

CHỦ ĐỀ 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

LÝ THUYẾT

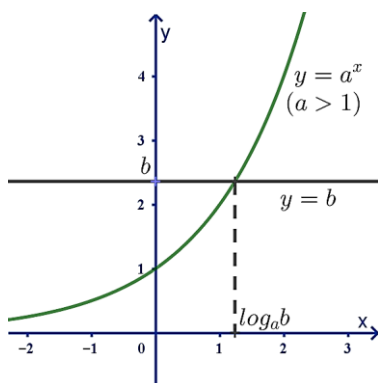
1. Định nghĩa:

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

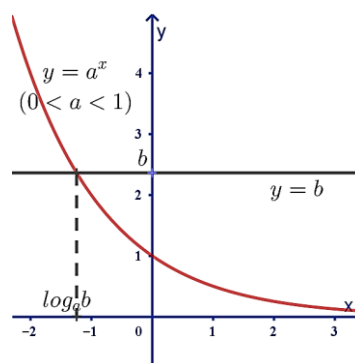
2. Định lí, quy tắc:

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
 - Với $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$ (Hình 1).
 - Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$ (Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho bởi bảng sau:

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:
 - Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
 - Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0, (1)$.
 - Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p > 0$.
 - Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$ sau đó tìm nghiệm x .
 - $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
 - $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

5. Phương pháp hàm số, đánh giá

- **Định nghĩa**

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

- **Định lý, quy tắc:**

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

- **Nhận xét**

- Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m \geq f(x)$ (hoặc $m \leq f(x)$) **có nghiệm đúng** với mọi $x \in D$ thì $m \geq \max_D f(x)$ (hoặc $m \leq \min_D f(x)$) .
- Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m \geq f(x)$ (hoặc $m \leq f(x)$) **có nghiệm** với mọi $x \in D$ thì $m \leq \max_D f(x)$ (hoặc $m \geq \min_D f(x)$) .

VÍ DỤ MINH HỌA**VÍ DỤ 1.** Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32.$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}.$

c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}.$

d) $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}.$

e) $\frac{3^x}{3^x-2} < 3.$

f) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x.$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5).$ b) Điều kiện: $x \neq -1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}} &\Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 0).$

c) Ta có: $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2).$

d) Ta có: $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x \leq \frac{4}{3} \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty).$

e) $\frac{3^x}{3^x-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{3^x-3}{3^x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \log_3 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_3 2) \cup (1; +\infty).$

$$\begin{aligned} \text{f) Ta có: } 11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x \quad 11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x &\Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x+6 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+6 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 0 \\ x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-6; 3].$

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $16^x - 4^x - 6 \leq 0$.

b) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$

c) $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

d) $2^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 10^x$.

e) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1$

f) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình: $9^x + (m-1) \cdot 3^x + m > 0$ nghiệm đúng $\forall x > 1$.

Lời giải

a) Đặt $t = 4^x$ ($t > 0$), khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_4 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_4 3]$.

b) Ta có: $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 2 \\ 2^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

c) Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1 > 0 \\ 3t-1 \leq t+5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \leq 3 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 1]$.

d) Ta có: $2^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 10^x \Leftrightarrow 2^x - 10^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 0 \Leftrightarrow 2^x(1 - 5^x) - 4(1 - 5^x) < 0$

$$\Leftrightarrow (1 - 5^x)(2^x - 4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 5^x < 0 \\ 2^x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > 1 \\ 2^x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 5^x > 0 \\ 2^x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 1 \\ 2^x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \geq 0$

Ta có: $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} - \frac{2}{2^{\sqrt{x}}} < 1$ (2). Đặt $t = 2^{\sqrt{x}}$. Do $x \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t - \frac{2}{t} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^2 - t - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t < 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 1)$.

f) Đặt $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$ bất phương trình

đã cho thành: $t^2 + (m-1)t + m > 0$ nghiệm đúng $\forall t \geq 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m$ nghiệm đúng $\forall t > 3$

Xét hàm số $g(t) = t - 2 + \frac{2}{t+1}$, $\forall t > 3$, $g'(t) = 1 - \frac{2}{(t+1)^2} > 0$, $\forall t > 3$.

Hàm số đồng biến trên $[3; +\infty)$ và $g(3) = \frac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$.

VÍ DỤ 3.

- Giải bất phương trình $3.2^x + 7.5^x > 49.10^x - 2$
- Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Cho bất phương trình $4^x - 2018m.2^{x-1} + 3 - 1009m \leq 0$. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm là?

Lời giải

a) Ta có $3.2^x + 7.5^x > 49.10^x - 2 \Leftrightarrow \frac{3.2^x + 7.5^x + 2}{10^x} > 49 \Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x > 49$

Xét hàm số $f(x) = 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $f'(x) = 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1) = 49 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Leftrightarrow x < -1$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -1$.

b) Ta có: $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4.2^x + 1}{4^x + 4.2^x + 1} \quad (1)$

Đặt $2^x = t, t > 0 \Rightarrow$ Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}, \forall t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-4t^2 - 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	1	0

Từ đó ta có $0 < f(t) < 1, \forall t \in (0; +\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập $\mathbb{R}$ thì $m \geq 1$.

c) Đặt $t = 2^x (t > 0)$

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 - 1009mt + 3 - 1009m \leq 0 \Leftrightarrow 1009m \geq \frac{t^2 + 3}{t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}, \forall t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}$,

Giải phương trình: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 < 0 \text{ (L)} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		–	
$f(t)$	3	2	$+\infty$

Bất phương trình có nghiệm khi $1009m \geq \min_{(0; +\infty)} f(t) = 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{1009}$

Vậy $m = 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

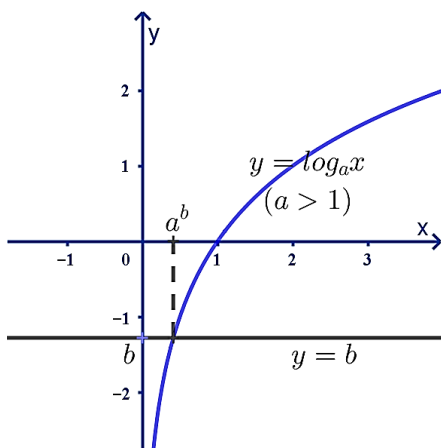
LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

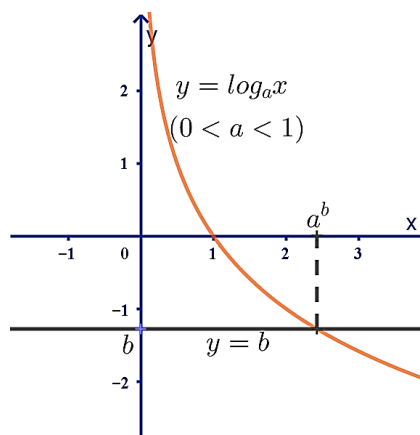
- Bất phương trình lôgarit đơn giản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

2. Định lí, quy tắc:

- Ta xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$.
 - Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình 1).
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$ được cho bởi bảng sau:

$\log_a x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
	$x > a^b$	$0 < x < a^b$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ thì xét hai trường hợp:
 - Trường hợp 1.** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$.
 - Trường hợp 2.** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Nếu gặp bất phương trình $m \cdot \log_a^2 f(x) + n \log_a f(x) + p > 0, (1)$
 - Đặt $t = \log_a f(x)$, đưa (1) về dạng $mt^2 + nt + p > 0$; giải tìm t từ đó tìm nghiệm x .

- Ngoài ra, chúng ta còn có thể sử dụng linh hoạt các quy tắc về hàm số, phương pháp đánh giá đã nêu ở bài phương trình mũ, phương trình lôgarit và bất phương trình mũ. Việc sử dụng đa dạng các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hóa các bài toán trở nên đơn giản và dễ dàng hơn.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,4}(5x+2) > \log_{0,4}(3x+6).$

b) $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2).$

c) $2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2).$

d) $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1.$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0.$

Lời giải

a) Điều kiện: $x > -\frac{2}{5}.$

Ta có: $\log_{0,4}(5x+2) > \log_{0,4}(3x+6) \Leftrightarrow 5x+2 < 3x+6. \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(-\frac{2}{5}; 2\right).$

b) Ta có: $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 3x + 2) - \log_2(x-2) < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) < 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (2; 3).$

c) Ta có: $2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \log_2(x+1) + \log_2(x-2) \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x+1)(x-2) \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (2; 3].$

d) Điều kiện : $x > 2$

$\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \log_2[(x^2 - x - 2)(x-1)] \geq 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x-1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [1 - \sqrt{2}; 0] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty).$

e) Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > \log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x-1) < 1 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(1; \frac{3}{2}\right).$

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

b) $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$.

c) $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$.

Lời giảia) Điều kiện: $x > 0$

$$\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6 \Leftrightarrow 2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} < x < \frac{1}{25}$$

b) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1; x \neq 3$

$$\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

c) Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

$$\text{Bất phương trình đã cho trở thành } 2^{u^2} - 10(2^u)^{-u} + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{u^2} - \frac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^{u^2}, t \geq 1. \quad (1) \Rightarrow t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -5 \\ t > 2 \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u > 1 \\ u < -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$$

$$\text{Với } u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$ hoặc $0 < x < \frac{1}{2}$.**VÍ DỤ 3.**

a) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8\right)$.

b) Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

c) Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình

$$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100).$$

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{VT} = \log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2(4) = 2.$$

$$\text{Ta có } x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

$$VP = \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right) \leq \log_3 9 = 2$$

Suy ra $VT \geq 2 \geq VP$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

$$\text{b) } \begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} & (1) \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3}$

$$\text{Do } |x^2-2x-3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3^{|x^2-2x-3|} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5^{-y-3} \geq 1 \Leftrightarrow -y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -3$$

$$\text{Với } y \leq -3, \text{ ta có bất phương trình (2)} \Leftrightarrow -4y + y - 1 + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow |x^2-2x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn $(3; -3), (-1; -3)$.

$$\text{c) } (10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \geq \frac{11}{10}\log x$$

$$\Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11\log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0$$

$$\text{Do } x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2) \quad 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \log x, t \in (0; 2). \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}, \forall t \in (0; 2)$$

$$\text{Đạo hàm: } f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2) \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Do đó } f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$$

$$\text{Để } 10m \geq \frac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100) \text{ thì } 10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}$$

$$\text{Do đó } m \in \left[\frac{8}{15}; 2018 \right] \text{ hay có 2018 số thỏa mãn.}$$