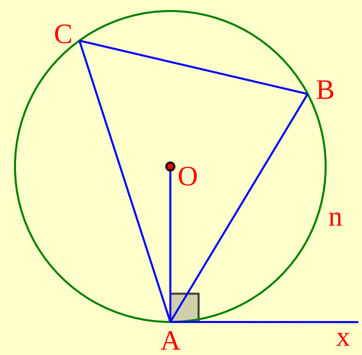
GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. Lý thuyết



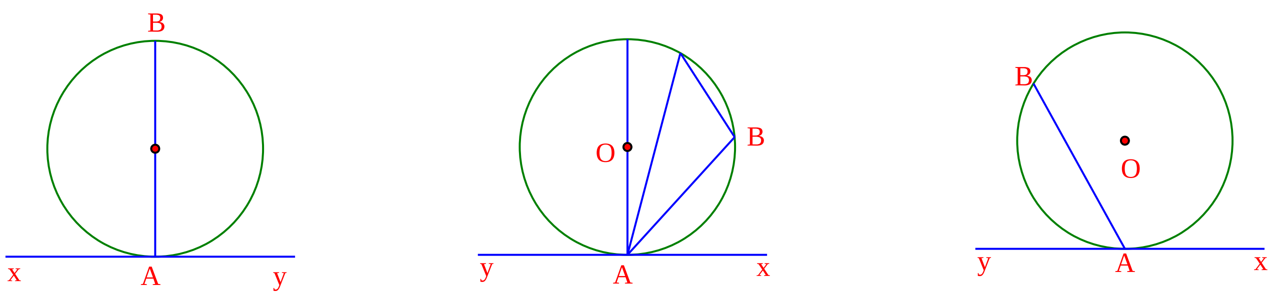
1. Định nghĩa:

*) Góc $\widehat{BAx}$ có đỉnh nằm trên đường tròn cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh AB chứa dây cung AB, góc $\widehat{BAx}$ gọi là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

+) $\overset{\frown}{AnB}$ gọi là cung bị chắn

2. Định lý: Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn.

Ta có: $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AnB}$



sđ $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^0$ sđ $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ sđ $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$

3. Hệ quả: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau: $\widehat{ACB} = \widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AnB}$

4. Định lý bổ sung (Bổ đề): Nếu góc $\widehat{BAx}$ (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung $\overset{\frown}{AB}$ căng dây đó và cung này nằm bên trong gó đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

B. Bài tập

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức, các góc bằng nhau

Cách giải: Ta áp dụng các kiến thức sau

- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau

- Hai góc kề đáy của tam giác cân thì bằng nhau

- Hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc còn lại cũng bằng nhau

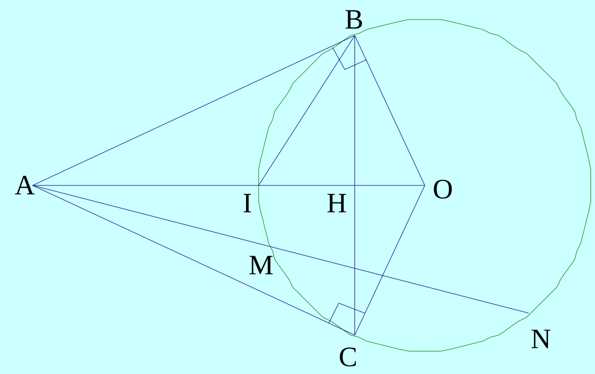
Bài 1:

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B,C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N)

a) Chứng minh $AB^2 = AM.AN$

b) Gọi $H = AO \cap BC.$ Chứng minh $AH.AO = AM.AN$

c) Đoạn thẳng AO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Lời giải

a) Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ANB\,(gg)$

b) Ta có AO là đường trung trực của BC nên $\Rightarrow AO \perp BC$

Xét tam giác vuông AOB, có: $AB^2 = AH.AO$

c) Chứng minh được $\widehat{ABI} = \widehat{CBI}\left(do: \overset{\frown}{BI} = \overset{\frown}{CI}\right) \Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABC}.$ mà AO là tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

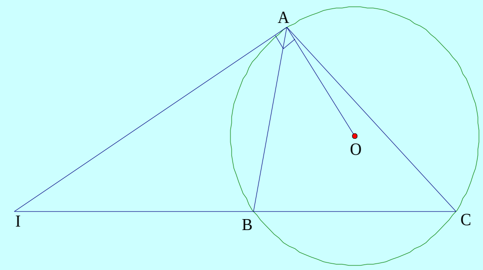
Bài 2:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).

Tiếp tuyến tại A cắt BC tại I

a) Chứng minh $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

b) Tính IA, IC biết rằng $AB=20cm$, $AC=28cm$ $BC=24cm$



Lời giải

a) Xét ΔBAI và ΔACI có: $\widehat{I}$ chung và $\widehat{ACB}=\widehat{BAI}$ $\Rightarrow \Delta BAI \sim \Delta ACI(gg)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{IB}{IA}\Rightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{IB^2}{IA^2}$

Mặt khác $IA^2=IB.IC\Rightarrow$ đpcm.

b) Do $\Delta BAI \# \Delta ACI(gg)$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{CI}=\dfrac{BI}{AI}=\dfrac{AB}{CA}\Rightarrow \dfrac{IA}{IC}=\dfrac{IC-24}{IA}=\dfrac{5}{7}$

$\Rightarrow IA=35cm; IC=49cm.$

Bài 3:

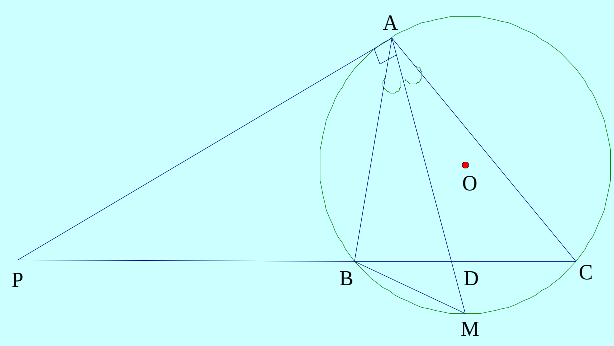
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).

Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P

a) Chứng minh các tam giác PAC và PBA đồng dạng

b) Chứng minh $PA^2=PB.PC$

c) Tia phân giác trong của góc A cắt BC và (O) lần lượt tại D và M. Chứng minh $MB^2=MA.MD$



Lời giải

a) Ta có $\Delta PAB \# \Delta PCA(gg)$

b) Vì $\Delta PAB \# \Delta PCA (gg) \Rightarrow PA^2 = PB.PC$

c) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

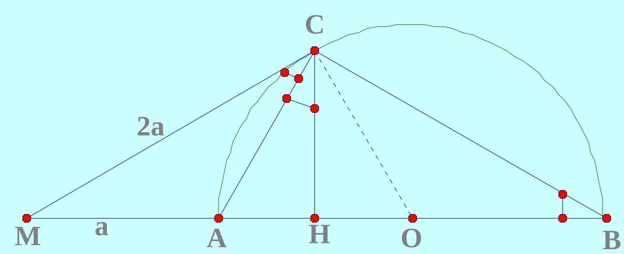
$\Rightarrow \Delta MAB \# \Delta MBD (gg) \Rightarrow MB^2 = MA.MD$

Bài 4:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, gọi H là hình chiếu của C trên AB

a. Chứng minh rằng CA là phân giác của $\widehat{MCH}$

b. Giả sử $MA = a; MC = 2a.$ Tính AB và CH theo a?



Lời giải

a. Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ACH} = \widehat{B} (phu. \widehat{CAB}) \\ \widehat{ACM} = \widehat{B} (= \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{AC}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{ACM}$$

b. $\Delta MAC \sim \Delta MCB (gg) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MC^2 = MA.MB \Rightarrow MB = \frac{MC^2}{MA} = 4a \Rightarrow AB = 4a - a = 3a$

Xét $\Delta COM (\widehat{C} = 90^0) \Rightarrow CM.CO = CH.OM \Rightarrow CH = \frac{CM.CO}{OM} = \frac{2a.1,5a}{2,5a} = \frac{6a}{5}$.

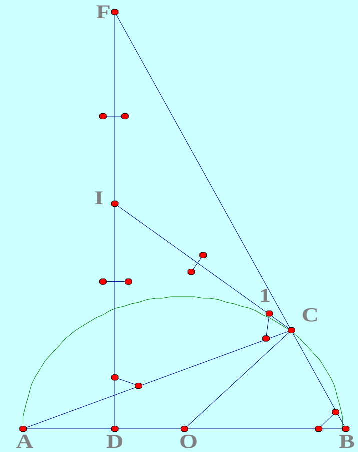
Bài 5:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Qua D trên đoạn AB kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC tại F. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại C cắt đường vuông góc ở D tại I. Gọi E là giao điểm của AC và DF.

a. So sánh $\widehat{IEC}; \widehat{ICE}; \widehat{ABC}$

b. ΔEIC cân

c. $IE = IC = FI$



Lời giải

a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ECF} = 90^0$

Xét $\Delta CEF, \Delta DBF$ có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{F}: chung\\ \widehat{C} = \widehat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IEC} (1)$

Lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{ICE} (= \frac{1}{2} sd\, \widehat{AC})(2) \Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{ICE} = \widehat{ABC}$

b. ΔIEC cân tại I

c) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C_1} + \widehat{ICE} = 90^0; \widehat{F} + \widehat{IEC} = 90^0\\ \widehat{ICE} = \widehat{IEC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{F}$$

ΔICF cân tại I $\Rightarrow FI = IC$.

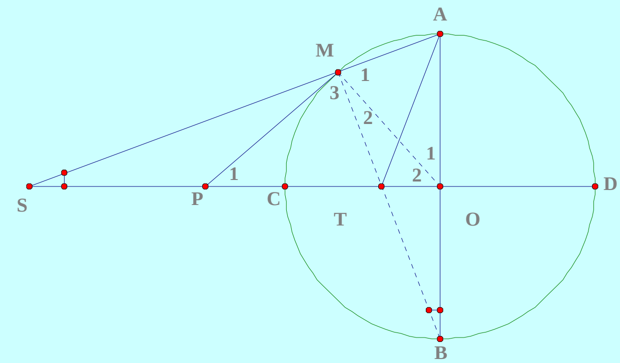
Bài 6:

Cho đường tròn $(O;R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia CD lấy điểm S. SA cắt đường tròn tại M, tiếp tuyến của đường tròn ở M cắt CD ở P, BM cắt CD ở T. Chứng minh rằng

a. $PT.MA = MT.OA$

b. $PS = PM = PT$

c. Biết $PM = R$, tính $TA.SM$ theo R



Lời giải

a. Ta có $\widehat{OMP} = 90^0$

$\widehat{P_1} = \widehat{O_1}$ (cùng phụ $\widehat{O_2}$)

$\widehat{M_1} = \widehat{M_3}$ (cùng phụ $\widehat{M_2}$)

$$\Rightarrow \Delta PMT \# \Delta OMA(gg) \Rightarrow \frac{PT}{OA} = \frac{MT}{MA} \Leftrightarrow PT.MA = MT.OA$$

b) $\widehat{S} = \widehat{B}$ (phụ góc $\widehat{MAB}$), $\widehat{SNP} = \widehat{OMB}$ (phụ góc $\widehat{M_3}$) $\Rightarrow \Delta PMS \# \Delta OMB(gg)$

mà ΔOMB cân tại O $\Rightarrow \Delta PMS$ cân tại P $\Rightarrow PS = PM(1)$

Lại có: $\left.\begin{array}{l} \widehat{M_3} + \widehat{PMS} = 90^0 \\ \widehat{PTM} + \widehat{S} = 90^0 \\ \widehat{S} = \widehat{PMS} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{PTM} \Rightarrow \Delta MPT$ cân tại $P \Rightarrow PM = PT(2) \Rightarrow PS = PM = PT$

c) $\left.\begin{array}{l} \Delta ATB \# \Delta OMB(gg) \\ \Delta SMP \# \Delta MOB(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ATB \# \Delta SPM \Rightarrow \frac{AT}{SP} = \frac{AB}{MS} \Leftrightarrow \frac{AT}{PM} = \frac{AB}{MS}(SP = PM) \Leftrightarrow AT.MS = AB.PM = 2R.R = 2R^2$

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, một tia là tiếp tuyến của đường tròn

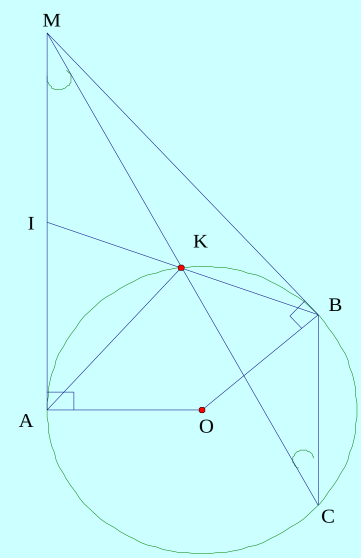
Cách giải: Sử dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung hoặc hệ quả của hia góc nội tiếp.

Bài 1:

Cho đường tròn $(O;R)$ với A là điểm cố định trên đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O) và lấy M là điểm bất kì thuộc tia Ax. Vẽ tiếp tuyến thứ hai MB với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của $MA,$ K là giao điểm của BI với (O).

a) Chứng minh các tam giác IKA và IAB đồng dạng. Từ đó suy ra tam giác IKM đồng dạng với tam giác IMB

b) Giả sử MK cắt (O) tại C. Chứng minh BC song song với MA.



Lời giải

a) $\Delta IAK \sim \Delta IBA(gg) \Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IK}{IA}$

mà $IA = IM \Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IK}{IM} \Rightarrow \Delta IKM \sim \Delta IMB(cgc)$

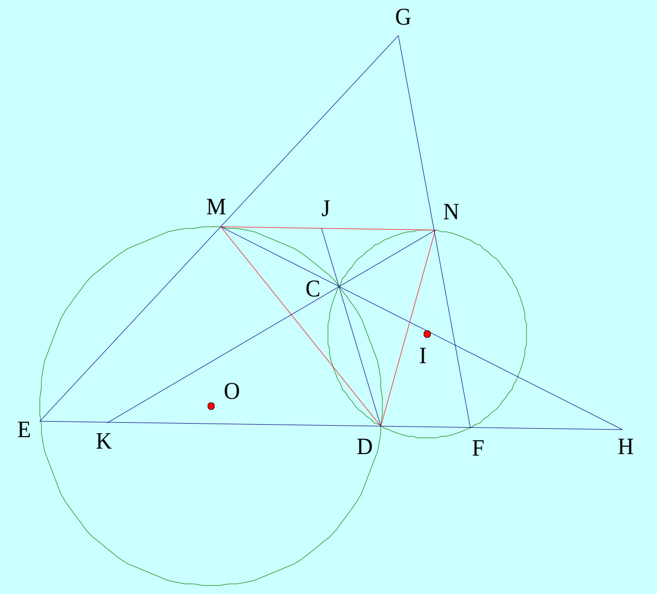
b) Chứng minh được $\widehat{IMK} = \widehat{KCB} \Rightarrow BC//MA \Rightarrow$ đpcm.

Bài 2:

Cho đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại C và D, trong đó tiếp tuyến chung MN song song với cát tuyến EDF, M và E thuộc $(O), N$ và F thuộc (I), D nằm giữa E và F. Gọi K, H theo thứ tự là giao điểm của NC, MC với EF. Gọi G là giao điểm của EM, FN. Chứng minh:

a) Các tam giác GMN và DMN bằng nhau

b) GD là đường trung trực của KH



Lời giải

a) Ta có $\widehat{DMN} = \widehat{E} = \widehat{GMN}$

$\widehat{DNM} = \widehat{NFD} = \widehat{DNG} \Rightarrow \Delta GMN = \Delta DMN$

b) Chứng minh được MN là đường trung trực của GD

$\Rightarrow GD \perp EF \, (1)$

Gọi J là giao điểm của DC và MN

Ta có $\frac{IM}{DH} = \frac{JN}{DK}\left(=\frac{CI}{CD}\right)$

Mặt khác $JM = JN \left(=\sqrt{JC.JD}\right)$

$\Rightarrow DH = DK \, (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow$ đpcm.

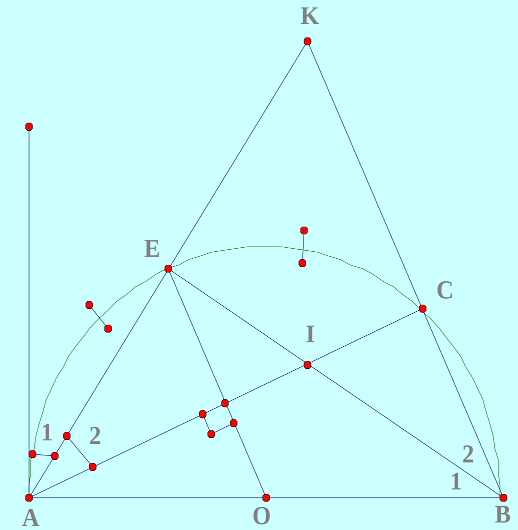
Bài 3:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, tiếp tuyến Ax. Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{CAx}$ cắt nửa đường tròn ở E, AE và BC cắt nhau ở K

a. ΔABK là tam giác gì? Vì sao

b. Gọi I là giao điểm của AC và BE. Chứng minh rằng $IK // Ax$

c. Chứng minh rằng $OE // BC$.



Lời giải

a) $BE \perp AK \left(\widehat{E} = 90^0\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{B_1} = \widehat{A_1} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AE} \\ \widehat{B_2} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{EC} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$$

ΔABK có BE là đường cao, đường phân giác nên cân tại B

b) I là trực tâm của $\Delta ABK \Rightarrow \left.\begin{array}{l} KI \perp AB \\ ma : BC \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow OE // BC$

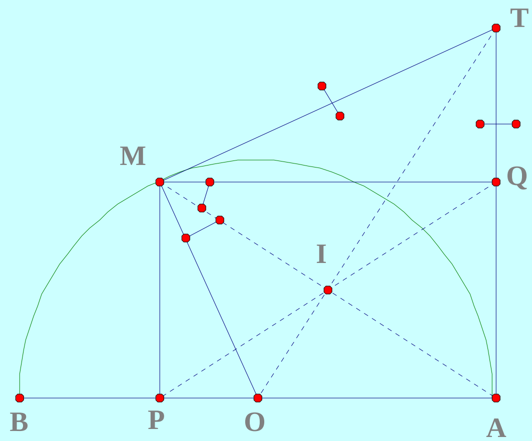
Bài 4:

Cho đường tròn (O) đường kính B. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn ở A, qua điểm T trên đường thẳng d kẻ tiếp tuyến TM với đường tròn (M là tiếp điểm). Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu cuả M trên AB và trên đường thẳng d. Chứng minh rằng

a. AM, PQ, OT đồng quy tại I

b. MA là tia phân giác của $\widehat{QMO}; \widehat{TMP}$

c. $\Delta AIQ, \Delta ATM, \Delta AIP, \Delta AOM$ đồng dạng.



Lời giải

a. Tứ giác $APMQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AM \cap PQ \equiv I$

Lại có $TM = TA$ (hai tiếp tuyến cắt nhau); $OM = OA (= R)$

$\Rightarrow OT$ là đường trung trực của AM $\Rightarrow OT$ cắt AM tại trung điểm I. Vậy có đpcm

b. $\left.\begin{array}{l} \widehat{AMP} = \widehat{MAQ} (slt) \\ \widehat{MAQ} = \widehat{AMT} = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{AM} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{AMQ} \Rightarrow MA$ là tia phân giác $\widehat{PMT}$.

$\widehat{AMQ} = \widehat{MAO} (slt)$ và ΔOAM cân tại O, ta có: $\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AMQ} \Rightarrow MA$ là phân giác $\widehat{OMQ}$.

c. ΔAIQ cân tại I, ΔAMT cân tại T, có: $\widehat{IAQ} = \widehat{MAT} \Rightarrow \Delta IAQ \# \Delta TAM (gg)$

Tương tự: ΔAIP cân tại I, ΔAOM cân tại O, có: $\widehat{IAP} = \widehat{MAO} \Rightarrow \Delta IAP \# \Delta AOM (gg)$

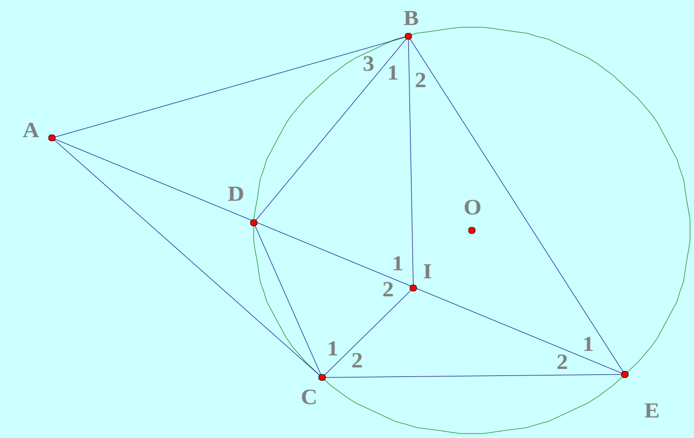
Bài 5:

Cho đường tròn (O), điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (D nằm giữa A và E). Tia phân giác cuả góc DBE cắt DE ở I. CMR:

a. $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{CD}{CE}$

b. $AI=AB=AC$

c. CI là phân giác $\widehat{DCE}$



Lời giải

a) Xét $\Delta ABD, \Delta AEB$, có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}: chung\\ \widehat{B_3}=\widehat{E_1}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABD\sim\Delta AEB(gg)\Rightarrow\frac{BD}{BE}=\frac{AB}{AE}(1)$$

Tương tự ta có: $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{AC}{AE}(2), AB=AC(3)\Rightarrow\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{CD}{CE}$

b. Ta có: $\widehat{I_1}=\widehat{B_2}+\widehat{E_1}$ (góc ngoài cả tam giác), $\widehat{ABI}=\widehat{B_1}+\widehat{B_3}=\widehat{B_2}+\widehat{B_3}$

Lại có: $\widehat{E_1}=\widehat{B_3}\Rightarrow\widehat{I_1}=\widehat{ABI}\Rightarrow\Delta ABI$ cân tại A $\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AI=AB\\AB=AC\end{array}\right\}\Rightarrow AI=AB=AC$

c. ΔACI cân tại A $\Rightarrow\widehat{I_2}=\widehat{C_1}+\widehat{C_3}$, lại có: $\widehat{I_2}=\widehat{C_2}+\widehat{E_2}$ (góc ngoài của ΔICE), mà: $\widehat{E_2}=\widehat{C_3}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$

$\Rightarrow\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ (đpcm).