

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Chứng minh : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

b) Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Bài 2. (2,5 điểm)

Giải các phương trình:

a) $\frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$

b) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)

b) Chứng minh: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$); Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD tại E , cắt CD tại A' ; đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC tại F , cắt CD tại B' . Gọi diện tích các tam giác OAB, OCD, ACD, ABC lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4 . Chứng minh:

a) $EF \parallel AB$

b) $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{BD}$ và $AB^2 = EF \cdot CD$

c) $\frac{S_1}{S_4} + \frac{S_2}{S_3} = 1$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$\begin{aligned}VT &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\&= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\&= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = VP\end{aligned}$$

b) Bình phương 2 vế ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{xyz} + \frac{2y}{xyz} + \frac{2x}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2xyz}{xyz} &= 4 \quad (x+y+z=xyz) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= 2 \text{ (đpcm)}\end{aligned}$$

Bài 2.

$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+7}{2003} + 1 + \frac{x+6}{2004} + 1 + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2005}{5} - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+2010}{2003} + \frac{x+2010}{2004} + \frac{x+2010}{2005} + \frac{x+2010}{5} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2010) \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x+2010=0 \Leftrightarrow x=-2010\end{aligned}$$

$$b) x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \text{ (thêm } 4x^2 + 1 \text{ vào 2 vế)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1 + 2x + 100)(x^2 + 1 - 2x - 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 101 = 0 \\ x^2 - 2x - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VN \\ x = -9 \\ x = 11 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-9; 11\}$$

Bài 3.

$$a) x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (với mọi } x)$$

b) Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương $3(x^2 - x + 1)$ được:

$$3x^2 + 3x + 3 > x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

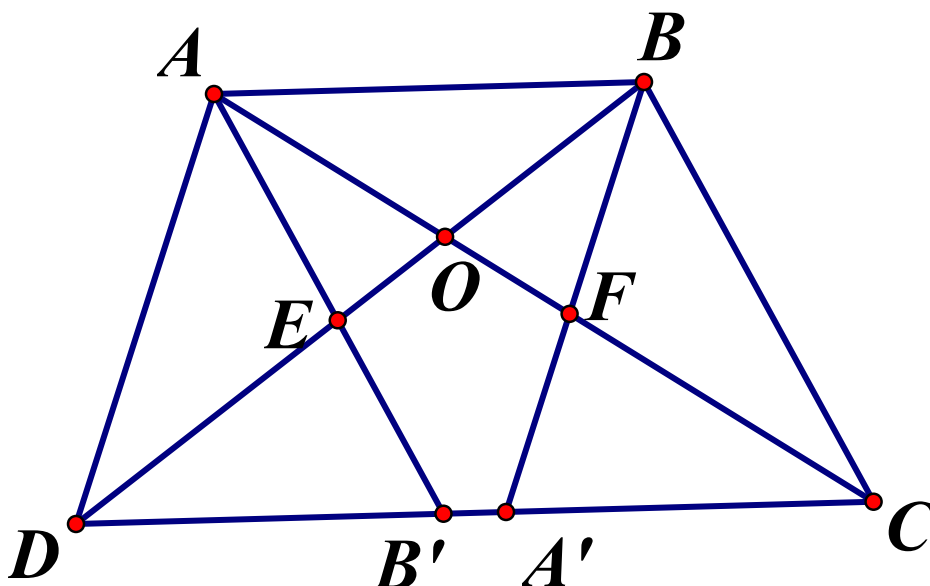
$$\text{Suy ra: } \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$$

$$c) \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3(x^2 - x + 1) + x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}$$

$$= 3 - \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2(x - 1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 3$$

$$\text{Vậy } \max A = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 4.



a) $AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$
 $BF \parallel AD \Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OC}$
 $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF \parallel AB$ (Ta let đảo)

b) $AB \parallel DA' \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DA'} \Rightarrow \frac{EB}{ED + EB} = \frac{AB}{AB + DA'}$
 $AB = A'C$ được: $\frac{EB}{BD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{DB'} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{AB}$ (Do $AB = DB'$)
 $\Rightarrow AB^2 = EF \cdot DC$

c) $\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{OA}{AC}$ (1); $\frac{S_{OCD}}{S_{ADC}} = \frac{OA}{AC}$ (2)

(Tỷ số DT hai tam giác có cùng đáy bằng tỷ số đường cao)
 Cộng (1) (2) về theo về ta có : đpcm