**Ví dụ 5:** Giải phương trình sau:  (Đề thi ĐH khối B năm 2011)

Phần nháp: Sử dụng CASIO, ta chỉ tìm thấy một nghiệm 

Tương tự ví dụ 4, ta thấy  và 

Vì lý do giá trị của  và  đều chứa , PTVT có các hệ số nguyên, nên ta nghĩ ngay đến nhân tử . Khi đó, ta có:











**- Nhận xét:** PTVT trên chỉ có một nghiệm hữu tỷ, khi thay  thì  và  Từ đó có thể dễ dàng tìm được nhân tử  Tuy nhiên giả sử khi thay  ta thấy  và  đều là số hữu tỷ thì sao?

**Ví dụ 6:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng máy tính CASIO, ta thấy PTVT này có nghiệm duy nhất 

**a) Phương pháp nhân liên hợp:**

Khi  thì  và 

Do đó: 







Vì PTVT có nghiệm duy nhất  nên nhân tử

 có thể chứa nghiệm  hoặc là vô nghiệm. Thành thử ta thấy  không chứa nghiệm  Vậy ta chứng minh nó vô nghiệm:

Ta thấy  

Vậy bài toán được giải quyết theo hướng đó…

**b) Phương pháp đạo hàm:**

xét hàm 

Ta có 

Giải phương trình  ta thấy có một nghiệm 

Do đó, ta phải xét khoảng từng miền cho x:

Nếu  thì ta có 

Khi đó . Vì vậy,  đồng biến, suy ra  là nghiệm duy nhất của 

Nếu  Ta có  và 

Suy ra 

Từ đó ta có giải quyết trọn vẹn bài toán này bằng phương pháp đạo hàm

**Ví dụ 7:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng CASIO ta thấy PTVT này có nghiệm duy nhất . Do đó, sẽ có nhiều cách làm cho những bài dạng này:

**a) Phương pháp nhân liên hợp:**

Khi  thì  và  Từ đó ta được:

 

 

Với lý do PTVT có nghiệm duy nhất  như trên và  đã chứa nghiệm  rồi, vì vậy  sẽ vô nghiệm hoặc chứa nghiệm  Thành thử, ta thấy  không thỏa mãn nhân tử trên. Do đó ta chỉ cần chứng minh nhân tử ấy vô nghiệm:

 

Vậy vô nghiệm. Từ đây dễ dàng có một lời giải hoàn chỉnh cho bài toán…

**b) Phương pháp đạo hàm:**

xét hàm số 

Khi đó 

Vì ta thấy  có một nghiệm duy nhất  và  vô nghiệm nên ta chỉ cần chứng minh  hoặc  với mọi x. Để biết  hay , ta thử một gái trị nào đó của x mà thỏa mãn đkxđ.

**Ví dụ:** Thay  thì 

Vậy là ta chỉ cần chứng minh  với mọi  Ta thấy:

Nếu  thì 



Nếu  thì  

Từ đó ta có đpcm. Vậy, ta luôn có  suy ra  đồng biến, suy ra  là nghiệm duy nhất của 

**Lời giải:** Dành cho bạn đọc tự làm…

**- Nhận xét:** Phương pháp đạo hàm giúp chúng ta chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm. Tuy nhiên, thường thì PTVT là một đa thức phức tạp, việc đạo hàm sẽ trở lên khó khăn, đặc biệt là trong việc chứng minh  hoặc 

Trong khi đó, phương pháp nhân liên hợp sẽ được ưa chuộng hơn…

Tuy nhiên, nếu cố gắng phân tích nhân tử PTVT trên, ta có:



Sẽ có nhiều bạn thắc mắc: PTVT chỉ có nghiệm  thì làm sao có được nhân tử 

Thực ra thì PTVT này còn một cách phân tích nữa:



Vẫn tồn đọng câu hỏi khó: làm sao có được nhân tử 

Nếu bạn đọc muốn đi sâu vào việc phân tích nhân tử, hãy đến với ví dụ sau:

**Ví dụ 8:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng CASIO, ta thấy PTVT này có nghiệm duy nhất 

Khi  thì  và 

Giả sử PTVT có nhân tử  với a hữu tỷ. Khi đó ta có: 



Ta cần  chứa nhân tử 

Do  

Suy ra   đúng với mọi 

Nếu  thì từ  ta có  hoặc . Nhưng do a hữu tỉ nên 

Vậy nhân tử là . Từ  và ta được:





Và 

Vậy là: 





**Lời giải:** Dành cho bạn đọc tự làm…

**- Nhận xét:** Phương pháp biết trước nghiệm cho lời giải khá dài…

Tuy nhiên, bằng việc sử dụng số chính phương, ta có thể sáng tạo ra cách làm khác độc đáo hơn!

Bạn đọc thử quan sát cách làm sau:

Với  thì  và  Khi đó bộ đôi này khác biệt nhau và  chính là 

Ta có  Giả sử PTVT có nhân tử  (giống như cách làm trên), ta được giá trị của nhân tử tại  là: 

Chúng ta chỉ cần tìm a hữu tỷ để  với p, q, r hữu tỷ.

Ta sẽ nhân liên hợp  với một biểu thức để thu được một đa thức chỉ chứa  và

 

Đồng nhất với  ta được:



Giải hệ phương trình trên với nghiệm hữu tỉ, ta được 

Vậy nhân tử là  Đến đây bạn đọc có thể tự giải quyết…

**Ví dụ 9:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Đây là bài tập ở ví dụ 7, bạn đọc có thể tham khảo các cách làm ở trên.

Ngoài ra, phương pháp số chính phương cũng có thể giúp ích được cho bài toán này:

PTVT có nghiệm duy nhất  nên giả sử nhân tử của PTVT là



Ta cho  khi đó  và  Giá trị của nhân tử là 

Và 

Cần tìm a hữu tỷ để  với p, q, r hữu tỷ

Ta có 



Đồng nhất với  ta được

 

Giải hệ phương trình trên với nghiệm hữu tỷ, ta được .

Vậy là ta có 2 cách phân tích với nhân tử  hoặc 

**- Nhận xét:** Phương pháp phân tích thành nhân tử trong PTVT hệ số hữu tỷ có 2 căn thức sẽ càng khó khăn nếu PTVT này có đúng 1 nghiệm hữu tỷ. Vì vậy, nếu bạn đọc gặp dạng này, hãy sử dụng phương pháp nhân liên hợp hoặc đạo hàm để có được lời giải nhanh chóng…

Tuy nhiên, chúng ta sẽ chưa xét tới việc PTVT vô nghiệm. Bạn đọc hãy đọc tiếp phần sau để hiểu thêm về cách làm dạng này:

**Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com**

**https://www.vnteach.com**

**IV. Phương trình vô tỷ vô nghiệm**

**- Lưu ý:** Phương pháp đạo hàm sẽ được sử dụng nhiều trong phương trình vô tỷ vô nghiệm.

**Ví dụ 1:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng máy tính CASIO, ta thấy PTVT này vô nghiệm

**- Ý tưởng 1:** Như đã nói, ta sẽ sử dụng phương pháp đạo hàm:

Xét hàm số 

Ta có 

Vì  

Suy ra  

Vậy là  luôn đồng biến trên . Suy ra 

Điều này chứng tỏ phương trình vô nghiệm.

**- Ý tưởng 2:** Đây là một trường hợp nhỏ của phương trình vô tỷ chỉ có một căn thức dạng  Vậy vẫn theo ý tưởng này thì ta có:

Đặt   Khi đó phương trình vô tỷ trở thành:





 

Thế  vào  ta được







Từ đó, ta có thể biến đổi 

 trong lời giải chi tiết

**- Ý tưởng 3:** Ta sẽ tìm nhân tử bằng phương pháp biết trước nghiệm… Tuy nhiên, điều kiện để sử dụng phương pháp này là PTVT phải có nghiệm. Vậy ta lấy nghiệm đâu ra??? Cách tìm nhân tử sau sẽ gây cảm giác khó hiểu cho bạn đọc, hãy thử tìm hiểu xem.

Ta cần tìm nghiệm phương trình , nhưng rất tiếc, nó vô nghiệm

Vậy ra sẽ tìm nghiệm của phương trình 

Giải phương trình này bằng CASIO, ta được nghiệm  Từ đó ta được:  

Vậy nhân tử của PT  là 

Nhận xét PT và PT được biến đổi từ PTkhi giả thiết tạm: 

Vậy khi PTcó nhân tử là  thì PTsẽ có nhân tử 

Tức là PTvay hệ số  để cho có nghiệm, sau đó trả lại  cho PT

Vì vậy, ta sẽ biến đổi PTVT theo nhân tử  hay dễ nhìn hơn là :











**- Ý tưởng 4:** Sử dụng bất đẳng thức để chứng minh PTVT vô nghiệm:

Ta có  

Vậy   

Ta được đpcm.

**- Nhận xét:** Ý tưởng 1 cho ta cách làm tổng quát những bài tập dạng này, mặc dù việc sử dụng của nó hơi khó.

Ý tưởng 2 sẽ chỉ áp dụng cho bài tập có 1 căn thức dạng .

Ý tưởng 3 cũng chỉ áp dụng cho những bài toán mà sau khi đổi dấu căn thức thì phương trình mới sẽ có nghiệm dạng 

Ý tưởng 4 không định hình được cách làm tổng quát, nhưng yêu cầu ta phải tư duy để được biểu thức đẹp. Để hiểu hơn về các ý tưởng trên, bạn đọc thử đến với bài toán sau đây:

**Ví dụ 2:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng máy tính CASIO, ta thấy phương trình vô tỷ này vô nghiệm. Ta thử làm theo 4 ý tưởng trên

**- Ý tưởng 1:** Đạo hàm

Xét hàm số 

Ta có   

Theo BĐT Cauchuy ta có 

và  

suy ra  

Vậy  đồng biến trên . Vậy 

**- Ý tưởng 2:** Đặt ẩn phụ  

Ta có:   

Sử dụng máy tính CASIO, ta thấy phương trình bậc 4: vô nghiệm. Vậy ta sử dụng phương pháp nhóm thành tổng các bình phương (xem thêm tại bài đọc thêm, trang ). Ta có thể tìm được:



Hoặc 

Hoặc rất nhiều cách phân tích thành tổng bình phương khác nhau…

Sau đó, ta thế ngược  vào hoặc ta được:

 



 



Từ đó ta có nhiều cách phân tích thành tổng bình phương cho bài toán này

**- Ý tưởng 3:** Phương pháp biết trước nghiệm. Theo cách làm của ví dụ 1 thì thay vì giải phương trình , ta sẽ giải phương trình 

Nhưng rất tiếc, PT cũng không cho nghiệm, chứng tỏ là ý tưởng giải phương trình bằng phương pháp này đã bị gạt bỏ…

**- Ý tưởng 4:** Sử dụng bất đẳng thức:

Theo BĐT Cauchuy ta có: 

Suy ra:  

 

Vậy ta có đpcm.

**- Nhận xét:** Tuy ý tưởng 3 bị gạt bỏ với lý do  không có nghiệm hoặc phương trình đó không có dạng  Nhưng nếu giả sử cho nghiệm vô tỷ dạng  bài toán có thể có một lời giải “đẹp”. Bạn đọc thử sử dụng ý tưởng 3 để giải bài toán sau:

**Ví dụ 3:** Giải phương trình sau: 

Phần nháp: Sử dụng máy tính CASIO, ta thấy phương trình vô tỷ này vô nghiệm. Phương trình vô tỷ này có 2 căn thức khác nhau nên cũng cần phải chú ý…

Ta sẽ không giải phương trình  mà sẽ đổi dấu đồng thời hết tất cả hệ số đứng trước căn thức để được một phương trình mới: 

Giải phương trình  bằng CASIO, ta được nghiệm 

Từ đó ta được  

Vậy nhân tử của  là 

“Có vay, có trả”, phương trình  sẽ có nhân tử là  tức là đổi dấu đồng thời tất cả các hệ số của căn thức của nhân tử các hệ số còn lại sẽ giữ nguyên… Từ đó, ta biến đổi  theo nhân tử 

 





Vậy bài toán sẽ được giải quyết!

**- Nhận xét:** Hầu hết cách làm những bà tập trên đều dựa trên nghiệm của phương trình vô tỷ. Do đó, với chiếc CASIO trong phòng thi, chắc hẳn nhiều bạn đọc sẽ thấy được sự hữu ích của nó…

Một bài tập nhỏ cho bạn đọc: Thử giải quyết ví dụ 3 bằng ý tưởng 1 và ý tưởng 4, sau đó hãy so sánh cách làm với ý tưởng 3?

Cũng có thể có nhiều bạn đọc cho rằng phương pháp nhóm nhân tử này thật dài và vô vị, không bằng việc “bình phương” hai vế của phương trình để được phương trình bậc 4 dễ dàng hơn…

Có thể bạn đã đúng nếu bạn đang giải một phương trình vô tỷ dễ.