2px - q + y = 0.$$

Tiếp tuyến đi qua $A(2; 1)$ nên: $x_0^2 - 4x_0 + 4p - q + 1 = 0 \quad (1)$.

Vì qua $A(2; 1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Do đó: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4p - q - 3 \leq 0 \quad (2)$.

$M(p; q)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \leq 0$ nên $ap + bq + c \leq 0 \quad (3)$.

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{a}{4} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{-3} = m$, điều kiện: $(m > 0) \Rightarrow \begin{cases} a = 4m \\ b = -m \\ c = -3m \end{cases}$

$$\Rightarrow T = -2m^2 + 9m = \frac{81}{8} - 2\left(m - \frac{9}{4}\right)^2 \leq \frac{81}{8}.$$

Vậy T không thể nhận giá trị bằng 11 nên ta chọn đáp án C.

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 4m - m^2$. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $g(x) = f[f(x)]$ tiếp xúc với Ox .

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x+m-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 4-m \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } g(x) = 0 \Leftrightarrow f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ f(x) = 4-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4m - m^2 = m & (1) \\ x^2 - 4x + 4m - m^2 = 4-m & (2) \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Nếu $m = 4 - m \Leftrightarrow m = 2$.

$$\text{Từ (1); (2) suy ra } g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}. \text{ Hai nghiệm này là hai nghiệm}$$

kép của phương trình $g(x) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ tiếp xúc với Ox .

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 4 - m \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó (1); (2) không có nghiệm chung.

Để đồ thị hàm số $y = g(x)$ tiếp xúc với $Ox \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc (2) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 4 = 0 & (VN) \\ m^2 - 5m + 8 = 0 & (VN) \end{cases}. \text{ Tức không có giá trị nào của } m \text{ thỏa mãn trong trường hợp này.}$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Và $A(a; -2)$. Từ A kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến đến đồ thị (C). Gọi S là tập các hợp các giá trị của a để tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

A. $2\sqrt{6}$.

B. 2.

C. $\sqrt{6}$.D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.**Lời giải****Chọn D**

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(a; -2)$ và có hệ số góc là k .

Đường thẳng Δ có phương trình: $y = k(x - a) - 2$.

$$\text{Vì } \Delta \text{ là tiếp tuyến của đồ thị (C) nên hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - a) - 2 \\ k = 3x^2 - 6x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - a) - 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 1) = (x - 2)3x(x - a)$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: Phương trình } (*) \text{ có nghiệm kép } \Leftrightarrow 9a^2 - 6a - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ a = -1 \end{cases}.$$

Với $a = \frac{5}{3}$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = 1$ và $x = 2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = 1$ và $x = 2$ là: $(3.2^2 - 6.2) + (3.1^2 - 6.1) = -3$ (không thỏa mãn).

Với $a = -1$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = -1$ và $x = 2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = -1$ và $x = 2$ là: $(3.2^2 - 6.2) + (3.(-1)^2 + 6.1) = 9$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2 : Phương trình (*) có nghiệm bằng 2 khi $a = 2$ khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là $x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

Với $a = 2$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = \frac{1}{2}$ và $x = 2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = \frac{1}{2}$ và $x = 2$ là: $(3.2^2 - 6.2) + \left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6.\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ (không tm).

Trường hợp 3 : Phương trình (*) có nghiệm khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 6a - 15 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{5}{3} \\ a < -1 \\ a \neq 2 \end{cases} (**).$$

Khi đó có ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1; x_2$ và $x = 2$ với $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình (*) , có tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1; x_2$ và $x = 2$ là:

$$3x_1^2 - 6x_1 + 3x_2^2 - 6x_2 = 9 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) - 6x_1x_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3a-1}{2}\right) - 6 = 9 \Leftrightarrow 27a^2 - 54a - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3+2\sqrt{6}}{3} \\ a = \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện (**) ta có $a = \frac{3+2\sqrt{6}}{3}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A\left(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d: y = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x-a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x-a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 14 = 0(1) \end{cases}$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Theo đề bài: $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1. \\ a = -2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện: $\begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.