Chương II: CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4

(Từ lần V đến lần IX)

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4 LẦN V, NĂM 1999

1. Cho dãy số $\{x_k\}$ được xác định bởi:

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n}$

Giải

Vì $x_{k+1} - x_k = \dfrac{k+1}{(k+2)!} > 0, \stackrel{\forall k\in N}{\Rightarrow} x_{k+1} > x_k > 0,\ \forall k \in N$

$$\Rightarrow x_{1999}^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n < 1999.x_{1999}^n$$

$$\Rightarrow x_{1999} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999}.x_{1999} \quad (*)$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_{1999} = 1 - \frac{1}{2000!}$$

Đến đây, thay x_{1999} vào (*) ta được:

$$1 - \frac{1}{2000!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999}\left(1 - \frac{1}{2000!}\right)$$

Nhưng vì:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2000}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt[n]{1999}\left(1-\frac{1}{2000!}\right)\right]$$

Nên ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{1999}^n}=1-\dfrac{1}{2000!}$

---

(2) Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa BĐT:

$$a_n^{\frac{2000}{1999}}\geq a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1,\ \forall n\geq 2$$

Chứng minh rằng tồn tại số c sao cho $a_n > n.c,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Giải

Ta có $\quad a_n > a_1^{\frac{1999}{2000}},\ \forall n\geq 2$

$$\Rightarrow a_n^{\frac{2000}{1999}}\geq (n-2)q_1^{\frac{1999}{2000}}+q_1,\ \forall n\geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$$

$$\Rightarrow \exists n_o\in N: a_n\geq 1,\ \forall n\geq n_o$$

Đặt $\quad C=\mathrm{Min}\left\{\dfrac{1}{4},a_n,\dfrac{a_2}{2},\ldots,\dfrac{a_{n_o}}{n_o}\right\}$

$$\Rightarrow a_n\geq n.c,\ \forall n\in\{1,2,\ldots,n_o\}$$

Giả sử $\quad a_n\geq n.c,\ \forall n\leq n_1\ (\text{với } n_1\in N,\ n_1>n_o)$

Ta có $\quad a_{n+1}^2\geq a_{n+1}^{\frac{1999}{2000}}\geq a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1$

$$\geq [n+(n-1)+\ldots+1]c$$

$$\geq \frac{n(n+1)}{2}c$$

$$\geq (n+1)^2c^2$$

$$\left(\text{vì } \frac{n}{2(n+1)}\geq\frac{1}{4}\geq c\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}\geq (n+1)c$$

Vậy bài toán được chứng minh

3. Cho dãy số $\{a_n\}$ định bởi:

$$\begin{cases} a_o = 1999 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1+a_n}, \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Tìm phần nguyên của a_n (với $0 \leq n \leq 999$)

Giải

Rõ ràng $a_n > 0, \forall n \geq 0$, nên :

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{1+a_n} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0, \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ là dãy giảm} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n} = a_n - \frac{a_n}{1+a_n} > a_n - 1, \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_o - (n+1), \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_{n-1} > a_o - (n-1), \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_{n-1} > 2000 - n, \forall n \geq 2 \qquad (2)$$

Mặt khác ta lại có :

$$a_n = a_o t(a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 1999 - \left(\frac{a_o}{1+a_o} + \frac{a_1}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1+a_n - 1}\right)$$

$$= 1999 - n + \left(\frac{1}{1+a_o} + \frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_{n-1}}\right) \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$0 < \frac{1}{1+a_o} + \frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_{n-1}} < \frac{n}{1+a_{n-1}}$$

$$< \frac{n}{2001-n} < \frac{n}{1998-n} \leq 1 \quad (\text{với } 2 \leq n \leq 1999) \ (4)$$

Từ (3) và (4), ta có :

$$1999 - n < a_n < 1999 - n \pm 1 \quad (\text{với } 2 \le n < 999)$$

$$\Rightarrow [a_n] = 1999 - n \quad (\text{với } 2 \le n \le 999)$$

Kiểm tra trực tiếp :

+ $a_o = 1999 \Rightarrow [a_o] = 1999$

+ $a_1 = \dfrac{a_o^2}{1 + a_o} = a_o - \dfrac{a_o}{1 + a_o}$

$$= 1999 - \frac{1999}{2000}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1998 + \frac{1}{2000}$$

$$\Rightarrow [a_1] = 1998$$

Vậy $[a_n] = 1999 - n \quad (\text{với } 0 \le n \le 999)$

4. Cho các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ thỏa:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ b_{n+1} = 2a_nb_n \end{cases} \quad (\forall n \in N)$$

a) Chứng minh rằng a_n, b_n là hai số nguyên tố sánh đôi

b) Tìm các công thức cho a_n, b_n

Giải

a)

* Với n = 1, ta có : $a_1^2 - 2b_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$

* Với n = k, giả sử : $a_k^2 - 2b_k^2 = 1$

* Với n = k + 1, ta có : $a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2$

$$= \left(a_k^2 + 2b_k^2\right)^2 - 2\left(2a_kb_k\right)^2$$

$$= \left(a_k^2 - 2b_k^2\right)^2 = 1$$

(Do giả thiết quy nạp)

Quả vậy :

Giả sử $|a_1| \geq 1$, ta có :

$$|a_2| = |2a_1^2 - a_o|$$

$$= 2a_1^2 - 1 \geq |a_1|$$

Bằng quy nạp, ta có :

$$|a_{n+1}| = |2a_1a_n - a_{n-1}|$$

$$= 2\cos\varphi.\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi$$

$$= \cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi - \cos(n-1)\varphi$$

$$= \cos(n+1)\varphi$$

Do đó $a_{1000} = \cos 1000\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow 1000\varphi = \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in Z$$

$$\Rightarrow a_{1999} = \cos 1999\varphi$$

$$= \cos(2000\varphi - \varphi)$$

$$= \cos(\pi + 2k\pi - \varphi)$$

$$= -\cos\varphi = -a_1$$

Vậy : $a_{1999} + a_1 = 0$

6. Có bao nhiêu dãy số nguyên dương $\{a_n\}$ thỏa:

$$a_o = 1, a_1 = 2, |a_{n+2}.a_n - a_{n+2}^2| = 1$$

Giải

Ta có sơ đồ xác định dãy:

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = \left[\begin{array}{l} 3 \Rightarrow a_3 = \left[\begin{array}{l}5\\4\end{array}\right. \\ 5 \Rightarrow a_3 = \left[\begin{array}{l}13\\12\end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại số dãy số nguyên dương thỏa đề bài. Trước hết, ta chứng minh tồn tại duy nhất dãy nguyên dương thỏa:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1, \forall n \geq 2$$

đó chính là dãy các số nguyên dương

$$\{a_n\} \text{ thỏa } a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2 \qquad (1)$$

Quả vậy:

$$\begin{aligned}\left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| &= \left|(a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+2}^2\right| \\ &= \left|a_n^2 + a_{n+1}(a_n - a_{n+1})\right| \\ &= \left|a_n^2 - a_{n+1}.a_{n-1}\right| \\ &= 1 \qquad \forall n \in N\end{aligned}$$

- Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được (1) là dãy tăng

Quả vậy: $\left|a_{n+1}^2 - a_n.a_{n+2}\right| = 1 \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_n}$

Từ giả thiết quy nạp: $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_1 \leq a_{n+1} - 1$

$$\Rightarrow a_{n+2} \geq \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_{n+1} - 1} \geq \frac{a_{n+2}^2 - 1}{a_{n+1} - 2} = a_{n+1} + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

* Dãy (1) được xác định duy nhất.

Quả vậy, giả sử tồn tại $n \geq 2$, sao cho a_n, a_{n+1} duy mà có 2 giá trị a_{n+2}, a'_{n+2} với $a_{n+2} > a'_{n+2}$ thỏa mãn cách xác định dãy, tức là:

$$\begin{cases} a_n.a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 \\ a_n.a'_{n+2} = a_{n+1}^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n\left(a_{n+2} - a'_{n+2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow 2 \vdots a_n$$

$$\Rightarrow \text{Vô lý } (\text{vì } a_n \geq a_2 = 3 > 2)$$

Tóm lại ta đã chứng minh được tồnt ại duy nhất dãy nguyên dương:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1, \ \forall n \geq 3$$

Đó ấy chính là dãy $a_0 = 1, a_1 = 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Tương tự ta cũng chứng minh được tồn tại duy nhất các dãy nguyên dương:

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}\right| = 1 \ \forall n \geq 2$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 12, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1 \ \forall n \geq 2$$

$$a_o = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 13,$$
$$\left|a_{n+1}^2 - a_n.a_{n+2}\right| = 1,\ \ \forall n \geq 2$$

Đó cũng chính là các dãy (tương ứng):

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \ \ \forall n \in N \qquad (2)$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \ \ \forall n \in N \qquad (3)$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \ \ \forall n \in N \qquad (4)$$

Kết luận: Tồn tại bốn dãy số nguyên dương (1), (2), (3), (4) thỏa đề bài.

---

7. Cho dãy số $\{S_n\}$ với $S_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$

Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ tồn tại và tính giới hạn đó.

Giải

Ta có :

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right)$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right) + \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1)$$

Tương tự :

$$S_{n+2} = \frac{n+3}{2(n+2)} (S_{n+1} + 1)$$

Từ đó :

$$S_{n+2} - S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)(S_{n+1}+1) - (n+2)^2(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n^2+4n+3)(S_{n+1} - S_n) - S_n - 1}{2(n+1)(n+2)}$$

Rõ ràng $\{S_n\}$ là dãy lượng giác

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tồn tại. Ký hiệu giới hạn đó là S.

Từ $\quad S_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(S_n + 1)$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(S+1)$$

$$\Leftrightarrow S = 1$$

Vậy : $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$

---

8. Biết rằng bất đẳng thức:

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2 ..., x_n (n \geq 1)$ thì n bằng bao nhiêu.

Giải

Giả sử bất đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \left(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}\right)x_n \qquad (1)$$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2 ..., x_n (n \geq 1)$

Khi đó nó cũng xảy ra với $\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 1 \\ x_n = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (n-1) + 4 \geq (n-1)2$$

$$\Rightarrow 1 \leq n \leq 5$$

Đảo lại, giả sử $1 \leq n \leq 5$, ta sẽ sẽ chứng minh rằng (1) được thỏa mãn với mọi bội số thực $x_1, x_2, ..., x_n$

Quả vậy, xét tam thức :

$$f(x_n) = x_n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_2 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2$$

Đây là tam thức bậc 2 đối với x_n, và ta có :

$$\Delta = (x_1 + ... + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) \geq (n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$$

$$\Delta = (x_1 + ... + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) \geq (n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$$

$$\geq \left(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x_n) \geq 0, \quad \forall x_n \in R$$

Vậy kết quả cần tìm là $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

9. Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$, biết rằng

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 9u_n^3 + 3u_n (n = 1, 2, 3, ...) \end{cases}$$

Giải

Đặt : $V_n = 3u_n (n = 1, 2, ...)$. Ta có :

$$\begin{cases} V_1 = 6 \\ V_{n+1} = V_n^3 + 3V_n \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 sao cho : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

- Với n = 1, ta có :

$$V_1 = 6 = x_1 + x_2$$
$$= x_1^{3^{1-1}} + x_2^{3^{1-1}}$$

- Với n = k $(k \in \mathbb{N})$, ta giả sử

$$V_k = x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}$$

• Với n = k + 1, ta có :

$$V_{h+1} = V_k^3 + 3V_k$$

$$= \left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)^3 + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k} + 3(x_1x_2)^{3^{k-1}}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right) + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k}$$

$$\left(\text{vì } (x_1x_2)^{3^{k-1}} = (-1)^{3^{k-1}} = -1\right)$$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lý quy nạp thì:

$$V_n = x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}}, \forall n \in N$$

Vậy : $U_n = \dfrac{1}{3}\left[\left(3 - \sqrt{10}\right)^{3^{n-1}} + \left(3 + \sqrt{10}\right)^{3^{n-1}}\right]$

(vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x - 1 = 0$)

10. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}x_n\right] \end{cases} \forall n \geq 1$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có vô hạn các số chẵn, có vô hạn các số lẻ
(ký hiệu [x] là phần nguyên của x)

Giải

• Giả sử dãy $\{x_n\}^\alpha$ chỉ có hữu hạn các số chẵn, suy ra có ít nhất một số $n \in N$ sao cho x_k lẻ, $\forall k \geq n$

Đặt : $x_k = 2^\alpha.\beta + 1$ $\left(\text{với } \begin{cases} \alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ} \end{cases}\right)$

Ta suy ra :

$$x_{k+1} = 2^{\alpha-1}3\beta + 1$$
$$x_{k+2} = 2^{\alpha-2}3^2\beta + 1$$
....
$$x_{k+\alpha} = 3^\alpha\beta + 1$$
$\Rightarrow x_{k+\alpha}$ là số chẵn $\Rightarrow$ Vô lý

Từ đó suy ra rằng dãy đã cho phải có vô hạn các số chẵn

* Giả sử dãy $\{x_n\}^\alpha$ chỉ có hữu hạn các số lẻ, suy ra có ít nhất một số $n \in \mathbb{N}$ sao cho x_n chẵn, $\forall k \geq n$

Đặt $x_k = 2^\alpha\beta$ $\left(\text{với } \begin{cases}\alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ}\end{cases}\right)$

Ta suy ra :
$$x_{k+1} = 3.2^{\alpha-1}\beta$$
$$x_{k+2} = 3^2.2^{\alpha-2}\beta$$
....
$$x_{k+\alpha} = 3^\alpha.\beta$$
$\Rightarrow x_{k+\alpha}$ là số lẻ $\Rightarrow$ Vô lý

Từ đó suy ra dãy đã cho phải có vô hạn các số lẻ

11 Cho n số thực dương

$$a_1, a_2, ..., a_n > 0 \quad (n \geq 2)$$

thỏa: $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$

Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

Giải

Ta có :

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$= \sum_{j=2}^{n}\left(a_j\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (1-a_j)\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(1-a_i)-(1-a_j)a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j - a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{1\le i\le j\le n}\left(\frac{a_j - a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} + \frac{a_i - a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}}\right) \ge 0$$

(vì : $\dfrac{a_j - a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} + \dfrac{a_i - a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}}$

$$= \frac{(a_j - a_i)\left[\sqrt{a_j(1-a_j)} - \sqrt{a_i(1-a_i)}\right]}{\sqrt{a_i a_j(1-a_i)(1-a_j)}}$$

$$= \frac{(a_i - a_j)^2(1-a_i-a_j)}{\sqrt{a_i a_j(1-a_i)(1-a_j)}\left[\sqrt{a_j(1-a_j)} + \sqrt{a_i(1-a_i)}\right]} \ge 0)$$

12. Cho dãy $\{x_n\}$ với $x_1 = a \ne -2$ và

$$x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2x_n^2+2} - 2}{2x_n + \sqrt{2x_n^2+2}}, \forall n \in N$$

Xét tính hội tụ của dãy và tìm giới hạn của dãy (nếu có) tùy theo trường hợp của a.

Giải

1. Đặt $$f(x)=\frac{3\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$$

Và $$g(x)=f(x)-x=\frac{-2x^2+(3-x)\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}\quad (x\neq -1)$$

Giải phương trình g(x) = 0 ta được hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right.$$

Để ý rằng, trên mỗi khoảng $(-\infty,-7),(1,+\infty)$ thì g đều liên tục và không có nghiệm nên dấu củay trên mỗi khoảng này không đổi.
Hơn nữa:

- $$g(-8)=\frac{-128+11\sqrt{130}-2}{-16+\sqrt{130}}$$

$$=\frac{\sqrt{130}\left(\sqrt{130}-11\right)}{10-\sqrt{130}}>0$$

$$\Rightarrow g(x)>0, \forall x<-7$$

$$\Leftrightarrow f(x)>x, \forall x<-7$$

$$g(2)=\frac{-10+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+4}<0$$

$$\Rightarrow g(x)<0, \forall x>1$$

$$\Rightarrow f(x)<x, \forall x>1$$

2. Đặt : $h(x)=f(x)-1, x\neq -1$

$$=\frac{2\sqrt{2x^2+2}-2(x+1)}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$$

Phương trình h(x) = 0 có nghiệm duy nhất x = 1. Lý luận tương tự như trên, ta suy ra h không đổi dấu trên mỗi khoảng (–1, 1), $(1,+\infty)$

Hơn nữa:

$$\begin{cases} h(0) = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{} = 2\sqrt{2} > 0 \\ h(2) = \dfrac{2\sqrt{10}-6}{4+\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}-3}{2+\sqrt{10}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0, \forall x > -1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 1$

$$\Rightarrow f(x) \geq 1, \forall x > -2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 1$

3. Đặt : $k(x) = f(x) - (-7)$

$$= \frac{14x - 2 + 10\sqrt{2x^2+2}}{2x + \sqrt{2x^2+2}} \quad x \neq -1$$

Phương trình $k(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -7$

Lý luận tương tự như ở 1), ta giao k(x) không đổi dấu trên mỗi khoảng $(-\infty, -7), (-7, -1)$

Hơn nữa

$$\begin{cases} k(-8) = \dfrac{10\sqrt{130}-114}{\sqrt{130}-16} < 0 \\ k(-6) = \dfrac{10\sqrt{74}-86}{\sqrt{74}-12} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k(x) \leq 0, \forall x < -1$$

Dấu "2" $\Leftrightarrow x = -7$

$$\Rightarrow f(x) \leq -7, \forall x < -1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = -7$

Từ các kết quả trên ta thu được:

a. Nếu $x_1 = a > -1$ thì theo (2) ta có $x_2 = f(x_1) \geq 1$

Từ đó suy ra $x_n \geq 1, \forall n \geq 2$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = 1$)

Kết hợp với (1) ta được $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n, \forall n \geq 2$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = 1)

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm (nếu a = 1 thì $\{x_n\}$ là dãy hằng và bị chặn dưới. Do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

b. Nếu $x_1 = a < -1$, tương tự trường hợp trên, theo (3) ta được

$x_2 = f(x_1) \le -7$. Từ đó suy ra $x_n \le -7 \quad \forall n \in N$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = −7)

Kết hợp với (1) ta được $x_{n+1} = f(x_n) \ge x_n, \forall n \ge 2$

$$\left(\text{Dấu}" = " \Leftrightarrow a = -7\right)$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy tăng (nếu a = −7 thì {xn} là dãy hằng) và bị chặn trên.

Do đó dãy $\{x^n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -7$

13. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_1 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1999}$$

Tìm $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_2}{u_{n+1}}\right)$$

Giải

Ta có :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{1999(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1}.u_1}$$

$$= 1999\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}} = 1999\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}}\right)$$

$$= 1999\left(1 - \frac{1}{u_{k+n}}\right)$$

Hơn nữa :

$$u_{n+1} > u_n \geq 1, \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \{u_n\} \text{ là dãy đơn điệu tăng}$$

Do đó, nếu dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên thì nó hội tụ về a hữu hạn. Suy ra:

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_n^2}{1999}\right) = a + \frac{a^2}{1999}$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \text{ Vô lý (vì } u_n \geq 1, \forall n \in N \Rightarrow a \geq 1)$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên, do đó:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_1}{u_{n+1}}\right) = 1999$$

14. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

$$\frac{C_{2p}^p - 2}{p^2} \text{ là số nguyên}$$

Giải

* Nếu p = 2 thì $\frac{C_4^2 - 2}{4} = 1$

* Nếu p > 2 thì :

$$C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{(2p).(2p-1)!}{p.(p-1)!p!}$$

$$= 2.C_{2p-1}^{p-1}$$

Hơn nữa :

$$(2p - k)(p + k) \equiv k(p - k) \quad \left(\text{mod} p^2\right)$$

$$\left(\forall k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [(2p-1)(p+1)].[(2p-2)(p+2)]\left[\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right]$$

$$\equiv [1(p-1)][2(p-2)...]\left[\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right] \pmod{p^2}$$

$$\Rightarrow (p+1)(p+2)...(2p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p^2}$$

$$\Rightarrow C_{2p-1}^{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)...(2p-2)(2p-1)}{(p-1)!}$$

$$= \frac{m.p^2+(p-1)!}{(p-1)!} \quad (\text{với } m \in Z)$$

$$= \frac{mp^2}{(p-1)!}+1$$

$\Rightarrow \dfrac{mp^2}{(p-1)!} = C_{2p-1}^{p-1} - 1$ là số nguyên

$\Rightarrow m \vdots (p-1)!$ (vì p^2 và $(p-1)!$ là hai số nguyên tố cùng nhau)

$\Rightarrow m = n.(p-1)! \quad (\text{với } n \in Z)$

$$\Rightarrow C_{2p-1}^{p-1} - 1 = np^2$$

$$\Rightarrow C_{2p}^{p} - 2 = 2\left(C_{2p-1}^{p-1} - 1\right) = 2np^2$$

$$\Rightarrow \frac{C_{2p}^{p}-2}{p^2} = 2n \in Z$$

15. Cho dãy số dương $U_o, U_1, \ldots, U_{1999}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} u_o = u_{1999} = 1 & (1) \\ u_i = 2\sqrt[4]{u_{i-1} - u_{i+1}}\ ;\ i = 1,2,\ldots,1998 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a. $1 \le u_i < 4; \forall i = 1,2,\ldots,1999$

b. $u_o = u_{1999}, u_1 = u_{1998}, \ldots, u_{999} = u_{1000}$

c. $u_o < u_1 < \ldots < u_{999}$

Giải

a) Đặt $\alpha = \underset{r=0,1999}{\underline{\text{Max}}}\, u_i, \beta = \underset{i=0,1999}{\underline{\text{Min}}}\, u_i \quad (\alpha,\beta > 0)$

Nếu $\alpha = \beta$ thì $u_o = u_1 = \ldots = u_{1999} = 1$, nhưng điều kiện (2) cho ta thấy điều này vô lý. Như vậy $\alpha > \beta$.

Mặt khác theo định nghĩa, ta có :

$$\alpha \ge u_i \ge \beta, i = \overline{1,1999}$$

$$\Rightarrow \alpha \ge 1 \ge \beta \qquad (3)$$

Nếu $\beta = u_k \left(k \in \{1,2,\ldots 19998\}\right)$, theo (2) thì

$$\beta = u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \ge \sqrt[4]{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \beta^4 \ge 16\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta \ge 4$$

$\Rightarrow$ Vô lý (vì mâu thuẫn với (3))

Như vậy $\beta \ne u_k, \forall k = \overline{1,998}$

Suy ra $\beta = u_1 = u_{1999} = 1$

Vậy ta đã chứng minh được $u \ge 1, \forall i = \overline{0,1999}$,

Do $\alpha > \beta = 1$ nên ta có $\alpha = u_k$ nào đó

$\left(\text{với } k \in \{1,2,\ldots,1998\}\right)$

$$\Rightarrow u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \le 2\sqrt[4]{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha \le 4$$

Nếu như $\alpha = 4$ thì $u_{k-1} = u_{k+1} = 4$. Tương tự dãy liên tiếp (2) ta suy ra:

$$u_o = u_1 = u_2 = \ldots = u_{1999} = 4$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (1), suy ra $\alpha < 4$.

Điều đó có nghĩa là $u_i < 4, \forall i = \overline{0,1999}$

Tóm lại ta đi đến kết luận rằng:

$$1 \le u_i < 4, \forall i = \overline{0,1999}$$

b) Dễ dàng chứng minh được rằng dãy số thỏa (1), (2) là duy nhất

Xét dãy $u_{1999}, u_{1998}, \ldots, u_1, u_o$

Rõ ràng dãy này cũng thỏa mãn điều kiện (1) và (2). Do tính duy nhất suy ra:

$$u_o = 1999, u_1 = u_{1998}, \ldots, u_{999} = u_{1000}$$

c) Theo điều kiện (2), ta suy ra :

$$u_{999} = 2\sqrt[4]{u_{998}.u_{1000}}$$

Theo chứng minh trên ta có $0 < u_{999} = u_{1000} < 4$

$$\Rightarrow u_{999}^2 = 4\sqrt{u_{998}.u_{999}} < 4u_{999}$$

$$\Rightarrow u_{998}.u_{999} < u_{999}^2$$

$$\Rightarrow u_{998} < u_{999}$$

Lý luận tương tự ta có điều phải chứng minh.

16. Từ dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}, n \in N \end{cases}$$

ta thành lập dãy $\{S_n\}$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$

Tìm $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Giải

Từ giả thiết ta suy ra :

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2000} + u_n, \forall n \in R$$

Vì $u_1 = 2$ nên ta có :

$$2 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \ldots$$

có nghĩa rằng $\{u_n\}$ là một dãy tăng. Giả sử dãy này bị chặn trên, lúc đó tồn tại $L \in [2, +\infty)$ sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

Từ đó : $$L = \frac{L^2 + 1999L}{2000}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = 1 \end{array}\right.$$

Điều này vô lý $(\text{vì } L \geq 2)$

Như vậy dãy $\{u_n\}$ cũng bị chặn trên

Do đó : $$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Mặt khác, cũng từ giả thiết :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}$$

$$\Rightarrow u_n(u_n - 1) = 2000(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2000(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}$$

$$= 2000\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i+1} - 1} = 2000\left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$= 2000\left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 2000$$

(17.) Cho dãy số $\{a_n\}$ với $\begin{cases} a_o = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \end{cases}$ $\forall n \in N$

Tìm tất cả các giá trị của n để $a_n - 1$ là một số chính phương.

Giải

Xét phương trình đặc trưng : $t^2 = 4t - 1$

$$\Leftrightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \beta\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

$$(\alpha, \beta \in R)$$

Hơn nữa : $\begin{cases} a_o = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2(\alpha + \beta) + \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(t_1^n + t_2^n\right)$$

Do : $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow a_n = 1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right] - 1$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n . \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\right]^2$$

Vì $a_n - 2$ là số chính phương nên :

$$A = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n - \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \in Z$$

Ta lần lượt xét các trường hợp

- Nếu $n = 0 \Rightarrow A = 0 \in Z$
- Nếu $n = 1 \Rightarrow A = 1 \in Z$
- Nếu $n = 2k,\ k \in N*$

Xét dãy $\{b_h\}$, với

$$b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = A$$

Ta lại có $2 \pm \sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng

$x^2 = 4x - 1$ nên $\{b_k\}$ thỏa :

$b_{k+2} = 4b_{k+1} - b_k$

mà $\begin{cases} b_o = 0 \\ b_1 = \sqrt{6} \end{cases}$

$\Rightarrow b_k \notin Q, \forall k \in N*$

$\Rightarrow a_n - 1$, không phải là số chính phương

nên $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$:

Ta có : $$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n - \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2k}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$$

Đặt : $$C_k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right], k \in N$$

thì dãy $\{C_n\}$ thỏa mãn

$$C_{k+1} = 4C_{k+1} - C_k$$

Mà $\begin{cases} C_o = 0 \\ C_1 = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow C_k \in Z, \quad \forall k \in N$

Vậy : $a_n - 1$ là số chính phương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n \text{ nguyên dương lẻ} \end{array}\right.$

18. Cho $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos_\alpha^2 \sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha}\right)^n$$

Giải

Đặt : $x_n = \cos_2^2 \sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha}, n \in N$

$\Rightarrow x_n \to 1$, khi $n \to +\infty$

$\Rightarrow \dfrac{\ln x_n}{x_n - 1} \to 1$, khi $n \to +\infty$

$\left(\text{Để ý} : \begin{cases} 0 < x_n < 1, \forall n \in N \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \text{khi } x \to 0 \end{cases}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{n \ln x_2}{n(x_n - 1)} \to 1$, khi $n \to +\infty$

Mà $\quad n(x_n - 1) = \cos^2\alpha \dfrac{\sqrt[n]{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{1}{n}} + \sin^2\alpha \dfrac{\sqrt[n]{\sin\alpha} - 1}{\dfrac{1}{n}}$

$\to \cos^2\alpha \ln\cos\alpha + \sin^2\alpha \ln\sin\alpha$

$\left(\text{vì } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln x \text{ (với } x > 0)\right)$

$\Rightarrow (x_n)^n \to (\cos\alpha)^{\cos^2\alpha} (\sin\alpha)^{\sin^2\alpha}$

19. Cho dãy số {un} với:

$$\begin{cases} u_1 \in N \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right) - 1999, \ n \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ

Giải

Ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 1999$ là hàm số khả vi trên R và f'(x)

$$= \frac{x}{1+x^2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ (\forall x \in R)$$

Mặt khác, đặt:

$$g(x) = x + 1999 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$= x - f(x)$$

thì g cũng khả thi trên R và

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{1+x^2} > 0 \quad (\forall x \in R)$$

Hơn nữa: $g(0).g(-1999) = -\dfrac{1999}{2}\ln\left(1+199^2\right) < 0$

Từ đó suy ra tồn tại $L \in (-1999, 0)$ sao cho:

$$g(L) = 0 \Leftrightarrow f(L) = L$$

Ap dụng định lý Lagrange, ta có $c \in R$ sao cho:

$$|U_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| = |f'(c)|.|u_n - L| \le \frac{1}{2}|u_n - L|$$

Từ đó ta được:

$$|u_n - L| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - L|, \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

(20) Cho $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 3 \end{cases}$

Hãy xác định giá trị lớn nhất của G và giá trị nhỏ nhất của k sao cho n số dương trên có a_1, a_2,..., a_n thì bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng:

$$k < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_n}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < G$$

Giải

Đặt: $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$T = T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}}$$

(Trong đó: $a_{n+1} = a_1$)

Ta có: $T > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S} = 1$

$\Rightarrow k \geq 1.$

Mặt khác:

$$n - T = \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1}{a_n + a_i}$$

$$= T(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) > 1$$

$\Rightarrow T < n - 1$

$G \leq n - 1$

Với x > 0, ta có:

$$T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x + x^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{x^{n-1} + 1}$$

$$= \frac{n-1}{1+x} + \frac{x^{n-1}}{1 + x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = n - 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = 1 \end{cases}$$

Như vậy: Max G = n – 1, Min K = 1