

CĐ7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 2. Tính giá trị của đa thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $x + y = 0$. Giá trị của đa thức $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$ là:

A. 0 B. 3 C. 4 D. 5

Lời giải

Chọn C

Ta có $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4 = 3xy(x + y) + 2x^2y(x + y) + 4$

Thay $x + y = 0$ vào đa thức D ta được:

$$D = 3xy.0 + 2x^2y.0 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$$

Vậy giá trị của đa thức $D = 4$ khi $x + y = 0$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(x) + x.f(-x) = x + 2023$ với mọi giá trị của x . Kết quả của $f(-4)$ là:

A. $\frac{10117}{17}$ B. $\frac{-10127}{17}$ C. $\frac{-10117}{17}$ D. $\frac{10127}{17}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) + x.f(-x) = x + 2023$ (1)

+ Thay $x = 4$ vào (1) ta được:

$$f(4) + 4.f(-4) = 4 + 2023$$

$$\Rightarrow f(4) + 4.f(-4) = 2027$$

$$\Rightarrow 4.f(4) + 16.f(-4) = 8108 \quad (2)$$

+ Thay $x = -4$ vào (1) ta được:

$$f(-4) - 4.f(4) = -4 + 2023$$

$$\Rightarrow f(-4) - 4.f(4) = 2019$$

$$\text{Đ} - 4.f(4) + f(-4) = 2019 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3)} \quad \text{Đ} [4 \cdot f(4) + 16.f(-4)] + [-4.f(4) + f(-4)] = 8108 + 2019$$

$$\text{Đ} 17.f(-4) = 10127$$

$$\text{Đ} f(-4) = \frac{10127}{17}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \frac{1}{4} - 101x + 101$. Giá trị của $f(100)$ là:

- A. -1 . B. 1 . C. 100 . D. 101 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Ta có: } f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \frac{1}{4} - 101x + 101$$

$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101$$

$$= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101$$

$$= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) \dots - x^2(x - 100) + x(x - 100) - x + 101$$

$$= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101$$

Với $x = 100$ ta có:

$$f(100) = (100 - 100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0 \cdot (100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0 - 100 + 101 = 1$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Cách 2:

Với $x = 100$ Đ $x + 1 = 101$

$$f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \frac{1}{4} - 101x + 101$$

$$f(x) = x^{10} - (x+1)x^9 + (x+1)x^8 - (x+1)x^7 + \frac{1}{4} - (x+1)x + (x+1)$$

$$f(x) = x^{10} - x^{10} - x^9 + x^9 + x^8 - x^8 - x^7 + \frac{1}{4} - x^2 - x + x + 1$$

$$f(x) = 1$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $f(x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = x^2$. Giá trị của $f(2)$ là:

A. $\frac{13}{24}$. B. $-\frac{13}{24}$. C. $\frac{23}{34}$. D. $-\frac{13}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x = 2$ ta có: $f(2) + 3f\left(\frac{2}{2}\right) = 2^2 = 4$ (1)

Với $x = \frac{1}{2}$ ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{2}{2}\right) = 2^2 = 4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra $f(2) = -\frac{13}{32}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \frac{234}{216}x^3y^3$ biết $x - y = 0$.

Giá trị các biểu thức sau C bằng:

A. 1 B. -1 C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) + 15xy(y - x) + \frac{234}{216}x^3y^3$$

$$C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1$$

$$C = (x - y)(2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1$$

Thay $x - y = 0$ vào C ta được: $C = 0 \cdot (2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1 = 0 + 1 = 1$

Vậy $C = 1$ với $x - y = 0$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức $P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là

- A. -10^{4043} . B. 1 . C. 2021 . D. 2022 .

Lời giải

Chọn B

Tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ là $P(1)$.

Ta có: $P(1) = (8.1^2 + 3.1 - 10)^{2021} \cdot (8.1^2 + 1 - 10)^{2022} = 1^{2021} \cdot (-1)^{2022} = 1.1 = 1$.

Do đó tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức $P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là 1 .

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $x + y = 0$. Giá trị của đa thức $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$ là
A. 0 . B. 3 . C. 4 . D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$
 $= 3xy(x + y) + 2x^2y(x + y) + 4 = 4$ (vì $x + y = 0$).

Vậy $D = 4$ khi $x + y = 0$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Để $f(x) = g(x)$ thì giá trị của số a là
A. 3 . B. -3 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 + 4x + 8 = (a + 4)x^3 + 4x + 8$
 $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 + 4bx^2 + 4x + c - 3$.

Để $f(x) = g(x)$ thì $a + 4 = 1$. Suy ra: $a = -3$.

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n - 1) \cdot f(n - 1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(4)$ là:
A. 3 B. 5 C. 6 D. 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(4) = (4-1)f(4-1) \Rightarrow f(4) = 3f(3)$
 $f(3) = (3-1)f(3-1) \Rightarrow f(3) = 2f(2)$
 $f(2) = (2-1)f(2-1) \Rightarrow f(2) = f(1)$

Do đó $f(4) = 6$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Giá trị biểu thức: $A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$ tại $x = 1$, $y = -0,5$ là:

- A. 0 B. 1 C. - 2023 D. 2023

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$ vào biểu thức A , ta được:

$$\begin{aligned} A &= 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023 \\ &= 7y - 5y^2 - 11y - 10y^2 + 15y^2 + 4y - 2023 \\ &= (7y - 11y + 4y) + (-5y^2 - 10y^2 + 15y^2) - 2023 = -2023 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 1, y = -0,5$ là - 2023.

Câu 11. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1$ là.

- A. $P(x) = 0$ B. $P(x) = 1$ C. $P(x) = -5$ D. $P(x) = -6$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1 = -5x(x^3 - 2x + 3) + 1 = 0 + 1 = 1$

Câu 12. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho $P(x) = x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \frac{1}{4} - 2023x^2 - 2023x + 1$. Tính $P(2024)$.

- A. 2023 B. - 2023 C. 2024 D. 2025

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \frac{1}{4} - 2023x^2 - 2023x + 1 \\ P(x) &= x^{2023} - (2023x^{2022} + 2023x^{2021} + \frac{1}{4} + 2023x^2 + 2023x) + 1 \\ P(x) &= x^{2023} - 2023(x^{2022} + \frac{1}{4} + x^2 + x) + 1 \end{aligned}$$

Đặt $A = x^{2022} + \frac{1}{4} + x^2 + x$

$$\text{Đ } x.A = x^{2023} + \frac{1}{4} + x^3 + x^2$$

$$\text{Đ } x.A - A = x^{2023} + \frac{1}{4} + x^3 + x^2 - (x^{2022} + \frac{1}{4} + x^2 + x)$$

$$\text{Đ } A(x-1) = x^{2023} - x$$

$$\text{Đ } A = \frac{x^{2023} - x}{x-1}$$

$$P(x) = x^{2023} - 2023 \cdot \frac{x^{2023} - x}{x-1} + 1$$

Do đó

$$\text{Đ } P(2024) = 2024^{2023} - 2023 \cdot \frac{2024^{2023} - 2024}{2024-1} + 1$$

$$\text{Đ } P(2024) = 2024 + 1 = 2025$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \notin 0$ thì giá trị $19x^2y + 4xy^2$ bằng

A. 80. B. 84. C. 83. D. 85.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x-2)^4 \geq 0, (y-1)^{2022} \geq 0$ nên x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \notin 0$ khi

$$(x-2)^4 = 0 \text{ và } (y-1)^{2022} = 0$$

$$\text{Đ } x = 2 \text{ và } y = 1$$

$$\text{Khi đó } 19x^2y + 4xy^2 = 19 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 84$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Giá trị của biểu thức $Q = a^2 - b^2 + c^2$ biết $ab = 2, bc = 6$ và $ac = 3$ là:

A. 10. B. -6. C. -10. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$ab = 2, bc = 6 \text{ Đ } \frac{ab}{bc} = \frac{2}{6} \text{ Đ } a = \frac{1}{3}c \text{ Đ } \frac{1}{3}c \cdot c = 3 \text{ Đ } c = \pm 3$$

Từ

$$\text{Đ } a = \pm 1, b = \pm 2$$

$$\text{Đ } Q = a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 9 = 6$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5$ là

A. $P(x) = 0$. B. $P(x) = 5$. C. $P(x) = -3$. D. $P(x) = -5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5 = -4x(x^3 - 2x + 3) + 5 = 0 + 5 = 5$

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n-1) \cdot f(n-1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(5)$ là

- A. 10. B. 24. C. 6. D. 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(1) = 1$

$$f(2) = (2-1) \cdot f(1) = 1$$

$$f(3) = (3-1) \cdot f(2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(4) = (4-1) \cdot f(3) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$f(5) = (5-1) \cdot f(4) = 4 \cdot 6 = 24$$

Câu 17. (HSG 7 huyện đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x)$ sao cho với mọi $x \neq 0$ ta đều có $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6$. Giá trị của $f(-1)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6$$

Ta có: (*)

Thay $x = 1$ vào (*) ta được: $f(1) + f(1) + f(1) = 6$

$$\Rightarrow 3f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = 2$$

Thay $x = -1$ vào (*) ta được: $f(-1) + f(-1) + f(1) = 6$

$$\Rightarrow 2f(-1) + f(1) = 6 \Rightarrow 2f(-1) + 2 = 6 \Rightarrow f(-1) = 2$$

Vậy $f(-1) = 2$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \dots + x^{2021}y^{2021}$ tại $x = 1$; $y = -1$ là

- A. 1. B. 2021. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$; $y = -1$ vào đa thức $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \dots + x^{2021}y^{2021}$ ta được:

$$1 \cdot (-1) + 1^2 \cdot (-1)^2 + 1^3 \cdot (-1)^3 + \dots + 1^{2021} \cdot (-1)^{2021}$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1$$

2021 số hạng

$$= -1$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TP Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Biết rằng với mọi $x \neq 0$ ta đều có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Với $x = 2$ ta có:

$$f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4 \quad (*)$$

Với $x = \frac{1}{2}$ ta có:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2f(2) \quad (**)$$

$$f(2) + 2\left(\frac{1}{4} - 2f(2)\right) = 4$$

Thay (**) vào (*) Ta được:

$$\Rightarrow f(2) + \frac{1}{2} - 4f(2) = 4$$

$$\Rightarrow 3f(2) = \frac{1}{2} - 4$$

$$\Rightarrow 3f(2) = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow f(2) = -\frac{7}{6}$$

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Cho đa thức $R(x) = x^2 - 2x$. Tính giá trị biểu thức:

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

Lời giải

Ta có $R(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3 - 2)} + \frac{1}{4 \cdot (4 - 2)} + \frac{1}{5 \cdot (5 - 2)} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot (2022 - 2)} + \frac{1}{2023 \cdot (2023 - 2)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3.1} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{5.3} + \dots + \frac{1}{2022.2020} + \frac{1}{2023.2021} + \frac{1}{2.2023} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2021.2023} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.2} + \dots + \frac{1}{2020.2022} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2021.2023} + \frac{1}{2.4} + \frac{2}{4.2} + \dots + \frac{2}{2020.2022} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3032}{2022} = \frac{758}{1011}
 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 Huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $C = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$ với $x = 100$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\
 &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 100x - x + 100 + 1 \\
 &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - \dots + x(x - 100) - (x - 100) + 1 \\
 &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 - \dots + x - 1) + 1
 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có:

$$C = (100 - 100)(100^9 - 100^8 + \dots + 100 - 1) + 1 = 1$$

Vậy $C = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 Đề chọn HSG cấp TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$.

Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Ta có:

$$Q(5) = 125a + 25b + 5c + d$$

$$Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

Lại có

$$Q(7) = 343a + 49b + 7c + d$$

$$Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$P(Q(7) - Q(2)) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$

Vì $(30a + 10115) : 5$ nên $Q(7) - Q(2) \equiv 5 \pmod{5} \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

Mà $Q(7) - Q(2) > 5$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 5. (HSG 7 Giao lưu HSG TP Chí Linh 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x^4 - 123x^3 + 123x^2 - 123x + 125$. Tính $A(122)$.

Lời giải

Khi $x = 122$ thì ta có $123 = x + 1$

Do đó $A(x) = x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + 125$

$$\begin{aligned} &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + 125 \\ &= -x + 125 \end{aligned}$$

Vậy $A(122) = -122 + 125 = 3$

Câu 6. (HSG 7 Đề HSG cấp huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x - 2023$. Tính $P(-2024)$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} P(-2024) &= (-2024)^6 + 2023 \cdot (-2024)^5 - 2023 \cdot (-2024)^4 \\ &\quad + 2023 \cdot (-2024)^3 - 2023 \cdot (-2024)^2 + 2023 \cdot (-2024) - 2023 \end{aligned}$$

$$P(-2024) = (-2024)^6 + 2023 \cdot (-2024^5 + 2024^4 - 2024^3 + 2024^2 - 2024 + 1)$$

$$P(-2024) = (-2024)^6 - 2023 \cdot (2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1)$$

Đặt $A = 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1$

$$2024 \cdot A = 2024^6 + 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024$$

$$2024A - A = 2024^6 - 1$$

$$2023A = 2024^6 - 1$$

$$A = \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

$$P(-2024) = (-2024)^6 - 2023 \cdot \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

Khi đó

$$P(-2024) = 2024^6 - 2024^6 + 1 = 1$$

$$P(-2024) = 1$$

Vậy

Câu 7. (HSG 7 Đề khảo sát HSG huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = ax^2 + bx + c$ biết $7a - b + 4c = 0$. Chứng minh $P(2).P(-1)$ không là số dương.

Lời giải

Vì $7a - b + 4c = 0 \Rightarrow b = 7a + 4c$, thay vào biểu thức $P(x)$ ta được:

$$P(x) = ax^2 + (7a + 4c)x + c$$

$$P(2) = a.2^2 + (7a + 4c).2 + c = 4a + 14a + 8c + c = 18a + 9c = 9(2a + c)$$

$$P(-1) = a.(-1)^2 + (7a + 4c).(-1) + c = a - 7a - 4c + c = -6a - 3c$$

$$= (-3).(2a + c)$$

Ta có $P(2).P(-1) = 9.(2a + c).(-3).(2a + c) = -27(2a + c)^2$

Vì $(2a + c)^2 \geq 0$ với mọi a, c nên $-27(2a + c)^2 \leq 0$.

Vậy $P(2).P(-1)$ không là số dương.

Câu 8. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2x^2 + 6x$

a) Tính các giá trị $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x$

Khi đó $f(-1) = 2(-1)^2 + 6(-1) = 2 - 6 = -4$

Tương tự: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Vậy: $f(-1) = -4$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$

Vậy:

b) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x = 0$

Hay $2x^2 + 6x = 0$

Suy ra: $2x(x + 3) = 0$. Do đó: $2x = 0$ hoặc $x + 3 = 0$

Nên $x = 0$ hoặc $x = -3$

Vậy $x = 0$; $x = -3$

Câu 9. (HSG 7 Đề khảo sát chất lượng HSG huyện Nghi Lộc 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$. Tính hiệu $P(3) - P(0)$.

Lời giải

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Vì $P(1) = 15$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Ta có $1^3 + a1^2 + b.1 + c = 15$

$$a + b + c + 1 = 15$$

$$a + b + c = 14$$

Vì $P(2) = 30$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Ta có $2^3 + a2^2 + b.2 + c = 30$

$$4a + 2b + c = 22$$

$$a + b + c + 3a + b = 22$$

Mà $a + b + c = 14$ nên

$$14 + 3a + b = 22$$

$$3a + b = 8$$

$$+) P(3) = 3^3 + 3^2a + 3b + c = 27 + 9a + 3b + c$$

$$+) P(0) = 0^3 + 0^2a + 0b + c = c$$

$$P(3) - P(0) = (27 + 9a + 3b + c) - c = 27 + 9a + 3b$$

$$= 27 + 3(3a + b) = 27 + 3.8 = 51 \quad (\text{vì } 3a + b = 8)$$

Vậy với $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$ thì $P(3) - P(0) = 51$.

Câu 10. (HSG 7 Đề Olympic thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức $M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.

Lời giải

Ta có $M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$

$$= 5x^4 + 5x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$$

$$= 5x^2(x^2 + y^2) + 4y^2(x^2 + y^2) + 5y^2$$

Thay $x^2 + y^2 = 5$ vào đa thức M ta được:

$$M = 5x^2 \cdot x + 4y^2 \cdot x + 5y^2 = 25x^2 + 25y^2 = 25(x^2 + y^2) = 25 \cdot 5 = 125$$

Vậy $M = 125$ với $x^2 + y^2 = 5$

Câu 11. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Vĩnh Lộc – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$ với $x + y = 2$.

Lời giải

Ta có $P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$

$$= x^2(x + y) - y(x + y) - 2x^2 + 3y + x + 2021$$

Thay $x + y = 2$ vào đa thức P ta được:

$$P = 2x^2 - 2y - 2x^2 + 3y + x + 2021 = y + x + 2021 = 2 + 2021 = 2023$$

Vậy $P = 2023$ với $x + y = 2$.

Câu 12. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 0, x = 1, x = -1$ lần lượt bằng 2023; 2027 và 2025. Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 2$.

Lời giải

Ta có $f(0) = c = 2023$

$$f(1) = a + b + c = 2027 \Rightarrow a + b = 2027$$

$$f(-1) = a - b + c = 2025 \Rightarrow a - b = 2025$$

$$\Rightarrow a = 2026; b = 1$$

Suy ra $f(x) = 2026x^2 + x$

Ta có $f(2) = 2026 \cdot 2^2 + 2 = 8106$

Vậy $f(2) = 8106$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 – 2023)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c là hệ số).

Biết $f(0) = 2022; f(1) = 2023; f(-1) = 2021$. Tính $f(-2022)$.

Lời giải

Xét $x = 0; f(0) = 2022 \Rightarrow c = 2022$

Xét $x = 1; f(1) = 2023 \Rightarrow a + b + c = 2023 \Rightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1; f(-1) = 2021 \Rightarrow a - b + c = 2021 \Rightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng vế (1) và (2) $\Rightarrow a = 0$

Thay $a=0$ vào (1) ta được $b=1$
 Từ đó ta tìm được $f(x) = x + 2022$ và $f(-2022) = 0$

Câu 14. (HSG 7 huyện Thường Xuân tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là hệ số biết: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$.

$$P = \frac{f(5) - f(2)}{9}$$

Tính giá trị biểu thức:

Lời giải

Do $f(x)$ là đa thức bậc hai. Gọi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Theo đề bài: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$

$$\Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + c$$

$$P = \frac{f(5) - f(2)}{9} = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + c - (2^2 - 4 \cdot 2 + c)}{9} = 1$$

Khi đó:

Câu 15. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \neq 0$

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} (2x - 5)^{2018} \neq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \neq 0$$

$$\text{Mà: } (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \neq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Thay vào ta được M ta được:

$$M = \frac{25}{4} + 11 \cdot \frac{5}{2} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$

Tính giá trị biểu thức A với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= (x^{22} - 2022x^{21}) - (x^{21} - 2022x^{20}) + \dots - (x^3 - 2022x^2) + (x^2 - 2022x) - x + 1 \\ &= x^{21}(x - 2022) - x^{20}(x - 2022) + \dots - x^2(x - 2022) + x(x - 2022) - x + 1 \\ &= (x - 2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Với $x = 2022$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 - 2022 + 1 = -2021 \end{aligned}$$

Vậy $A = -2021$ với $x = 2022$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Cho $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = 5x^2y^{2020}z^{2021}$

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$

Lời giải

a) Vì $|x - 2| \geq 0$ với x ; $|y - 1| \geq 0$ với y ; $(x + y - z - 2)^{2020} \geq 0$ với x, y, z

Do đó $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 \\ |y - 1| = 0 \\ (x + y - z - 2)^{2020} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy $A = 20$

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$

Ta có $|x - 2| = 1$ suy ra:

$$* \quad x - 2 = 1 \mid x = 3$$

$$* \quad x - 2 = -1 \vee x = 1$$

Thay $x = 1$ vào biểu thức ta được $6.1^2 + 5.1 - 2 = 9$

Thay $x = 3$ vào biểu thức ta được $6.3^2 + 5.3 - 2 = 67$

Kết luận: $x = 1$ thì giá trị biểu thức bằng 9 .

$x = 3$ thì giá trị biểu thức bằng 67 .

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + x$. Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2 + x \text{ p } f(x) = x(x+1)$

$$M = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$$

↳ $M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 47.48 + 48.49$

$$p_{3M} = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 47.48(49-46) + 48.49(50-47)$$

$$p \quad 3M = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 47.48.49 - 46.47.48 + 48.49.50 - 47.48.49$$

↳ $3M = 48.49.50$

$$\bar{M} = \frac{48.49.50}{3} = 39200$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

$$K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \frac{2022}{2023} \cdot \frac{0}{0}, \text{ biết } x - y = 0.$$

Tính giá trị của

Lời giải

$$K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \frac{2022}{2023}$$

Ta có

$$= 10(x - y) + 3x^2y(x - y) + 2021xy(y - x) + 1$$

Vì $x - y = 0$ nên $K = 0 + 1 = 1$

$$V_{\hat{a}y} \quad K = 1.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức
 $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$ tại $x = 2021$

Lời giải

Ta có: $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$

$$= x^{2021} - (2021+1)x^{2020} + (2021+1)x^{2019} - (2021+1)x^{2018} + \dots - (2021+1)x^2 + (2021+1)x + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{2021} - (x+1)x^{2020} + (x+1)x^{2019} - (x+1)x^{2018} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x + 1 \\
 &= x^{2021} - x^{2021} - x^{2020} + x^{2020} + x^{2019} - x^{2019} - x^{2018} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = x + 1
 \end{aligned}$$

Thay $x = 2021$ vào biểu thức ta được: $2021 + 1 = 2022$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Lời giải

Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Ta có $x = 2017$ nên $2018 = x + 1$; $2016 = x - 1$.

Khi đó ta có: $f(2017) = x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x$

$$\begin{aligned}
 &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Vậy $f(2017) = 0$

Câu 22. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Ta có: Do $|x-1|^3 \geq 0$; $(y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y .

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$

B $x = 1$; $y = -2$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1$; $y = -2$ là:

$$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$$

Vậy $C = 2067$

Câu 23. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $P = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$ với $x = 99$.

Lời giải

Ta có:

$$P = x^{99} - 99x^{98} - x^{98} + 99x^{97} + x^{99} - 99x^{96} - x^{96} + \dots + 99x + x - 1$$

$$P = x^{98}(x - 99) - x^{97}(x - 99) + x^{96}(x - 99) - \dots - x(x - 99) + (x - 1)$$

$$P = (x - 99)(x^{98} - x^{97} + x^{96} - \dots - x) + (x - 1)$$

Với $x = 99$, ta có:

$$P = (99 - 99)(99^{98} - 99^{97} + 99^{96} - \dots - 99) + (99 - 1) = 98$$

Vậy $P = 98$ với $x = 99$

Câu 24. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^2 \cdot (b + c) = b^2 \cdot (a + c) = 2023$

Tính giá trị biểu thức: $H = c^2 \cdot (a + b)$

Lời giải

Từ $a^2 \cdot (b + c) = b^2 \cdot (a + c) = 2023$ và $\frac{a}{ab + bc} = \frac{b}{ab + ac} = \frac{a - b}{-c(a - b)} = \frac{1}{-c}$ vì $a \neq b$

$$\Rightarrow ab + bc = -ac \Rightarrow b(a + c) = -ac \Rightarrow b^2(a + c) = -abc \quad (1)$$

$$\Rightarrow ac + bc = -ab \Rightarrow c(a + b) = -ab \Rightarrow c^2(a + b) = -abc \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow c^2(a + b) = c^2(a + c)$$

$$\text{Mà } b^2(a + c) = 2023 \Rightarrow H = c^2(a + b) = 2023$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2022} + b^{2023}$

Lời giải

Ta có: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101}) \cdot (a + b) - ab \cdot (a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b (1)

$$\text{Mà } a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 1 = (a + b) - ab \Rightarrow (a - 1) \cdot (b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + b^{100} = 1 + b^{101} = 1 + b^{102} \\ 1 + a^{100} = 1 + a^{101} = 1 + a^{102} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } P = a^{2022} + b^{2023} = 1^{2022} + 1^{2023} = 2$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $M = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$

Tính giá trị biểu thức M với $x = 2022$

Lời giải

Ta có: $M = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$

$$= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1$$

$$= x^{21}(x - 2022) - x^{20}(x - 2022) + \dots - x^2(x - 2022) + x(x - 2022) - x + 1$$

$$= (x - 2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1$$

Với $x = 2022$

$$M = (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0 - 2022 + 1 = -2021$$

Vậy $M = -2021$ với $x = 2022$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số $x; y$ thỏa mãn $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = 402x^2y + 284xy^2$

Lời giải

Vì $(x - 3)^4 \geq 0$; $(2y - 1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$

Nên $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$.

Mà theo đề bài: $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} = 0$

Hay: $(x - 3)^4 = 0$ và $(2y - 1)^{2020} = 0$

$x = 3, y = \frac{1}{2}$
suy ra

Khi đó tính được: $M = 2022$

Câu 28. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = (x - 3)^{2019} + (x - y - 1)^{2020} + 2021$ biết rằng $x; y$ thỏa mãn đẳng thức $(x - 2)^2 + 4y^2 + \sqrt{(x + 2y - 6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

Ta có: $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - 2)^2 + 4y^2 + \sqrt{(x + 2y - 6)^2 + 9} \geq 4^2 = 16$ (1)

Ta có: $(x + 2y - 6)^2 \geq 0$ với mọi $x; y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{(x + 2y - 6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(x - 2)^2 + 4y^2 + \sqrt{(x + 2y - 6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$

Vậy biểu thức $\sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$ khi $(x-2)^2 = 0$ và $(x+2y-6)^2 = 0$

Suy ra $x = 2$ và $y = 2$

Thay $x = 2; y = 2$ vào biểu thức A đã cho ta được:

$$A = (2-3)^{2019} + (2-2-1)^{2020} + 2021 = (-1)^{2019} + (-1)^{2020} + 2021 = -1 + 1 + 2021 = 2021$$

Vậy $A = 2021$

Câu 29. (HSG 7 huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho hai số x, y thỏa mãn: $(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \neq 0$. Tính giá trị của M biết rằng:

$$2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$$

Lời giải

Ta có: $(2x-1)^{2022} \neq 0$ và $(3y+6)^{2022} \neq 0$ nên

$(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \neq 0$ khi và chỉ khi $(2x-1)^{2022} = 0$ và $(3y+6)^{2022} = 0$

$(2x-1)^{2022} = 0$ khi $2x-1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$

$(3y+6)^{2022} = 0$ khi $3y+6 = 0$ hay $y = -2$

Mặt khác: $2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$2M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \times \frac{1}{2} \times (-2) - (-2)^2 = -\frac{59}{4}$$

$$M = -\frac{59}{8}$$

Như vậy:

Câu 30. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x-5)^{2020} + (3y+4)^{2022} \neq 0$

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có: $(2x-5)^{2020} \geq 0$ và $(3y+4)^{2022} \geq 0$ nên
 $(2x-5)^{2020} + (3y+4)^{2022} \leq 0$ khi và chỉ khi $(2x-5)^{2020} = 0$ và $(3y+4)^{2022} = 0$
 $(2x-5)^{2020} = 0$ khi $2x-5=0$. Suy ra $x = \frac{5}{2}$
 $(3y+4)^{2022} = 0$ khi $3y+4=0$. Suy ra $y = -\frac{4}{3}$.

Thay vào biểu thức M ta được:

$$M = \frac{25}{4} + 11 \cdot \frac{5}{2} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022)

Cho đa thức: $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

- a) Xác định bậc của A .
 b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

a) Ta có:
 $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$
 $= 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - 4xy^2z + 10x^2yz - 3x^4y^3z^2 - 2008xyz^2 - 8x^4y^3z^2$
 $= 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2$

↳ A có bậc 4.

b) Ta có: $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$

Vì $15x - 2y = 1004z$ nên $15x - 2y - 1004z = 0$

Vậy $A = 0$.

Câu 32. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $f(-1)$ biết: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $f(2) = 36$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c$ nên $f(2) = 4a + 2b + c$

Mà $f(2) = 36$ suy ra $4a + 2b + c = 36$. (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{4a}{8} = \frac{2b}{6} = \frac{c}{4} = \frac{4a + 2b + c}{8 + 6 + 4} = \frac{36}{18} = 2$$

Suy ra: $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$.

Do đó: $f(x) = ax^2 + bx + c = 4x^2 + 6x + 8$

Khi đó: $f(-1) = 4 - 6 + 8 = 6$

Câu 33. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.

Chứng minh rằng tích $f(1) \cdot f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Nên $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$

Khi đó: $f(1) - f(-2) = (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c$
 $= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0$ (do $b = 3a + c$).

Suy ra $f(1) = f(-2)$

Suy ra $f(1) \cdot f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

$$P(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2$$

Cho đa thức:

Chứng minh rằng: $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số x nguyên.

Lời giải

$$P(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2$$

Ta có:

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) = \frac{1}{2}x \cdot x(x-1)$$

Vì $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên $x(x-1)$ chia hết cho 2.

Vậy $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Câu 35. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên).

Biết $7a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

Suy ra: $f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ và $f(-2) = -8a + 4b - 2c + d$

Suy ra: $f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0$ (vì $7a + b + c = 0$).

Như vậy $f(3) = f(-2)$. Do đó $f(3) \times f(-2) = f(3)^2$

Mà $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(3)^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \times f(-2)$ là số chính phương.

Câu 36. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 61a + 9b + c$

Vì $f(5) - f(4) = 2022$ nên $61a + 9b + c = 2022$

Lại có: $f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$
 $= 305a + 45b + 5c + 30c = 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2022 + 30a = 10(1011 + 3a)$

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) \geq 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$

Suy ra: $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 37. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Tính giá trị của đa thức: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với $x + y = 2$

Lời giải

Ta có: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$

Vì $x + y = 2$ nên: $P(x) = x^2 \cdot 0 - x \cdot 0 + 2 + 2017 = 2019$

Câu 38. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + mx - 1$, $g(x) = x^2 + (m+1)x + 2$. Tìm giá trị m biết $f(1) = g(-1)$

Lời giải

Ta có: $f(1) = g(-1)$ nên

$$1^2 + m \cdot 1 - 1 = (-1)^2 + (m+1) \cdot (-1) + 2$$

$$m = -m + 2$$

$$\Rightarrow m = 1$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6 \quad \text{và} \quad Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x$$

Tính $M(x) = P(x) - Q(x)$

Tính giá trị của đa thức $M(x)$ khi $|x+2| = 3$

Lời giải

$$\begin{aligned} M(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 9x - 8) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Khi $|x+2| = 3$ suy ra $x+2 = 3$ hoặc $x+2 = -3$. Hay $x = 1$ hoặc $x = -5$.

Với $x = 1$ ta có $M(x) = x^2 + 2x + 2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 5$

Với $x = -5$ ta có $M(x) = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 2 = 17$

Câu 40. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x . Tính $f(1)$

Lời giải

Xét đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x .

Khi $x = 1$, ta có: $f(1) + 1 \cdot f(-1) = 1 + 1$ hay $f(1) + f(-1) = 2$ (1)

Khi $x = -1$, ta có: $f(-1) + (-1) \cdot f(1) = -1 + 1$ hay $f(-1) - f(1) = 0$ (2)

Lấy (1) trừ (2) vế với vế, ta được: $2f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$

Vậy $f(1) = 1$

Câu 41. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$

Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Xét đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $f(5) - f(4) = (a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d) - (a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d)$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$$

$$\text{Mà } f(5) - f(4) = 2022$$

$$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022 \quad (1)$$

Lại có: $f(7) - f(2) = (a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d) - (a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d)$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 335a + 45b + 5c$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(7) - f(2) = 5 \cdot (6a + 2022)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 42. (HSG 7 thị xã Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại x, y thỏa mãn: $|x - 1| + (y + 2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x - 1| \geq 0; (y + 2)^{20} \geq 0$ nên $|x - 1| + (y + 2)^{20} = 0$ với mọi x, y

Kết hợp $|x - 1| + (y + 2)^{20} = 0$ suy ra $\begin{cases} |x - 1| = 0 \\ (y + 2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại $x = 1; y = -2$ là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 1980 = 2022$$

Vậy $C = 2022$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ và

$a \neq 0$. Tính $\frac{P(-2) - 3P(1)}{a}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Đ} \quad \frac{P(-2) - 3P(1)}{a} &= \frac{4a - 2b + c - 3(a + b + c)}{a} = \frac{a - 5b - 2c}{a} \\ &= \frac{a - 5 \cdot 2a - 2 \cdot 3a}{a} = \frac{-15a}{a} = -15 \end{aligned}$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Cho hàm số $y = f(x) = (m+1)x$ với $m^1 - 1$

a) Với $m = 2$. Hãy tính $f(2022)$.

b) Tìm giá trị của m để $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ với x_1, x_2 là các số thực khác 0 .

Lời giải

a) Với $m = 2$ thỏa mãn $m^1 - 1$ Đ $f(x) = 3x$

Ta có $f(2022) = 3 \cdot 2022 = 6066$

Vậy với $m = 2$ thì $f(2022) = 6066$

b) Ta có $f(x_1) = (m+1)x_1$, $f(x_2) = (m+1)x_2$

$$\text{Đ} \quad f(x_1) \cdot f(x_2) = (m+1)^2 x_1 x_2$$

$$\text{Mà} \quad f(x_1 \cdot x_2) = (m+1)x_1 x_2$$

$$\text{Để} \quad f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \text{ Đ} \quad (m+1)^2 x_1 x_2 = (m+1)x_1 x_2$$

Do x_1, x_2 là các số thực khác 0 , $m^1 - 1$

$$\text{Đ} \quad m+1=1 \text{ Đ} \quad m=0 \text{ (thỏa mãn } m^1 - 1)$$

Vậy để $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ thì $m=0$.

Câu 45. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018 - 2019)

Cho đa thức: $f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

$$f(x) = x^{17} - 1999x^{16} - x^{16} + 1995x^{15} + x^{15} - 1999x^{14} - x^{14} + \dots + 1999x + x - 1$$

$$\begin{aligned} f(1999) &= 1999^{17} - 1999^{17} - 1999^{16} + 1999^{16} + 1999^{15} - 1999^{15} + \dots + 1999^2 + 1999 - 1 \\ &= 1999 - 1 = 1998 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức là $f(1999) = 1998$

Câu 46. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = x^{14} - 14x^{13} + 14x^{12} - \dots + 13x^2 - 14x + 14$. Tính $f(13)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{14} - (13+1)x^{13} + (13+1)x^{12} - \dots + (13+1)x^2 - (13+1)x + (13+1) \\ &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \quad (\text{Vì thay } 14 = 13 + 1 = x + 1). \\ f(13) &= 1. \end{aligned}$$

Vậy

Câu 47. (HSG 7 trường THCS Trần Thiện 2018 - 2019)

Tính giá trị các biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2a^2 - 4|a| + 3a - 1 \quad \text{lần lượt tại } a = \frac{2}{3}; a = -2. \\ \text{b) } B &= 2x^2 - 3xy - 6y^2 \quad \text{tại } |x| = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a) Với } a = \frac{2}{3} \text{ thì } A = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 4 \left| \frac{2}{3} \right| + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow A = -\frac{7}{9}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{7}{9} \text{ tại } a = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Với } a = -2 \text{ thì } A = 2(-2)^2 - 4| -2 | + 3(-2) - 1 \Rightarrow A = -7$$

$$\text{Vậy } A = -7 \text{ tại } a = -2.$$

$$\text{a) TH1: } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{2}{3} \text{ thì } B = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 6 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \Rightarrow B = -\frac{19}{6}$$

$$\text{Vậy } B = -\frac{19}{6} \text{ tại } x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}.$$

$$\text{TH2: } x = -\frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{2}{3} \text{ thì } B = 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} - 6 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$$

$$\text{Vậy } B = -\frac{7}{6} \text{ tại } x = -\frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}.$$

Câu 48. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

$$\text{Cho } f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}); g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$\text{a) Tính } k(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{b) Tính giá trị của } k(x) \text{ tại } x = \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45} - \frac{5}{6}$$

$$\text{c) Chứng minh rằng: đa thức } k(x) \text{ không nhận giá trị } 2019 \text{ với mọi giá trị của } x \text{ nguyên ?}$$

Lời giải

a) $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}) + x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$k(x) = x^4 + 2x^2 + 9$$

b) Xét $2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$

$$= 2 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$$

$$= 2 - \frac{2+3}{6} + \frac{3+4}{12} - \frac{4+5}{20} + \frac{5+6}{30} - \frac{6+7}{42} + \frac{7+8}{56} - \frac{8+9}{72} + \frac{9+10}{90}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$= 2 - \frac{1}{10} = 1\frac{9}{10}$$

Khi đó $x = \frac{6}{5}$ nên $k(1) = (1)^4 + 2(1)^2 + 9 = 12$

b) Xét $k(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = x^2(x^2 + 2) + 9$

Giả sử $k(x) = 2019 \Rightarrow x^2(x^2 + 2) = 2010$

Vì x nguyên nên 2010 chẵn và $x^2; x^2 + 2$ cùng tính chẵn (hoặc lẻ) $\Rightarrow x^2; x^2 + 2$ là hai số chẵn liên tiếp nên $x^2(x^2 + 2) : 4$, còn 2010 không chia hết cho 4 .

Vậy giả sử là sai hay $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi x nguyên.

Câu 49. (HSG 7 huyện Rạch Giá 20198 - 2019)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$

1) Tính $f(5)$

2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải

1) Ta có: $x = 3$ nên $3.f(3+2) = (3^2 - 9)f(3) \Rightarrow f(5) = 0$

2) Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 50. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$.

Tìm x để $A = 2019$.

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

Vậy $x = 2$ thì $A = 2019$.

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $A = 2019$ thì $x \in \{0; 2\}$.

Câu 51. (HSG 7 trường THCS Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) $A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$
 $= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0$ (vì có 50 số 1 và 50 số -1)

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$

$$\Leftrightarrow 2A = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 2A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\text{Đ } 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\text{Đ } A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$. Tìm x để $A = 2019$

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \text{ Đ } x^2 - 2x + 2019 = 2019 \text{ Đ } x^2 - 2x = 0 \text{ Đ } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 53. (HSG 7 2018-2019)

a) Cho hai đa thức:

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x \quad g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

b) Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$

Lời giải

$$\text{a) } f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \quad (50 \text{ số hạng}).$$

Câu 54. (HSG 7 Huyện Thăng Bình 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403)$

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

b) Tìm x để $A = 2015$.

Lời giải

a) Ta có $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403) = x^2 - 4x + 2015$

Với $x = 4$ ta được $A = 2015$.

b) $A = 2015$

Suy ra

$$x^2 - 4x + 2015 = 2015$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy khi $x \in \{0; 4\}$ thì $A = 2015$.

Câu 55. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2018-2019)

Tính giá trị biểu thức: $C = x^{15} - 2019x^{14} + 2019x^{13} - 2019x^{12} + \dots + 2019x - 1$ với $x = 2018$

Lời giải

Ta có: $2019 = 2018 + 1 = x + 1$

Do đó:
$$C = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots + (x+1)x - 1$$

$$= x - 1 = 2018 - 1 = 2017$$

Vậy $C = 2017$

Câu 56. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018-2019)

Cho $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2016} = 0$. Tính giá trị của $A = 5x^2y^{2016}z^{2017}$

Lời giải

Vì $|x-2| \geq 0$; $|y-1| \geq 0$; $(x+y-z-2)^{2016} \geq 0$ với x, y, z

Do đó $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2016} = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |x-2| = 0 \\ |y-1| = 0 \\ (x+y-z-2)^{2016} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2 = 0 \\ y-1 = 0 \\ x+y-z-2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2016} \cdot 1^{2017} = 20$

Vậy $A = 20$.

Câu 57. (HSG 7 trường THCS Thanh Mai 2018-2019)

Tính giá trị các biểu thức: $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $|x| = \frac{1}{2}$ suy ra $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

Do đó:

$$* \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{2}{3} \text{ } \mathbf{P} \text{ } B = -\frac{19}{6}$$

$$* \text{ Với } x = -\frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{2}{3} \text{ } \mathbf{P} \text{ } B = -\frac{7}{6}$$

Câu 58. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019)

Cho đa thức $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Biết rằng $f(1) = f(-1); f(2) = f(-2)$. Chứng minh $f(x) = f(-x)$ với mọi x

Lời giải

$$f(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0; f(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\text{Do } f(1) = f(-1) \text{ nên } a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\mathbf{P} \text{ } a_3 + a_1 = -a_3 - a_1$$

$$\mathbf{P} \text{ } a_3 + a_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$$

$$f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

$$\text{Vì } f(2) = f(-2) \text{ nên } 4a_3 + a_1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \mathbf{P} \text{ } a_1 = a_3 = 0$$

$$\text{Vậy } f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

$$f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(x)^2 + a_0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Vậy } f(x) = f(-x) \text{ với mọi } x$$

Câu 59. (HSG 7 Huyện Kim Thành 2018-2019)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$.

$$\text{Mà đa thức } f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$$

$$\text{Có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2017} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0.

Câu 60. (HSG 7 huyện Đà Nẵng, trường THCS Nguyễn Khuyến 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$. Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 3 \quad (1)$

$$P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

$$= (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $P = 9x + 3 - 9x + 1 = 4$

Vậy $P = 4$.

Câu 61. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2 - x^2$. Hãy tính $f(0); f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

$$f(0) = 2 - 0^2 = 2;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

Câu 62. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$.

Lời giải

$$A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \quad (\text{có } 50 \text{ số hạng})$$

Câu 63. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức là

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 2A = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 2A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy

Câu 64. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ và $f(2) = 10$. Tính $f(32)$

Lời giải

Vì $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ nên:

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 10 \cdot 10 = 100$$

$$f(16) = f(4 \cdot 4) = f(4) \cdot f(4) = 100 \cdot 100 = 10000$$

$$f(32) = f(16 \cdot 2) = f(16) \cdot f(2) = 10000 \cdot 10 = 100000$$

$$f(32) = 100000$$

Vậy

65. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023)

Câu

Cho biểu thức: $M = a + 2ab - b$. Tính giá trị của M với $|a| = 1,5$; $b = -0,75$

Lời giải

Ta có: $|a| = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} a = 1,5 \\ a = -1,5 \end{cases}$

Với $a = 1,5$; $b = -0,75 \Rightarrow M = a + 2ab - b = 1,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-0,75) = 0$

Với $a = -1,5$; $b = -0,75 \Rightarrow M = a + 2ab - b = \frac{3}{2}$

Câu 66. (HSG 7 huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x| = 1,5$; $y = -0,75$

Lời giải

Ta có: $|x| = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1,5 \end{cases}$

+) Với $x = 1,5$; $y = -0,75$ ta có:

$$P = 1,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-0,75) - 0,75$$

$$= 1,5 \cdot (1 + 3) - 0,75 = 5,25$$

+) Với $x = -1,5$; $y = -0,75$ ta có:

$$P = -1,5 - 4(1,5) \cdot (-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 67. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101 \\ &= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) \dots - x^2(x - 100) + x(x - 100) - x + 101 \\ &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= (100 - 100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 \cdot (100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 - 100 + 101 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$

Câu 68. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $B(x)$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ 2B &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ 2B &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ 2B &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2B &= B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow B &= 2 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

$$B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy

Câu 69. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c .

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012$, $f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm.

Lời giải

a) Vì $f(0) = 0$ nên $c = 0$;

$f(1) = 2013$ nên $a + b + c = 2013$

$f(-1) = 2012$ nên $a - b + c = 2012$

$$a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$$

Khi đó:

b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0$ $\Rightarrow a = 4, b = 4$

Như vậy $f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x - 1)^2 + 2011 > 0(\forall x)$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Câu 70. (HSG 7 huyện Bồ Trách 2017 - 2018)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$; $f(-0,5)$

b) Chứng minh: $f(-a) = -f(a)$

Lời giải

a) $f(0) = -4 \cdot 0^3 + 0 = 0$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$$

b) $f(-a) = -4(-a)^3 - a = 4a^3 - a$

$$-f(a) = -(-4a^3 + a) = 4a^3 - a$$

Khi đó $f(-a) = -f(a)$

Câu 71. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Tính giá trị đa thức sau:

a) $B = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}$;

b) $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \frac{2015}{2016}$, biết $x - y = 0$.

Lời giải

$$|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Vì

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \frac{1}{2^2} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

Với

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \frac{1}{2^2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$$

Với

Vậy $B = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$

$B = 7$ khi $x = -\frac{1}{2}$

b) $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \frac{2015}{2016}$

b)

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \quad (\text{do } x - y = 0).$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho đa thức $f(x) = x^{2015} - 2000x^{2014} + 2000x^{2013} - 2000x^{2012} + \dots + 2000x - 1$.

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

Ta có

$$f(x) = x^{2015} - (1999 + 1)x^{2014} + (1999 + 1)x^{2013} - (1999 + 1)x^{2012} + \dots + (1999 + 1)x - 1$$

Thay $1999 = x$ vào đa thức, ta được

$$f(x) = x^{2015} - (x + 1)x^{2014} + (x + 1)x^{2013} - (x + 1)x^{2012} + (x + 1)x^{2011} - (x + 1)x^{2010} + \dots - (x + 1)x^2 + x - 1$$

$$f(x) = x^{2015} - x^{2015} - x^{2014} + x^{2014} - x^{2013} + x^{2013} - x^{2012} + x^{2012} - \dots + x^2 - x^2 + x - 1$$

$$= x - 1$$

Suy ra $f(1999) = 1999 - 1 = 1998$.

Câu 73. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết: $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$

$$\text{Đ } f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 1 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 1$$

$$\text{Đ } f(x) + f(-x) = 2 \text{ Đ } f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\text{Đ } f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$.

Câu 74. (HSG 7 cấp trường 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Biết rằng với mọi x ta đều có $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Vì với mọi x ta đều có $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ nên thay $x = 2, x = \frac{1}{2}$ vào $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ ta được:

$$\begin{aligned} & f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ +) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4} \\ +) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4} \text{ Đ } 9.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \text{Vi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 8.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) - 3.f\left(\frac{1}{2}\right) - 3.f(2) = \frac{3}{4} - 4 \\ \text{C} \end{aligned}$$

$$\text{Đ } 8.f(2) = -\frac{13}{4} \text{ Đ } f(2) = -\frac{13}{32}$$

$$\text{Đ } f(2) = -\frac{13}{32}$$

Vậy

Câu 75. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $|x| = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

$$+ \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$+ \text{ Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 3$$

$$\text{Vậy } A = 0 \text{ hoặc } A = 3 \text{ khi } |x| = \frac{1}{2}$$

Câu 76. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 thỏa mãn điều kiện: $P(1) = 3$; $P(3) = 11$; $P(5) = 27$. Tính $P(-2) + 7P(6)$.

Lời giải

Xét đa thức $f(x) = x^2 + 2$ thỏa mãn $f(1) = 3$; $f(3) = 11$; $f(5) = 27$.

Đặt $Q(x) = P(x) - f(x)$, khi đó $Q(x) = P(x) - (x^2 + 2)$

$$\text{T}^a \text{ có: } Q(1) = P(1) - (1^2 + 2) = 3 - 3 = 0$$

$$Q(3) = P(3) - (3^2 + 2) = 11 - 11 = 0$$

$$Q(5) = P(5) - (5^2 + 2) = 27 - 27 = 0$$

Suy ra $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$ là các nghiệm của đa thức $Q(x)$, do đó :

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - m)$$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - m) + x^2 + 2$$

$$\text{Khi đó } P(-2) = (-2 - 1)(-2 - 3)(-2 - 5)(-2 - m) + (-2)^2 + 2 = 216 + m$$

$$P(6) = (6 - 1)(6 - 3)(6 - 5)(6 - m) + 6^2 + 2 = 128 - 15m$$

$$\text{Vậy } P(-2) + 7P(6) = 216 + 105m + 7(128 - 15m) = 1112$$

Câu 77. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$. Tính $f(2023)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$$

$$\text{Với } x = 2023 \text{ thì } x - 2023 = 0, x + 1 = 2024 \text{ và } x - 1 = 2022$$

$$f(x) = x^5 - (x + 1)x^4 + (x - 1)x^3 + (x + 1)x^2 - (x - 1)x - 2023$$

$$f(x) = x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - 2023$$

$$f(x) = x - 2023$$

$$f(2023) = 2023 - 2023 = 0$$

$$\text{Vậy } f(2023) = 0$$

Câu 78. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

Cho $x - y = -3$. Hãy tính giá trị của biểu thức:
 $P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$

Lời giải

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

$$P = (x^3 - xy + x) - (x^2y - y^2 + y) + (3x^2 - 3y + 3) + 2020$$

$$P = x.(x^2 - y + 1) - y.(x^2 - y + 1) + 3.(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (x - y + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (-3 + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = 2020$$

Câu 79. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn
 $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$

Lời giải

Ta có $|x+1| \geq 0; (y+2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$ khi $|x+1| = 0$ hoặc $(y+2)^{2024} = 0$

Suy ra $x = -1; y = -2$

$$\text{Vậy } C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2.(-1)^5 - 5.(-2)^3 + 2023 = 1981$$

Câu 80. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ và $B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$

Tìm đa thức P thỏa mãn $P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$ và tính $P(0), P(-2)$

Lời giải

$$P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 &= 2A - \{A - [A - A + B] + 2B\} \\
 &= 2A - \{A - B + 2B\} \\
 &= 2A - \{A + B\} \\
 &= 2A - A - B \\
 &= A - B
 \end{aligned}$$

Thay $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$; $B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - (x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1) \\
 &= x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - x^4 + x^3 + x^2 + 7x + 1 \\
 &= -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x
 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$P(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$P(2) = -2^4 + 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 62$$

Câu 81. (HSG 7 Đề mĩi nhõn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023$.

Tính $f(-2024)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023 \\
 &= x^6 + 2024x^5 - x^5 - 2024x^4 + x^4 + 2024x^3 - x^3 - 2024x^2 + x^2 + 2024x - x + 2023 \\
 &= x^5(x + 2024) - x^4(x + 2024) + x^3(x + 2024) - x^2(x + 2024) + x(x + 2024) - x + 2023
 \end{aligned}$$

Do đó $f(-2024) = 2024 + 2023 = 4047$

Câu 82. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

a) Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

b) Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$.

Lời giải

a) Ta có $P(1) = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 1 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ nghiệm của đa thức P . (đpcm)

b) Rút được $x^2 + x = 3$

$$\begin{aligned}
 P &= (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1 \\
 &= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1 \\
 &= 9x + 3 - 9x + 1 = 4
 \end{aligned}$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường năm 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức sau:

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \frac{2015}{2016}, \text{ biết } x - y = 0$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} C &= 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \frac{2015}{2016} \\ &= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \quad (\text{Vì } x - y = 0). \end{aligned}$$

Câu 84. (HSG 7 Đề giao lưu 2017 - 2018)

Cho x là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$; $-1 \leq z \leq 1$.
 Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong 3 số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.

Giả sử $x, y \geq 0 \geq z - x - y \leq 0$

Vì $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$-1 \leq z \leq 1, z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$.

Câu 85. (HSG 7 tỉnh Đà Nẵng, trường Nguyễn Khuyến năm 2016 - 2017)

a) Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải:

a) $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi:

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

$$b) g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có: $(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$

$$\text{Min}_{g(x)} = 9 \hat{=} 4x^2 - 9 = 0 \hat{=} x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c hệ số)

Biết rằng : $f(0) = 2018$, $f(1) = 2019$, $f(-1) = 2017$. Tính $f(-2019)$

Lời giải

Xét $x = 0$: $f(0) = 2018 \Rightarrow c = 2018$

Xét $x = 1$: $f(1) = 2019 \Rightarrow a + b + c = 2019 \Rightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1$: $f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng (1) và (2) về theo về $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$

Từ đó tìm được $f(x) = x + 2018$

Suy ra $f(-2019) = -1$. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>