MỤC LỤC

…ꕤ*ꕤ…

PHẦN I

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

…≺❃≻…

I.PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cơ sở của phương pháp là biến đổi sơ cấp các phương trình lượng giác của đề ra về một trong bốn dạng chuẩn sau và được chia thành 2 loại:

1.Phương trình lượng giác cơ bản:

Có bốn dạng: $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m, \cot x = m$

Phương trình	***Điều kiện có nghiệm***	***Công thức nghiệm;*** $k \in \mathbb{Z}$	
		Dạng 1	***Dạng 2***
Sinx = m	$-1 \le m \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin m + k\pi$	$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(m = \sin\alpha)$
Cosx = m	$-1 \le m \le 1$	$x = \pm \arccos m + k2\pi$	$x = \pm\alpha + k2\pi$ $(m = \cos\alpha)$
Tanx = m	$\forall m; x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \arctan m + k\pi$	$x = \alpha + k\pi$ $(m = \tan\alpha)$
Cotx = m	$\forall m; x \ne k\pi$	$x = \operatorname{arccot} m + k\pi$	$x = \alpha + k\pi$ $(m = \cot\alpha)$

Chú ý: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + k2\pi$$

2.Phương trình lượng giác thuộc dạng cơ bản:

Có một trong các dạng sau:

Sin[f(x)] = m; cos[f(x)] =m; tan[f(x)] = m; cot[f(x)] = m với f(x) là biểu thức chứa biến x

Hoặc là : sin[f(x)] = sin[g(x)]; cos[f(x)] = cos[g(x)]

Tan[f(x)] = tan[g(x)]; cot[f(x)] = cot[g(x)]

Ta sử dụng các công thức nghiệm như trên

<u>II.VÍ DỤ</u>: Giải phương trình:

<u>Ví dụ 1</u>

$\tan\frac{x}{2}=\tan x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=x+k\pi$

$\Leftrightarrow x=2x+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=-k2\pi \quad (k\in Z)$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $x=-k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

.

<u>Ví dụ 2</u>

$\sin x=\sqrt{2}\sin 5x+\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 5x=\sin x-\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 5x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sin 5x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi \\ 5x=\pi-\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{16}+k2\pi \\ x=\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 3

$$\sin 2x+\sin^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x-\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\arctan\frac{1}{2}+k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \text{x}=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $x=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 4

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x+2\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}.\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=3x-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{5\pi}{12}-k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} - k\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$

Ví dụ 5

$1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$ (1)

Điều kiện : cosx $\neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Với điều kiện trên (1) $\Leftrightarrow 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 2\sqrt{2}\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{(loaï)} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in Z)$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 6

$\sin^3 x.\cos 3x + \cos^3 x.\sin 3x = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x.\cos^3 x - 3\sin^3 x.\cos x + 3\sin x.\cos^3 x - 4\sin^3 x.\cos^3 x = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin x.\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = 4\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin 4x = 4\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 12x = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{x} = \dfrac{k\pi}{12} \quad (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $\mathrm{x} = \dfrac{k\pi}{12} \quad (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 7

$\dfrac{\sin x \cot 5x}{\cos 9x} = 1 \quad (1)$

Điều kiện : $\begin{cases} \sin 5x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \neq k\pi \\ 9x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{5} \\ x \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{9} \end{cases} (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \sin x.\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x} = \cos 9x$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 5x = \cos 9x.\sin 5x$

$\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x = 6x + k2\pi \\ 14x = \pi - 6x + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = k2\pi \\ 20x = \pi + k2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \end{array}\right. (k \in Z)$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2}\tan 3x-3=0$

2) $\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos 2x$

3) $\cos 2x-\sin^2 x=0$

4) $2\sin x-2\cos x=1-\sqrt{3}$

5) $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}+2\cos x=0$

6) $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sin 2x}$

7) $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}(\tan x+\cot x)$

8) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos 3x$

9) $\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\cos 2x}=\dfrac{1}{\sin 4x}$

10) $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x.\cos x=\cos x+8\cos x.\cos^3 3x$

11) $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$

12) $\dfrac{\cot^2 x-\tan^2 x}{\cos 2x}=16(1+\cos 4x)$

IV.HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1) $\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}.$

2) $\frac{7\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3};-\frac{7\pi}{6}+k2\pi.$ (Höôùng daãn : $\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$)

3) $\pm\arccos\frac{1}{3}+k\pi.$ (Höôùng daãn : $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$)

4) $\frac{\pi}{6}+k2\pi;-\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$ (Höôùng daãn : $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{12}$)

5) $-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}.$ (Höôùng daãn : ÑK $1+\sin x\neq 0$, ñöa pt veà daïng $2(\sin 2x+\cos x)=0$)

6) $\frac{\pi}{3}+k\pi.$ (Höôùng daãn : $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$)

7) Voâ nghieäm . (Höôùng daãn : ÑK $\sin 2x\neq 0,\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$)

8) $\frac{\pi}{8}+k\pi;-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}.$ (Höôùng daãn : $\cos x-\sin .x=\sqrt{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$)

9) Voâ nghieäm. (Höôùng daãn : ÑK $\sin 2x\neq 0$, $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$)

10) $k2\pi.$ (Höôùng daãn : chuyeån veá ñaët nhaân töû chung, aùp duïng coâng thöùc $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$)

11) $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$ (Höôùng daãn : Tìm ÑK, phöông trình $\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$)

12) $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}.$ (Höôùng daãn : Vieát veá traùi döôùi daïng $\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x.\cos 2x}$, veá phaûi döôùi daïng $32\cos^2 2x$)

PHẦN II

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Dạng bình phương của các phương trình lượng giác cơ bản

Dạng chuẩn			Công thức nghiệm; $\forall k \in Z$
1	a	$\sin^2\left[f(x)\right] = \sin^2\left[g(x)\right]$	$\begin{cases} f(x) = \pm g(x) + k\pi \\ f(x), g(x) \end{cases}$
	b	$\cos^2\left[f(x)\right] = \cos^2\left[g(x)\right]$	
2		$\tan^2\left[f(x)\right] = \tan^2\left[g(x)\right]$	$\begin{cases} f(x) = \pm g(x) + k\pi \\ f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ f(x), g(x) \end{cases}$
3		$\cot^2\left[f(x)\right] = \cot^2\left[g(x)\right]$	$\begin{cases} f(x) = \pm g(x) + k\pi \\ f(x) \neq \pi + k\pi \\ f(x), g(x) \end{cases}$

Dạng 2. Phương trình bậc hai đưa về một hàm lượng giác

Phương trình bậc hai đối với hàm số lượng giác:		
Dạng	Điều kiện(a,b,c $\in R; a \neq 0$)	Cách giải
1	$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ $a\sin^2[f(x) + b\sin[f(x)] + c = 0$	Đặt $\sin x = t$ $\sin f(x) = t$
2	$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ $a\cos^2[f(x) + b\cos[f(x)] + c = 0$	Đặt $\cos x = t$ $\cos f(x) = t$
3	$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ $a\tan^2[f(x) + b\sin[f(x)] + c = 0$	Đặt $\tan x = t$ $\tan f(x) =$
4	$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$ $a\cot^2[f(x) + b\cot[f(x)] + c = 0$	Đặt $\cot x = t$ $\cot f(x) = t$

❖ **<u>Chú ý</u>** :

1.Nếu đặt t = sinx, t = cosx thì phải có đk $|t| \le 1$

2.Sinx = α $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\alpha + k2\pi \\ x = (\pi - \arcsin\alpha) + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Cosx = $\alpha \Leftrightarrow$ x = $\pm \arccos\alpha + k2\pi$

Tanx = $\alpha \Leftrightarrow$ x = $\arctan\alpha + k\pi$

Cotx = $\alpha \Leftrightarrow$ x = $\text{arccot}\,\alpha + k\pi$

<u>Dạng 3. Đại số hóa phương trình lượng giác</u>

Cơ sở của phương pháp cần thcự hiện ba bước:

- **B_1** nhận dạng $R(x) = R(\sin x; \cos x)$ và đặt : $\boxed{t = \tan\frac{x}{2}}$
  (ĐK: $x \ne (2k+1)\pi; k \in Z$)
- **B_2**: sử dụng các biến đổi

  $\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$ $\boxed{\cos x = \frac{1-t^1}{1+t^1}}$ $\boxed{\tan x = \frac{2t}{1-t^2}}$

  Để đưa $R(x) = R(\sin x; \cos x)$ về phương trình bậc hai:

  $$f(t) = at^2 + \beta t + \gamma = 0$$

  Hay phương trình bậc cao $g(t) = 0$ phải có cách giải đặc biệt.
- **B_3:** kiểm tra hiện tượng mất nghiệm của phương trình: $a\sin x + b\sin x = c$
  $x = (2k+1)\pi; k \in Z$ khi $a + b + c = 0$

Dạng 4. Sử dụng hạng tử không âm

Cơ sở của phương pháp là sử dụng các tìm nghiệm nguyên của phương trình phi tuyến đặc biệt:

$$\begin{cases} A_1[f_1(x)]^{2m_1} + A_2[f_2(x)]^{2m_2} + \cdots\cdots\cdots + A_n[f_n(x)]^{2m_n} = 0 \\ A, B \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Qua ba bước:

B$_1$: biến đổi sơ cấp đưa phương trình ở giả thiết về dạng 1.(đơn giản)hay tổng quát (dạng hai).

B$_2$: giải các phương trình tương đương mà để các phương trình trogn hệ có cách giải đơn giản đã đọc:

$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$ cho dạng tổng quát

B$_3$:thông thường phải tìm nghiệm chung cho hệ đã biết để kết luận nghiệm tổng quát

Dạng 5. Các phương trình lượng giác có phương pháp giải tổng quát

1.asinx + bcosx = c

Ta có: a.sinx + bcosx = c

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (1)$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

Nên $\exists\varphi$ sao cho : $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \sin x.\sin\varphi + \cos x.\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2)

Vì vậy

- Nếu $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ hay $c^2 \le \sqrt{a^2+b^2}$

Thì (2) $x-\varphi = \pm\arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \Leftrightarrow x = \varphi \pm \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

- Nếu $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$hay $c^2 \le a^2+b^2$ thì pt vô nghiệm

a) Pt a.sinx + bcosx = c có ngiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > 0$

b) Phương pháp giải thường dùng :Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ từ đó dưa về pt dạng cơ bản

2. <u>**a.sin²x + bsinx.cosx + c.cos²x = 0**</u>

_ Kiểm tra với x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$ xem có là nhiệm của pt hay không

_Chia 2 vế của pt cho $\cos^2$x (x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), ta được pt :

a.$\tan^2$x + b.tanx + c = 0

❖<u>**Chú ý**</u>:

1. Gặp pt không thuần nhất : a.$\sin^2$x + bsinx.cosx + c.$\cos^2$x = d (d$\neq$0)

Ta có thể chọn 1 trong 2 cách trình bày sau:

a) Viết d = d($\sin^2$x + $\cos^2$x) sau đó đưa về pt thuần nhất

b) _Trước hết kiểm tra với x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$

_Với x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế của pt cho $\cos^2$x với lưu ý $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

2.Ngoài cách giải trên với pt thuần nhất hoặc không thuần nhất đối với sinx và cosx ta có thể sử dụng cách giải sau : Dùng công thức đưa pt về dạng Asin2x + Bcos2x = C

- $\sin^2$x = $\frac{1-\cos 2x}{2}$
- $\cos^2$x = $\frac{1+\cos 2x}{2}$

- sinx.cosx = $\frac{\sin 2x}{2}$

Tuy nhiên cách giải này chỉ nên sử dụng đối với những pt có chứa tham số

3. a(sinx + cosx) + bsinx.cosx = c (*)

Đặt t = sinx + cosx ($|t| \le \sqrt{2}$)

Ta có : sinx.cosx = $\frac{t^2 - 1}{2}$

Thay vào (*) ta được pt bậc 2 theo t, tìm t từ đó tìm x bằng cách thay t vào (*)

❖ **Chú ý**:

_Với dạng a(sinx – cosx) + bsinx.cox = c

Đặt t = sinx – cosx ($|t| \le \sqrt{2}$)

_Với dạng a$|\sin x + \cos x|$ + bsinx.cosx = c

Đặt t = $|\sin x + \cos x|$ ($0 \le t \le \sqrt{2}$)

_với dạng a$|\sin x - \cos x|$ + bsinx.cosx = c

Đặt t = $|\sin x - \cos x|$ ($0 \le t \le \sqrt{2}$)

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1 :Giải pt :

$\tan^2 x-(\sqrt{3}+1)\tan x+\sqrt{3}=0$ (pt baäc hai theo tan)

Ñaët t = tanx ta ñöôïc pt

$t^2-(\sqrt{3}+1)t+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\sqrt{2} \end{array}\right.$

_ Vôùi $t=1$: $\tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

_Vôùi $t=\sqrt{3}$: $\tan x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Vaäy pt coù 2 hoï nghieäm $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 2 : Giải pt :

$\cos^3 x-3\cos^2 x+2=0$ (pt baäc 3 ñoái vôùi cosx)

Ñaët t = cosx ($|t|\le 1$)

Ta coù pt : $t^3-3t^2+2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t-2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1-\sqrt{3} \\ t=1+\sqrt{3} \quad \text{(loaïi)} \end{array}\right.$

_Vôùi $t=1$: $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$

_Vôùi $t=1-\sqrt{3}$: $\cos x=1-\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos(1-\sqrt{3})+k2\pi \\ x=-\arccos(1-\sqrt{3})+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 3. Giải phương trình:

sinxcosx = 6(sinx – cosx – 1)   (1)

Đặt u = sinx – cosx = $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ với $-\sqrt{2}\le u\le\sqrt{2}$ (2)

Khi đó: $u^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - u^2$

Phương trình (1) với ẩn u có dạng:

$\dfrac{1}{2}(1-u^2)=6(u-1)$

$\Leftrightarrow u^2 + 12u - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 1 & \text{thỏa mãn (2)} \\ u = -13 < -\sqrt{2} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Trở về tìm x, giải:

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4} + l2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + l2\pi \end{array}\right. (k, l \in Z)$$

Ví dụ 4. Giải phương trình:

Sinx + cosx +sinxcosx = 1 (1)

Đặt $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với $-\sqrt{2} \le u \le \sqrt{2}$ (2)

Khi đó $u^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$

Phương trình (1) với ẩn u có dạng:

$$u + \frac{u^2 - 1}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 1 & \text{Thỏa mãn (2)} \\ u = -3 < -\sqrt{2} & \text{loại} \end{array}\right.$$

Trở về tìm x, giải:

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{array}\right. \quad (k, l \in Z)$$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$4\sin x + 3\cos x + \frac{6}{4\sin x + 3\cos x + 1} = 6 \qquad (1)$$

Điều kiện: 4sinx+3cosx+1 $\neq 0$

Đặt u = 4sinx + 3cosx = 5sin(x+φ)

Trong đó φ là góc mà $\tan\varphi = \frac{3}{4}$

Điều kiện $\begin{cases} -5 \le u \le 5 \\ u \neq -1 \end{cases}$ (2)

Phương trình (1) với ẩn u có dạng:

$$u + \frac{6}{u+1} = 6$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 5u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 5 \end{array}\right. \quad \text{thỏa mãn (2)}$$

Trở về tìm x, giải

a) $5\sin(x+\varphi) = 0$ $\Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow x + \varphi = k\pi$

$\Leftrightarrow x = -\varphi + k\pi$

b) $5\sin(x+\varphi) = 5$ $\Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow x + \varphi = \frac{\pi}{2} + l2\pi$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + l2\pi$ (k, l $\in$ Z)

Ví dụ 6. Giải phương trình

2(1- sinx – cosx) + tanx + cotx = 0 (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \qquad k \in Z$

Biến đổi phương trình (1) về dạng:

$$2[1 - (\sin x + \cos x)] + \frac{1}{\sin x.\cos x} = 0$$

Đặt $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow u^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \le u \le \sqrt{2} \\ u \neq \pm 1 \end{cases} (2)$$

Phương trình (1) với ẩn u có dạng:

$$2(1-u)+\frac{2}{u^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow u(u^2-u-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Chỉ có u=0 và

$u=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện(2))

Trở về tìm x, giải:

a) $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \quad \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

b) $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\alpha+l2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\alpha+n2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha-\dfrac{\pi}{4}+l2\pi \\ x=3\dfrac{\pi}{4}-\alpha+n2\pi \end{array}\right.$$

(k, l, m $\in$ Z)

Ví dụ 7. Giải phương trình

$\tan^4 x+\cot^4 x=8(\tan x+\cot x)^2-9 \qquad$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}$

Biến đổi (1) về dạng

$(1)\Leftrightarrow \tan^4 x+\cot^4 x=8(\tan^2 x+\cot^2 x)+7$

Đặt u = $\tan^2$x + $\cot^2$x

$\Rightarrow u\geq 2 \qquad$ (2)

$\Rightarrow u^2=\tan^4 x+\cot^2 x+2$

Phương trình (1) với ẩn u có dạng

u^2 -8u – 9 = 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u=-1 & \text{loại} \\ u=9 & \text{thỏa mãn (2)} \end{array}\right.$

Trở về tìm x, giải: $\tan^2 x + \cot^2 x = 9$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=9$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=9\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{9}{4}\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4}\sin^2 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{3}{11}$$

$$\Leftrightarrow 4x=\pm\arccos\frac{3}{11}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pm\arccos\frac{3}{11}}{4}+\frac{1}{2}k\pi \qquad (k\in Z)$$

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0$$

Điều kiện $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x+\cos x+2+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=0$$

Đặt $u=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Ta được $u^2=1+2\sin x\cos x\neq 1 \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{u^2-1}{2}$

Và điều kiện của u: $\begin{cases} -\sqrt{2}\leq u\leq\sqrt{2} \\ u\neq\pm 1 \end{cases}$ (2)

Phương trình đối với u có dạng

$$u+2+\frac{2(u+1)}{u^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (u+2)+\frac{2}{u-1}=0$$

$$\Leftrightarrow u(u+1)=0$$

$$\Leftrightarrow u=0$$

(do u+1 $\neq$ 0, thỏa mãn điều kiện (2))

Trở về tìm x, ta giải:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

(k$\in$Z)

Ví dụ 9: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-\cos x+2}$$

Vì sinx $-$cosx +2 = $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nên y_0 là 1 giá trị của hàm số

$$y_0=\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-\cos x+2} \text{ coù nghieäm } x_0\in\mathbb{R}$$

$$(y_0-1)\sin x-(y_0+2)\cos x=-2y_0 \text{ coù nghieäm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y_0-1)^2-(y_0+2)^2\geq(-2y_0)^2 \text{ coù nghieäm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2y_0^2-2y_0-5\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{11}}{2}\leq y_0\leq\frac{1+\sqrt{11}}{2}$$

Vaäy giaù trò lôùn nhaát cuûa y laø $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$

giaù trò nhoû nhaát cuûa y laø $\frac{1-\sqrt{11}}{2}$

Ví dụ 10 : Tìm k để giá trị của hàm số

$y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 1

Vì $\cos x + 2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ neân y_0 laø giaù trò cuûa haøm soá

$\Leftrightarrow y_0 = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ coù nghieäm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y_0\cos x + 2y_0 = k\sin x + 1$ coù nghieäm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y_0\cos x - k\sin x = 1 - 2y_0$ coù nghieäm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y_0^2 + k^2 \geq (1 - 2y_0)^2$ coù nghieäm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3y_0^2 - y_0 - k^2 + 1 \leq 0$ coù nghieäm $x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1 + 12k^2 - 12 \geq 0$

$\Leftrightarrow 12k^2 - 13 \geq 0$

$\Leftrightarrow k^2 \geq \dfrac{13}{12}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \geq \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} \\ k < -\dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \dfrac{1 - \sqrt{12k^2 - 13}}{6} \leq y_0 \leq \dfrac{1 + \sqrt{12k^2 - 13}}{6}$

$\text{Max } y = \dfrac{1 + \sqrt{12k^2 - 13}}{6}$, theo ñeà $\text{Max } y < 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{12k^2 - 13} < 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{12k^2 - 13} < 5$

$\Leftrightarrow k^2 < \dfrac{19}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \sqrt{\dfrac{19}{6}} \\ k < -\sqrt{\dfrac{19}{6}} \end{array}\right.$$

Ví dụ 11 : Giải pt

$2\sin^2 x + 3\sin x.\cos x + \cos^2 x = 0$ (1)

_Ta thấy x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của (1)

_Với x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế của pt cho $\cos^2 x$,ta được

$2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 12: Với m nào pt sau có nghiệm

$\sin^2 x + m\sin x.\cos x + 3\cos^2 x = 3$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + m.\frac{\sin 2x}{2} + 3.\frac{1+\cos 2x}{2} = 3$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + m\sin 2x + 3 + 3\cos 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x + 2\cos 2x = 2$$

Pt này có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 2^2 \geq 2^2$, điều này đúng $\forall m$

Vậy $\forall m$ pt đã cho luôn có nghiệm

Ví dụ 13: Giải pt

$(1+\sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0$

Đặt t = sinx + cosx ($|t| \leq \sqrt{2}$)

Ta có : sin2x = $t^2 - 1$ nên pt đã cho trở thành

$(1+\sqrt{2})t - (t^2 - 1) - 1 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (1+\sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

_Với t = 1 ta có sinx + cosx = 1

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

_Với $t=\sqrt{2}$ ta có sinx + cosx $=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy pt đã cho có 2 họ nghiệm

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{7+\tan x}+\sqrt[3]{2-\tan x}=3$

2. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

3. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$

4. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3$

5. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\cos 2x}=1$

6. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1$

7. $\sqrt{\sin x}+\sin x+\sin^2 x+\cos x=1$

8. $4\left[3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos(x+y)\right]=13+4\cos^2(x+y)$

9. $\sin^2 2x-\cos^2 8x=\sin(\frac{17\pi}{2}+10x)$

10. $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=4\sin^3 3x$

11. $\frac{\cos x(2\sin x+3\sqrt{2})-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1$

12. $\frac{3(\cos 2x+\cot 2x)}{\cot 2x-\cos 2x}-2\sin 2x=2$

13. $\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2(1+\sin^2 2x)$

14. $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. Đặt $\begin{matrix} u = \sqrt[3]{7+\tan x} \\ v = \sqrt[3]{2-\tan x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u^3 = 7+\tan x \\ v^3 = 2-\tan x \end{cases}$

Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$$

Kết quả:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x = \arctan(-6)+k\pi \end{array}\right.$$

$(k \in Z)$

2. Đặt $\begin{cases} u = 81^{\sin^2 x} \\ v = 81^{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le u \le 81 \\ 1 \le v \le 81 \end{cases}$

Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} u+v=30 \\ uv=81 \end{cases}$$

Kết quả:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$$

$(k \in Z)$

3. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{\sin^2 x} \\ v = \sqrt[3]{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$

Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} u+v=\sqrt[3]{4} \\ u^3+v^3=1 \end{cases}$$

Kết quả:

$$x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$(k \in Z)$

4. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ v = \sqrt{2-\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ 1 \le v \le \sqrt{2} \end{cases}$

Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} u+v+uv=3 \\ u^2+v^2=2 \end{cases}$$

Kết quả:

$x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$(k\in Z)$

5. ĐK: $-\frac{1}{2}\le \cos 2x\le \frac{1}{2}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[4]{\frac{1}{2}-\cos 2x} \\ v=\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 1 \end{cases}$

Ta được hệ:

$\begin{cases} u+v=1 \\ u^4+v^4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ [(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv(uv-2)=0 \end{cases}$

Kết quả:

$\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

$(k\in Z)$

6. ĐK: $\frac{1}{8}\le \cos^2 x\le 1$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[4]{10+8\sin^2 x} \\ v=\sqrt[4]{8\cos^2 x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{10}\le u\le \sqrt[4]{18} \\ 0\le v\le \sqrt[4]{7} \end{cases}$

Ta được hệ:

$\begin{cases} u-v=1 \\ u^4+v^4=17 \end{cases}$

Kết quả:

$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ (k$\in$Z)

7. Hướng dẫn:

$(1)\Leftrightarrow \mathrm{sinx}+\sqrt{\mathrm{sinx}}+\cos x+\cos^2 x=0$

Đặt $u=\sqrt{\mathrm{sinx}}\Rightarrow 0\le u\le 1$

Ta được: $u^2+u+\cos x-\cos^2=0$

Phương trình ẩn u, giải u theo cosx

Kết quả:

$\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+k2\pi \end{array}\right.$

$(k\in Z)$

8. $(1) \Leftrightarrow 4\cos^2(x+y) - 2[4-3\sqrt{4x-x^2}]\cos(x+y) - [6\sqrt{4x-x^2}-13] = 0$ (2)

Đặt u=cos(x+y)

$(2) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow 4u^2 - 2[4-3\sqrt{4x-x^2}]u - [6\sqrt{4x-x^2}-13] = 0$

Xét Δ', ta được hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ \cos(x+y) = \dfrac{4-3\sqrt{4x-x^2}}{4} \end{cases}$$

Kết quả:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \dfrac{2\pi}{3} - 2 + k2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_1 = -\dfrac{2\pi}{3} - 2 + k2\pi \end{cases}$$

$(k \in Z)$

9. $\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 4x}{2} - \dfrac{1-\cos 6x}{2} = \sin\dfrac{17\pi}{2}\cos 10x + \cos\dfrac{17\pi}{2}\sin 10x$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x + \cos 4x + \cos 16x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x + 2\cos 10x\cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 10x(1+\cos 6x) = 0$

Kết quả:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \\ x &= \frac{k\pi}{6} \end{aligned} \quad (k \in Z)$$

10. $\Leftrightarrow \sin 9x = \sqrt{3}\cos 9x$

Kết quả:

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{27} + \dfrac{k\pi}{9} \quad (k \in Z)$

11. $\Leftrightarrow \sin 2x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x - 12 = 0$

Kết quả: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in Z)$

12.

$$\frac{3(\cos 2x+\cot 2x)}{\cot 2x-\cos 2x}=\frac{3(\cos 2x+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x})}{\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x}$$

$$=\frac{3\cos 2x(1+\dfrac{1}{\sin 2x})}{\cot 2x(-1+\dfrac{1}{\sin 2x})}$$

$$=\frac{3(\sin 2x+1)}{(1-\sin 2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{3(\sin 2x+1)}{(1-\sin 2x)}=2(\sin 2x+1)$$

Kết quả:

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$

$x=\frac{7}{12}\pi+k\pi$

$\left(k\in Z)\right)$

13.

$(\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x})^2\le(\cos^2 3x+2-\cos^2 3x)2\le 4$

$\Leftrightarrow \cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}\le 2$

Mà $2(1+\cos^2 x)\ge 2$

Kết quả: vô nghiệm

14. Kết quả:

$x=k\pi$

PHẦN III

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TỔNG QUÁT

…⮘✵⮚…

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Phương pháp 1: một số phương trình lượng giác không ở dạng chính tắc, ta có thể sử dụng các công thức lượng giác thích hợp để biến đổi đưa về dạng phương trình tích:

f(x).g(x).h(x) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x) = 0 $\vee$ h(x) = 0
(f(x), g(x), h(x) là các hàm số lượng giác)

Phương pháp 2: khi phép phân tích thành tích không thực hiện được, ta cố gắng biễu diễn tất cả số hạng bằng một hàm số lượng giác duy nhất, đó là ẩn số của phương trình. Có thể chọn ẩn số bằng quy tắc sau:

_Nếu phương trình không thay đổi khi ta thế:

a) x bởi $-$x, chọn ẩn la cosx
b) x bởi $\pi -$x, chọn ẩn là sinx
c) x bởi $\pi +$x, chọn ẩn là tanx

_Nếu cả ba cách đều thực hiện được, chọn ẩn là cos2x

_Nếu cả ba cách đều không thực hiện được, chọn ẩn là tan$\frac{x}{2}$

<u>II. VÍ DỤ</u>

<u>Ví dụ 1</u>: Giải phương trình : sinx + sin3x + sin5x = 0

<u>GIẢI</u>

Sinx + sin3x + sin5x = 0 $\Leftrightarrow$ sin3x + 2sin3x . cos2x = 0

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \frac{1}{2}+\cos 2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{3}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$$

<u>Ví dụ 2</u>: Giải phương trình : $\tan^3$x + $\tan^2$x $-$3tanx = 3

<u>GIẢI</u>

Điều kiện: x $\neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

$$\tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x(\tan x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 x-3)(\tan x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x-3=0\\ \tan x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi(\text{nhaä})\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(\text{nhaä})\end{array}\right.$$

<u>Ví dụ 3</u>:Giải phương trình: $1+\tan 2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$

<u>GIẢI</u>

Điều kiện $2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow$ x $\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in$ Z

Phương trình tương đương:

$$\cos^2 2x + \sin 2x.\cos^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos^2 2x - \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x - \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

<u>Ví dụ 4</u> : Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x$

<u>GIẢI</u>

Nhận xét: Nếu thay x bởi $-x$, $\pi - x$ hay $\pi + x$ thì phương trình không đổi.Chọn ẩn là cos2x.

Đặt t = cos2x, t $\in [-1,1]$

Phương trình trở thành:

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^3 = \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3t^2 = 2(1 + t^2)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

<u>Ví dụ 5</u>: Giải phương trình: $\sin x + \tan\frac{x}{2} = 2$

<u>GIẢI</u>

Nhận xét: Nếu thay x bởi $-x, \pi - x$ hay $\pi + x$ thì phương trình thay đổi. Chọn ẩn là $\tan\frac{x}{2}$

Điều kiện: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$

Đặt t = $\tan\frac{x}{2}$, phương trình trở thành:

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 - t + 2 = 0 \text{ (Voâ nghieäm)} \end{array}\right.$$

Töø t = 1 $\Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1) $\sin^3 x - 7\sin^2 x.\cos x + 11\sin x.\cos^2 x - 6\cos^3 x = 0$

2) $9\sin^3 x - 5\sin x + 2\cos^3 x = 0$

3) $\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x = 0$

4) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$

5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

6) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

7) $\sin 6x + \sin 8x + \sin 16x + \sin 18x + 16\sin 3x = 0$

8) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

9) $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

10) $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|}$

11) Cho $f(x) = \cos^2 x.\sin^4 x + \cos 2x$

a) Giaûi phöông trình $f(x) = 2\cos x.(\sin x + \cos x) - 1$

b) Chöùng minh : $|f(t)| \le 1, \forall x$

12) Xaùc ñònh tham soá ñeå 2 phöông trình sau töông ñöông :

$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \quad (1)$

$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \quad (2)$

IV.HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1) Chia 2 veá cho $\cos^2 x$

$$x = \frac{\pi}{4};\ x = \arctan 2 + k\pi;\ x = \arctan 3 + k\pi$$

2) Chia 2 veá cho sin3x

$$x = \text{arccot} 2 + k\pi;\ x = \frac{1}{2}\arctan 4 + k\pi$$

3) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2} + l2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

4) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = k2\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k2\pi$$

5) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

6) $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5};\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

7) $x = k\frac{\pi}{3}$

8) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$

9) Bieán ñoåi töông ñöông thaønh

$$(\cos x + \sin x - \sin x.\cos x).(3\cos x - 5\sin x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1-\sqrt{2}}{2} + k2\pi;\ x = \arctan\frac{3}{5} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

10) $x = k2\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi \quad (k, l \in Z)$

11.a) $x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$

b) Ñaët $t = \cos^2 x \quad (0 \le t \le 1)$

f(x) trôû thaønh $g(t) = t^3 - 2t^2 + 3t - 1$

$g'(t) = 3t^2 - 4t + 3 > 0 \quad \forall t$

t	0		1
g'(t)		t	
g(t)	-1	$\nearrow$	1

$\Rightarrow -1 \le f(x) \le 1$

$\Leftrightarrow \; |f(x)| \le 1$

12) Giaûi(1) $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Giaûi(2) $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{a-3}{2} \end{array}\right.$

Ñeå (1) vaø (2) töông ñöông

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-3}{2} = 0 \\ \dfrac{a-3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a-3}{2} < 1 \;\vee\; \dfrac{a-3}{2} > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 4 \\ a < 1 \;\vee\; a > 5 \end{array}\right.$$

PHẦN IV

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CHỨA THAM SỐ

…≺❋≻…

I. VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Định tham số m để pt sau có nghiệm :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m|\sin 2x|$$

Lg: Phương trình đã cho tương đương

$$(\sin^6 x + \cos^6 xx).(\sin^4 x - \sin^2 x.\cos^2 x + \cos^4 x) = m|\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\sin^2 x.\cos^2 x = m|\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x = m|\sin 2x| \qquad (\text{Do } \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m|\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4m|\sin 2x| - 4 = 0$$

Ñaët $t = |\sin 2x| \quad (0 \le t \le 1)$

Baøi toaùn trôû thaønh ñònh m ñeå pt

$f(t) = 3t^2 + 4mt - 4 = 0$ coù nghieäm thoûa $0 \le t \le 1$

Ta coù $a.f(0) = 3.(-4) = -12 < 0$

$\Rightarrow$ pt $f(t) = 0$ luoân coù 2 nghieäm phaân bieät t_1, t_2 thoûa $t_1 < 0 < t_2$

Vaäy ñeå pt treân coù nghieäm thì ñieàu kieän laø

$$t_2 \le 1 \Leftrightarrow a.f(1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(4m - 1) \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4}$$

Vaäy $m \ge \frac{1}{4}$ thì pt coù nghieäm

Ví dụ 2 : Định tham số m để pt sau có nghiệm :

$$\cos^2 x - 2\sin^2 x + m = 0 \quad (1)$$

Lg: Pt (1) tương đương :

$$\cos^4 x - 2(1-\cos^2 x) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x + 2\cos^2 x - 2 + m = 0$$

$$\text{Ñaët } t = \cos^2 x \quad (0 \le t \le 1)$$

Khi ñoù baøi toaùn trôû thaønh ñònh m ñeå

$$t^2 + 2t - 2 + m = 0 \text{ coù nghieäm } 0 \le t \le 1$$

$$\Leftrightarrow m = -t^2 - 2t + 2 \text{ coù nghieäm } 0 \le t \le 1$$

$$\text{Xeùt haøm soá } f(t) = -t^2 - 2t + 2$$

$$\Rightarrow f'(t) = -2t - 2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

t	$-\infty$	1	0	1	$+\infty$
f'(t)	+	0	−	−	−
f(t)			2	−1	

Để pt có nghiệm $0 \le t \le 1$, điều kiện là $-1 \le m \le 2$

Ví dụ 3: Định m để pt sau có nghiệm :

$$\sqrt{1+2\cos^2 x} + \sqrt{1+2\sin^2 x} = m$$

Lg : Đặt f(x) = $\sqrt{1+2\cos^2 x} + \sqrt{1+2\sin^2 x}$

Ta có: $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$[f(x)]^2 = 1 + 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 2\sqrt{3+\sin^2 2x}$$

$$[f(x)] = 4 + 2\sqrt{3+\sin^2 2x}$$

$$\text{Vaäy } [f(x)] \min = 4 + 2\sqrt{3+\sin^2 2x} \qquad (\text{Do } \sin^2 2x \ge 0)$$

$$[f(x)] \max = 4 + 4 = 8 \qquad (\text{Do } \sin^2 x \le 1)$$

$$\text{Do ñoù } f \min = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$f \max = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vaäy ñeå pt coù nghieäm ñieàu kieän laø } f \min \le m \le f \max$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{2}$$

Ví dụ 4: (Phương trình xác định điều kiện cần và đủ)
Tìm a,b,c để pt sau đúng $\forall$ x

$a.\cos x + b.\cos x + c.\cos 3x = 0$

Lg: ***Điều kiện cần*** :Giả sử pt đã cho đúng $\forall x$, nói riêng

1.Khi $x = \frac{\pi}{2}$,ta có: $a.\cos\frac{\pi}{2} + b.\cos\pi + c.\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

2.Khi $x = \frac{\pi}{6}$, ta có: : $a.\cos\frac{\pi}{6} + c.\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

3.Khi x = 0, ta có: c.cos0 = 0 $\Rightarrow c = 0$
Vậy điều kiện cần là a = b = c = 0
Điều kiện đủ: Giả sử a = b = c = 0

$a.\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3 = 0 \qquad \forall x$

Tóm lại các giả thiết cần tìm của tham số a,b,c là a = b = c = 0

Ví dụ 5 : Cho pt : $a.\cos 2x + \sin x = \cos x.\cot x \quad (*)$

Tìm a để pt có đúng 4 nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$

Lg: Pt (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ a.\cos 2x.\sin x - \cos 2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \quad (1) \\ \cos 2x(a.\sin x - 1) = 0 \quad (2) \end{cases}$

- Xét 2 trường hợp
- Nếu a = 0 , khi đó (1) (2) $\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Ta nhận thấy trong $(0, 2\pi)$ hệ (1) (2) có đúng 4 nghiệm

$x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}; x_3 = \frac{5\pi}{4}; x_4 = \frac{7\pi}{4}$

- Nếu a $\neq 0$ thì (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ hoaë $\sin x = \frac{1}{a}$
- Từ đó suy ra để thỏa mãn yêu cầu là hệ 91) (2) có đúng 4 nghiệm trên $(0, 2\pi)$ ta cần có

• Hoặc pt sinx = $\frac{1}{a}$ vô nghiệm , tức là $\frac{1}{|a|} > 1 \Leftrightarrow |a| < 1$ và $a \neq 0$

• Hoặc pt sinx = $\frac{1}{a}$ trên $(0, 2\pi)$ là có nghiệm nhưng các nghiệm của nó đều là 1 trong các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4

Điều đó xảy ra khi $\dfrac{1}{|a|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |a| = \sqrt{2}$

Tóm lại các giả thiết cần tìm của tham số a là : $|a| < 1, |a| = \sqrt{2}$

Ví dụ 6 : Giải và biện luận m theo pt :

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = m\cos x \quad (*)$$

Lg : Pt (*) tương đương :

$$\begin{cases} m\cos x \ge 0 \\ 2+2|\cos x| = m^2\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\cos x \ge 0 & (1) \\ m^2\cos^2 x - 2|\cos x| - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Xét 2 khả ngăng sau :
- Nếu m = 0

(1),(2) $\Leftrightarrow |\cos x| = -1 \Rightarrow$ pt vô nghiệm

- Nếu m $\neq 0$

(1),(2) $\begin{cases} m\cos x \ge 0 \\ |\cos x| = \dfrac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2} \end{cases} \quad (4)$

Để (4) có nghiệm , ta cần có $\dfrac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2} \le 1$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+2m^2} \le m^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2m^2} \le m^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \ge 1 \\ 1+2m^2 \le m^4 - 2m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \ge 1 \\ m^2(m^2-4) \ge 0 \end{cases} (5)$$

Vậy (5) là điều kiện để (4) có nghiệm

- Nếu m≥ 2 thì

(3),(4)
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos x \frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu m ≤ -2 thì

(3),(4)

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(\pi - \operatorname{arccos}x\frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m^2}) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Tóm lại :

- Nếu $-2 < m < 2$: pt đã cho vô nghiệm
- Nếu m ≥ 2 : x = $\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

II.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ :

1.Định tham số m để pt sau có nghiệm :

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=m\tan 2x$$

2.Cho phöông trình : $\sin^4 x+\cos^4 x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x+m=0$

Vôùi giaù trò naøo cuûa m thì pt treân coù nghieäm

3. Ñònh tham soá m ñeå pt sau coù nghieäm :

$$\sqrt{\cos^2 x+7\sin^2 x}+\sqrt{\sin^2 x+7\cos^2 x}=m$$

4.Giải và biện luận theo a,b pt :

Cosax + cos2bx $-$cos(a + 2b)x = 1

III. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. ÑK $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos^2 x \neq \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Phöông trình (1) töông ñöông

$$\frac{1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x}{\cos 2x} = m\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 4m\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4m\sin 2x - 4 = 0$$

Ñaët $t = \sin 2x \quad (-1 < t < 1 \text{ (do } \cos 2x \neq 0))$

Khi ñoù baøi toaùn trôû thaønh:

Ñònh m ñeå pt $f(t) = 3t^2 + 4mt - 4 = 0$ coù nghieäm $t \in (-1;1)$

Ta coù $3f(0) = -12 < 0$

Vậy pt f(t) = 0 luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoûa $t_1 < 0 < t_2$

Bài toán vô nghiệm khi $t_1 \leq -1 < 1 \leq t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f(-1) \leq 1 \\ a.f(1) \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3 - 4m - 4) \leq 0 \\ 3(3 + 4m - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{4} \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$$

Vậy pt có nghiệm khi $m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$

2.Nếu $b \neq 0$ thì nghiệm của (2) là $x = \frac{kx}{b} \quad (k \in \mathbb{Z})$

- Xét $\sin\frac{ax}{2} = 0$

- Nếu a = 0 thì (3) đúng $\forall x$
- Nếu a $\neq 0$ thì nghiệm của (3) là $x = \frac{2m\pi}{a} \quad (m \in \mathbb{Z})$

- Xét cos $\left(\frac{a}{2} + b\right).x = 0 \quad (4)$

- Nếu $\frac{a}{2} + b = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 0$ thì (4) vô nghiệm
- Nếu $\frac{a}{2} + b \neq 0$ thì nhiệm (4) là $x = \frac{(1+2n)\pi}{a+2b}$

Kết luận :

- Nếu ab = 0 thì pt đã cho đúng $\forall x$
- Nếu ab $\neq 0$

- a + 2b = 0 : $x = \frac{k\pi}{b}$
- a + 2b $\neq 0$ thì nghiệm cần tìm là

$$x = \frac{k\pi}{b}; x = \frac{2m\pi}{a}; x = \frac{2n+1}{a+2b} \quad (k, m, n \in \mathbb{Z})$$

3. Xeùt haøm $y = \sqrt{\cos^2 x + 7\sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$

TXÑ: $D = \mathbb{R}$

Xeùt $y \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$$y^2 = \cos^2 x + 7\sin^2 x + \sin^2 x + 7\cos^2 x$$

PHẦN V

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ.

…⮜❃⮞…

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Mục đích:nhằm trục các biểu thức có trong căn bậc hai mà không cần luỹ thừa.

$X^2+Y^2=1$ thì đặt $\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases}$ $\alpha\in[0;2\pi]$

$X^2+Y^2=a^2 (a>0)$ thì đặt $\begin{cases} x=a\sin\alpha \\ y=b\sin\alpha \end{cases}$ $\alpha\in[0;2\pi]$

$|x|\le 1$ thì đặt $\left[\begin{array}{ll} x=\sin\alpha & \alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ x=\cos\alpha & \alpha\in[0;\pi] \end{array}\right.$

$|x|\le m$ thì đặt $\left[\begin{array}{ll} x=m\sin\alpha & \alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ x=m\cos\alpha & \alpha\in[0;\pi] \end{array}\right.$

$|x|\ge 1$ hoặc bài toán có chứa $\sqrt{x^2-1}$ thì đặt $x=\frac{1}{\cos\alpha}$ $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2})\cup[\pi;\frac{3\pi}{2})$.

$|x|\ge m$ hoặc bài toán có chứa $\sqrt{x^2-m}$ thì đặt $x=\frac{m}{\cos\alpha}$ $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2})\cup[\pi;\frac{3\pi}{2})$

Nếu không ràng buộc điều kiện gì cho biến số và bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2+1}$ thì đặt $x=\tan\alpha, \alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ hoặc chứa $\sqrt{x^2+M^2}$ thì đặt

$x=\tan\alpha, \alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}$ = 4x^3-3x (1)

Điều kiện $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0;\pi]$ khi đó thế vào chương trình

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\alpha = \frac{\pi}{2} - \pi + k2\pi \\ 3\alpha = \alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Do $\alpha \in [0;\pi], k \in z$ nên $\alpha \in \{\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{\cos\frac{\pi}{8}; \cos\frac{3\pi}{8}; \cos\frac{3\pi}{4}\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{\sqrt{2+\sqrt{2}};; -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\}$$

Ví dụ 2. GIải phương trình: $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ (1)

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} 1-x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x^2 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt $x = \cos\alpha$, $\alpha \in (0;\pi)$ thay vào phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cos 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\alpha}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2K\pi \\ \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2K\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{4K\pi}{3} \\ \alpha = \frac{3\pi}{10} + \frac{4K\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Do $\alpha \in (0;\pi), K \in Z$ nên $\alpha = \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Ví dụ 3.Giải phương trình $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$ (1)

Nếu $x>1$ hoặc $x<1$ thì (1) $>0 \Rightarrow$ vô nghiệm.

$|x|$ thì đặt x= $\cos\alpha$ $\alpha \in [0;\pi]$, khi đó (1)

$\Leftrightarrow 8\cos\alpha(1-2\cos^2\alpha)(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1)=1$

$\Leftrightarrow -8\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=1$ (2)

Do $\sin\alpha$ =o không là nghiệm của phương trình nên nhân 2 vế của (2) với $\sin\alpha \neq 0$ thu được phương trình $-\sin8\alpha=\sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\alpha=-\alpha+2K\pi \\ 8\alpha=\alpha+\pi+2K\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{2K\pi}{9} \\ \alpha=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2K\pi}{7} \end{array}\right.$$

Do $\sin\alpha \neq 0$ nên $\alpha \in (0;\pi)$ mà $k \in Z \Rightarrow \alpha \in \{\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};\frac{2\pi}{3};\frac{8\pi}{9};\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\}$

$x \in \{\cos\frac{2\pi}{9};\cos\frac{4\pi}{9};\cos\frac{2\pi}{3};\cos\frac{8\pi}{9};\cos\frac{\pi}{7};\cos\frac{3\pi}{7};\cos\frac{5\pi}{7}\}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}[\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}]=2+\sqrt{(1-x^2}$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} 1-x\geq 0, 1+x\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Đặt x= $\cos t$ $t\in[0;1] \Rightarrow \sqrt{1-\sin^2 t}=\sin t$ khi đó

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}[\sqrt{(1-\cos t)3}-\sqrt{(1+\cos t)3}]=2+\sin t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})^2}[\sqrt{(2\sin^2\frac{t}{2})3}-\sqrt{(2\cos^2\frac{t}{2})3}]=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow (\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})2\sqrt{2}(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2})=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2})2(\sin^2\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2})=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2})(2+2\sin t)=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos t=1$$

$$\Leftrightarrow \cos t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1) $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

2) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$

3) $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$

4) $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1)Điều kiện $-1 \le x \le 1$

Đặt x= $\sin\alpha$; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \sin\alpha\sqrt{2}\cos\alpha$

Đặt tiếp t= $\sin\alpha + \cos\alpha \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{t^2-1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow t^3 - 3\frac{t^2-1}{2} = \sqrt{2}\frac{t^2-1}{2}$

$\Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}-1)(t+\sqrt{2}+1) = 0$

- $(t+\sqrt{2}+1) = 0 \Rightarrow t = -(1+\sqrt{2}) \quad \notin [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ (loại)
- $(t-\sqrt{2}) = 0 \quad \Rightarrow t = \sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $(t+\sqrt{2}-1) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{2}$

$$\begin{cases}(1-\sqrt{2}) - x \ge 0\\ 1-x^2 = [(1-\sqrt{2})-x]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1-\sqrt{2}\\ x^2-(1-\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2}) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1-\sqrt{2}\\ x = \frac{1-\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\end{cases}$$

Dựa vào diều kiện $\Rightarrow x = \frac{(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

2)Điều kiện x > 1.

Đặt $x = \frac{1}{\cos\alpha}$ (1) $\quad \alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{35}{12}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{35}{12}$ (2)

Phương trình (2)bằng cách qui đồng mẫu số và đặt
$t = \sin\alpha + \cos\alpha \in (1;\sqrt{2}]$

Ta có: $t = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{25}{12}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{35}{12} \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} - \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{25}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{5}{4} \end{array} \right.$$

3) Biến đổi $\cos 7\alpha = 64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha$

Đặt $x = \cos t \quad t \in (0;\pi)$

$64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7 = 2\sqrt{1-\cos^2 t}$

Nhân hai vế với $\cos t \neq 0$

$$\Rightarrow \cos 7t = \sin 2t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7t = \dfrac{\pi}{2} - 2t + 2k\pi \\ 7t = 2t - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{9} \\ t = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} \end{array} \right. \quad (k \in Z)$$

$t \in [0;\pi]$ nên $t \in \{\dfrac{\pi}{18};\dfrac{5\pi}{18};\dfrac{9\pi}{18};\dfrac{13\pi}{18};\dfrac{17\pi}{18};\dfrac{7\pi}{18};\dfrac{3\pi}{10}\}$

Vì $\cos t \neq 0$ nên $t \neq \dfrac{\pi}{2}$ hay $t \neq \dfrac{9\pi}{18}$

$S = \{\cos\dfrac{\pi}{18};\cos\dfrac{5\pi}{18};\cos\dfrac{13\pi}{18};\cos\dfrac{17\pi}{18};\cos\dfrac{3\pi}{10};\cos\dfrac{7\pi}{10}\}$

4) Đặt $\cos\alpha = x \qquad (\alpha \in [0;x]) \quad (1)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \cos(\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3})$$

PHẦN VI

TRẮC NGHIỆM

…➤✵➤…

I. ĐỀ

1 $\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$

A. Vô nghiệm.

B. X=$(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$.

C. X=$\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

D. X=$\frac{\pi}{6}+k2\pi$ (k$\in\mathbb{Z}$).

2 Cos2x – (2m + 1)cosx + m + 1 = 0.Tìm mọi giá trị của m để phương trình có nghiệm x thuộc [$\frac{\pi}{2}$;$\frac{3\pi}{2}$].

A. $-2<m<-1$

B. $-1\le m\le 0$

C. $1\le m\le 2$

D. $m>0$

3 Các điêm mà hàm số y=$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$ không xác định là:

A. $x=k2\pi$

B. $x=\frac{\pi}{2}k2\pi$

C. $x=\pi+k2\pi$

D. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$

4 Cặp hàm số nào sau đây có cùng tập xác định:

A. $y=\cos x$ và $y=\cot x$

B. $y=\tan x$ và $y=\cot x\frac{2+\sin x}{\cos x}$

C. $y=\tan x$ và $y=\sin x$

D. $y=\tan x$ và $y=\cot x$

5 Nghiệm của phương trình $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ là:

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

B. $x=k\pi\ , x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in Z)$

C. $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

D. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in Z)\ (k\in Z)$

6 Nghiệm của phương trình cosx+sinx $=-1$ là:

A. $x=k2\pi(k\in Z)$

B. $x=k\pi(k\in Z)$

C. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$

D. $x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in Z)$

7 Giải phương trình: $\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$

A. $x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+m\pi$

B. $x=\frac{m}{2}$ $(m\in\mathbb{Z})$

C. $x=m\pi$

D. $x=\frac{\pi}{4}+m\pi$

8 Giải phương trình:cosx $+\sqrt{3}$ sinx $=-1$:

A. $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$

B. $x=k2\pi$

C. $x=(2k+1)\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$ (k$\in$Z)

D. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

9 Giải tanx + cotx = -2:

A. $x=\frac{5}{4}\pi+k2\pi$

B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

C. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

D. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

10. Các họ nghiệm của phương trình $\sin^{15}x+\cos^{40}x=1$ là:

A. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k'\pi \end{array}\right.$

B. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k'2\pi \end{array}\right.$

C. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+(2\kappa+1)\pi \\ x=2k'\pi \end{array}\right.$

D. Kết quả khác.

11 Xét phương trình $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{2\sin\ x-1}}=0$ trên đoạn $[0;3\pi)$:

A. Có 4 nghiệm
B. Có 2 nghiệm
C. Có 6 nghiệm
D. Tất cả đều sai

12 Giải $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos x}$:

A. Vô nghiệm.
B. $x=k\pi$
C. $x=\frac{1}{3}+k2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$
D. $x=k2\pi$

13 Thu gọn $\frac{\cos 7x-\cos x}{\sin 7x-\sin x}$:

A. $-\tan 4x$
B. $\tan 4x$
C. $\tan 3x$
D. $-\tan 4x$

14 Giải phương trình $6\sin x-2\cos 3x=\frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

C. $x = k2\pi$

D. Vô nghiệm.

15 Giải $\sin 2(x-\pi) - \sin(3x-\pi) = \sin x$:

A. $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

B. $x = -\frac{k\pi}{6} + \kappa\pi$

C. $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$

D. $x = \frac{\pi}{4} + \kappa 2\pi$

16 Phương trình $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ có nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

17 Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm:

A. $\tan x + \cot x = 0$

B. $\sin x + \cos x = 0$

C. $\sin x = \cos x$

D. $\tan x = \cot x$

18 Phương trình $3\sin x - 4\cos x = 5m$ vô nghiệm khi:

A. $|m| \le 1$

B. $|m| < 1$

C. $|m| > 1$

D. $|m| \le 1$

19 Một nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{8}$

D. $\frac{\pi}{6}$

20 Số nghiệm của phương trình $\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ =0thuộc khoảng $(\pi;8\pi)$ là:

A. 1
B. 3
C. 2
D. 4

21 Số nghiệm của phươgn trình $\frac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ thuộc đoạn $(2\pi;4\pi)$ là:

A. 2
B. 4
C. 5
D. 6

22 Giải $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=k2\pi$
B. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$
C. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$
D. $x=k\pi$

23 Giải $\cos^3 4x=\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x$

A. $x=\frac{k\pi}{4}$
B. $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$
C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$
D. $x=\frac{k\pi}{3}$

24 $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$.Tìm giá trị m $\in \mathbb{R}$ để phương trình có nghiệm x $\in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$.

A. $-1\le \mathrm{m}\le 0$
B. $\mathrm{m}>0$
C. $-2<\mathrm{m}<2$
D. $1\le \mathrm{m}\le 2$

25 Định m để phương trình $\sin x+m\cos x=1$ vô nghiệm:

A. $0 < m < 1$
B. $m > 0$
C. $m < 3$
D. $m \in \varnothing$

26 Định m để phương trình sau có nghiệm: $\sin x + \cos x = m$:

A. $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$
B. $-2 < m < -\sqrt{2}$
C. $\sqrt{2} < m < 2$
D. $m \in \varnothing$

27 Giải $5\sin x - 6\cos x = 8$

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
B. $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$
C. $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
D. Vô nghiệm.

28 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$
C. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$
D. Tất cả đều sai.

29 Giải $2\sin^2 x - 3\sin x = 0, 0 \le x < \frac{\pi}{2}$:

A. $x = \frac{\pi}{4}$
B. $x = \frac{\pi}{2}$
C. $x = 0$
D. $x = \frac{\pi}{6}$

30 Cho a thoả $\sin a - \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .Khi đó $\sqrt{\sin^4 a + \cos^4 a}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{17}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{19}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

II. ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

---HẾT---