ĐỀ SỐ 11

UBND HUYỆN MỘC CHÂU – SƠN LA

THCS TÂY TIẾN _ HSG TOÁN 9 2023-2024

Bài 1. (5 điểm)

1, Cho biểu thức $P=\frac{x}{x-\sqrt{x}}+\frac{2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a, Rút gọn P.

b, Tính P khi x = $3+2\sqrt{2}$.

c, Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2, Cho hàm số y =mx – 2m -1 (m khác 0)

a, Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

b, Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Xác định m để diện tích tam giác AOB bằng 4 (đvdt).

Bài 2. (3 điểm)

a, Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$

b, Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+12$ là số chính phương.

Bài 3. (4 điểm)

a, Giải phương trình $x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$.

b, Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{6} \\ x^3+y^3+z^3=3xyz \end{cases}(x,y\in R)$

Cho AB là đường kính của đường tròn (0;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (0;R) tại M.

a, Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b, Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O;R)

c, Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 5. (2 điểm)

Cho x, y, z >0 thỏa mãn x + y + z = 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (5.0 điểm)

1.a, với x > 0; x # 1, ta có:

$$P=\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}+\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

¿ $\frac{x(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-1)+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$

¿ $\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

1.b, $x=3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2}=\sqrt{2}+1$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})$$

1.c, ĐK: x > 0; x # 1:

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. Ư(2) = $\{-1;1;-2;2\}$

Nếu $\sqrt{x}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (TM)

Nếu $\sqrt{x}-1=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (KTM)

Nếu $\sqrt{x}-1=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-1$ (vô lí)

Vậy với x = 4 hoặc x = 9 thì P nhận giá trị nguyên

2.a, Giả sử đồ thị hàm số đi qua điểm M(x_0, y_0) với mọi m. Ta có: $y_0=mx_0-2m-1$ với mọi m $\Leftrightarrow mx_0-2m-1-y_0=0$ với mọi m

$\Leftrightarrow m(x_0-2)-(y_0+1)=0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2=0 \\ y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm cố định M(2;-1)

2.b, Đồ thị hàm số cắt hai trục Ox và Oy khi m # 0 và 2m -1 # 0 hay m #0 và m #$\frac{-1}{2}$

A là giao điểm của đồ thị với trục Ox ta có y = 0 thay vào hàm số ta được $\frac{2m+1}{m}$

B là giao điểm của đồ thị với trục Oy ta có x = 0 thay vào hàm số ta được y = -2m -1

Vậy $A\left(\frac{2m+1}{m};0\right);B(0;-2m-1)$

Diện tích tam giác là:

$S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{2m+1}{m}\right|.|-2m-1|=\frac{(2m+1)^2}{2|m|}$

Mà S = 4 $\Leftrightarrow (2m+1)^2=8|m|$

Nếu m < 0, ta có phương trình: $4m^2+4m+1=-8m$

$\Leftrightarrow 4m^2+12m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}(TM) \\ m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}(TM) \end{array}\right.$

Vậy $m\in\left\{\frac{1}{2};\frac{-3+2\sqrt{2}}{2};\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Bài 2. (3 điểm)

a, $y^2+2xy-3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=(x+1)(x+2)$ (*)

VT của (*) là số chính phương; VP của (*0 là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=1 \\ x=-2\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 cặp số nguyên (x;y) = (-1;1) hoặc (x;y) = (-2;2) thỏa mãn

b, vì $n^2+2n+12$ là số chính phương nên đặt $n^2+2n+12=k^2$ (k $\in N$)

$\Rightarrow (n^2+2n+1)+11 \Leftrightarrow k^2 \Leftrightarrow k^2-(n+1)^2=11$

$\Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=11$

Nhận thấy k + n + 1 > k – n – 1 và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết (k + n +1) (k – n – 1) = 11.1

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k+n+1=11 \\ k-n-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=6 \\ n=4(TM) \end{array}\right.$

Vậy với n = 4 thì vì $n^2+2n+12$ là số chính phương

Bài 3. (4 điểm)

a, Giải phương trình: $x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$

ĐK: x $\geq \frac{2023}{2024}$

$x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+2024x-2023-2\sqrt{2024x-2023}+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{2024x-2023}-1\right)^2=0$

Do $(x-1)^2 \geq 0$ *và* $\left(\sqrt{2024x-2023}-1\right)^2 \geq 0$ với mọi : x $\geq \frac{2023}{2024}$ nên:

$\begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2024x-2023}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{2024x-2023}=1 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ 2024z=2023=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$(thỏa mãn điều kiện).

Vậy x =1 là nghiệm của phương trình đã cho.

b, $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{6}\,(1) \\ x^3+y^3+z^3=3xyz\,(2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (x^3+y^3)+z^3-3xyz=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz=0$

$\Leftrightarrow \left[(x+y)^3+z^3\right]-3x^2y-3xy^2-3xyz=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y).z+z^2\right]-\left(3x^2y+3xy^2+3xyz\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy(x+y+z)=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left((x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^3-3xy\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=0\,(3)$

Kết hợp (3) với (1): $x+y+z=\sqrt{6}$, ta có:

$\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0$

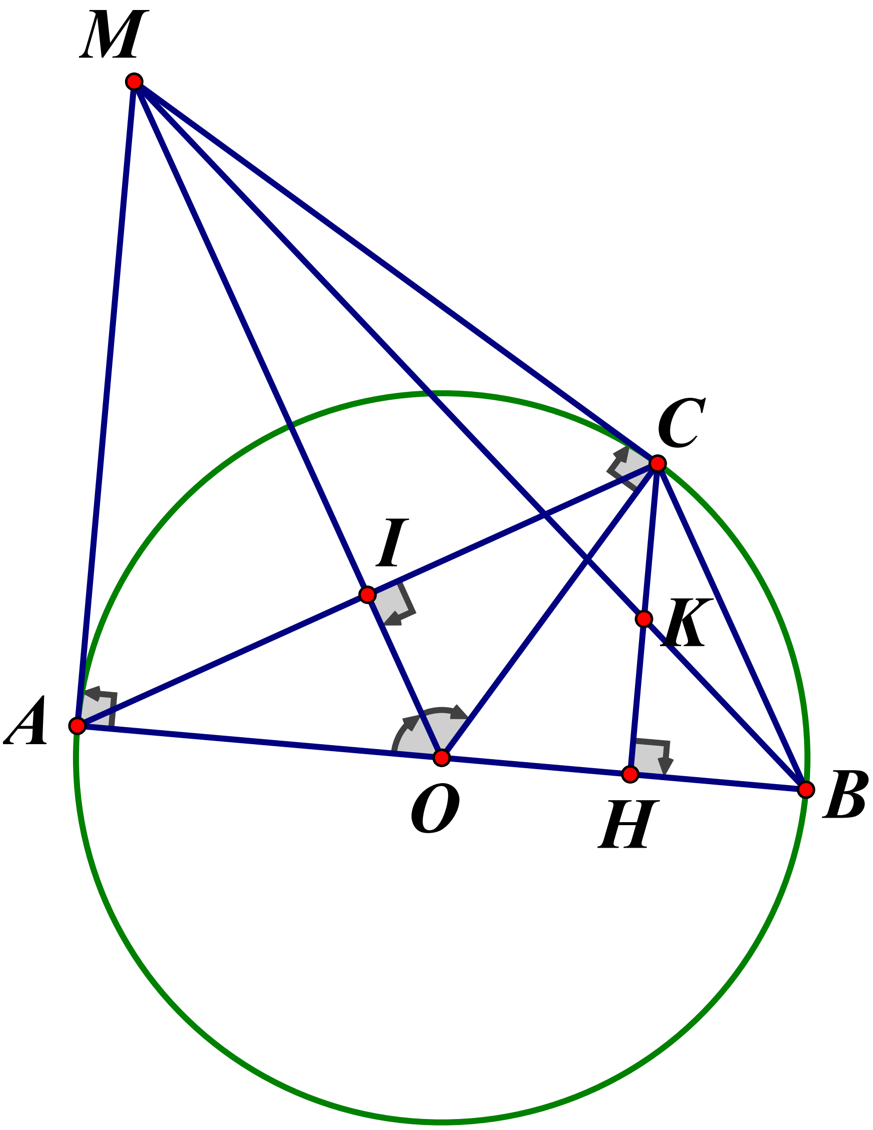
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ (y-z)^2=0 \\ (z-x)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z\,(4)$

Kết hợp (4) và (1): $x+y+z=\sqrt{6}$, ta có: $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3})$.

Bài 4. (6 điểm)



a, Ta có OI vuông góc vơi AC (đường kính đi qua trung điểm của dây cung), CH vuông góc với AB (gt). Suy ra: $\widehat{CIO}=\widehat{CHO}=90°$. Vậy tứ giác CIOH là tứ giác nội tiếp, suy ra C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b, Xét tam giác AOM và tam giác COM có: OA = OC = R

OM là cạnh chung

$\widehat{AOM}=\widehat{COM}$ (vì tam giác OCM cân tại O nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường phân giác)

$\Rightarrow \Delta AOM = \Delta COM\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90°$

$\Rightarrow MC \perp CO \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O;R).

c, Chi vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$

Ta lại có:

$(AC - CB)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + CB^2 \geq 2AC.CB \Rightarrow 2AC^2 + 2CB^2 \geq AC^2 + 2CB^2 + 2AC.CB$

$2(AC^2 + CB^2) \geq (AC + CB)^2 \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2(AC + CB)^2} \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2}$

(pitago) $\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2.4R^2} \Rightarrow AC + CB \leq 2R\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi AC = CB $\Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $P_{ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$, dấu "=" xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AB.

Vậy max $P_{ACB} = 2R(1 + \text{¿}\ \sqrt{2})$ khi C là điểm chính giữa cung AB.

Bài 5. (2 điểm)

Vì x, y, z > 0 ta có:

Áp dụng BĐT coossi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ *và* $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}} = 2.\frac{x}{2} = x\,(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y\,(2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z\,(3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được:

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) + \frac{x+y+z}{2} \geq x + y + z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq x + y + z - \frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq (x + y + z) - \frac{x+y+z}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$

Dấu"=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

Vậy GTNN của P là 1 $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$.