

ĐỀ 69

Bài 1. Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{-x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = M + x - 1$

Bài 2. a) Giải phương trình $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH

- a) Chứng minh rằng $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$
- b) Chứng minh rằng $\triangle CJH \sim \triangle HIB$
- c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh rằng $HE \cdot HD = HC^2$

Bài 4. Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC, các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D, E, F. Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

$P = \frac{MA}{MD} + \frac{MB}{ME} + \frac{MC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 5. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{-x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x+1}}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = M + x - 1$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{-x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{-\frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}}{\frac{2x - \sqrt{x+1}}{2x - \sqrt{x+1}}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x+1})}{x + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x+1})(x - \sqrt{x+1})}{x - \sqrt{x+1}} \\ &= (x - \sqrt{x}) - (x + \sqrt{x}) = -2\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$B = M + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$$

Vậy GTNN của B bằng -2 khi $x = 1$

Bài 2. a) Giải phương trình $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Lời giải

a. Điều kiện: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{9 - x^2} = a$ ($a \geq 0, a \neq 3$) $\Leftrightarrow x^2 = 9 - a^2$

Theo bài ra, ta có:

$$\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1 \Leftrightarrow \frac{9 - a^2}{3 + a} + \frac{1}{4(3 - a)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - a + \frac{1}{4(3 - a)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4(3 - a)} = a - 2$$

$$\Leftrightarrow 4(a - 2)(-b - a) = 1 \Leftrightarrow 4(-a^2 + 5a - 6) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4a^2 + 20a - 25 = 0 \Leftrightarrow (2a - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow 9-x^2 \cdot \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 = 9 - \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{-\sqrt{11}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{11}}{2}$

b) Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

ĐKXĐ: $x+y > 0$

Từ (1) ta có: $(x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$

Đặt $t \geq 0$

Ta có: $a^2 - b + \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a^3 - ab + b - a = 0$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 1) - b(a - 1) = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 + a - b) = 0$$

TH1: $a - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

Thay vào (2) ta được: $1 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

TH2: $a^2 + a - b = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x + y - 2xy = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$

Vì $x^2 + y^2 \geq 0, x + y > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x + y > 0$

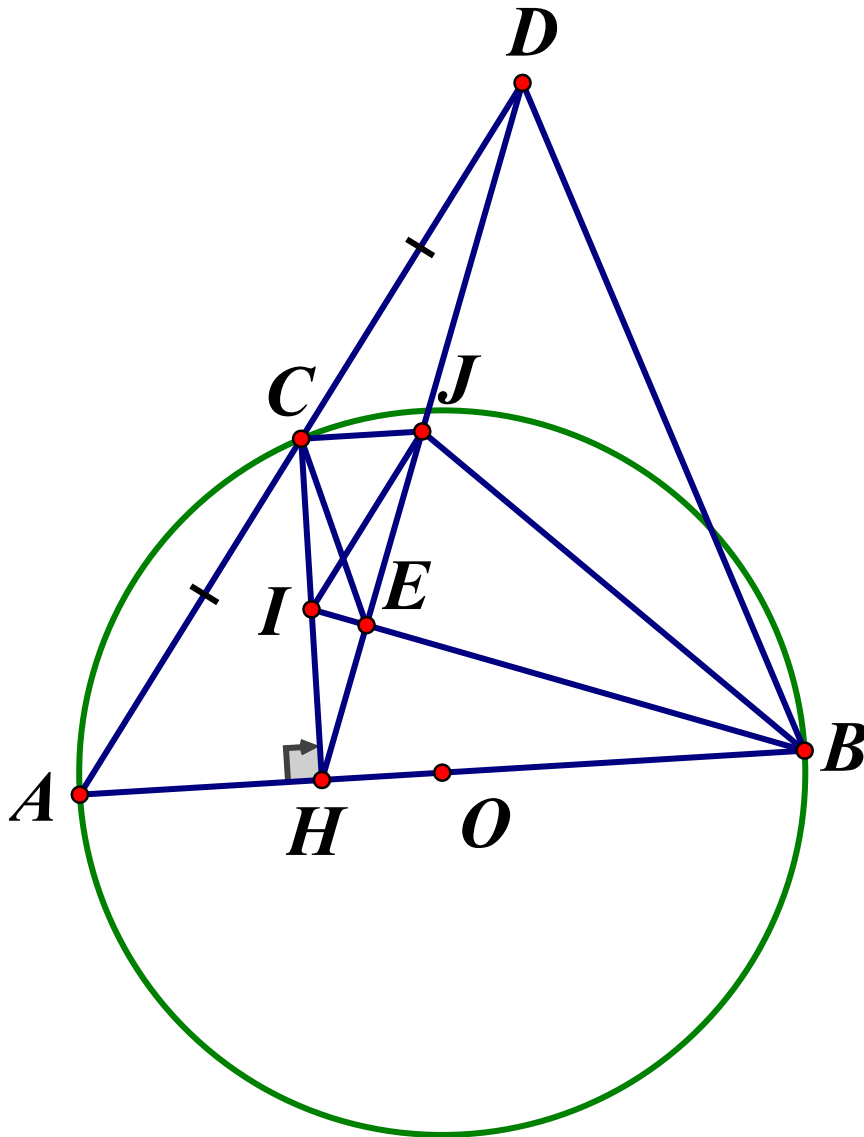
Trường hợp này không tồn tại các giá trị x, y

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x, y) = (1; 0), (x, y) = (-2; 3)$

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH

- a) Chứng minh rằng $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$
 b) Chứng minh rằng $\triangle CJH \sim \triangle HIB$
 c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh rằng $HE.HD = HC^2$

Lời giải



- a) Ta có: $\widehat{CBH} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ $\widehat{HCB}$) (1)
 Xét $\triangle CHD$: I và J lần lượt là trung điểm của CH & DH $\Rightarrow$ IJ là đường trung bình $\triangle CHD$
 $\Rightarrow IJ \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel AC \Rightarrow \widehat{CIJ} = \widehat{ACH}$ (So le trong) (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ (đpcm)
 b) Thấy CJ là đường trung bình của tam giác ADH $\Rightarrow \frac{CJ}{AH} = \frac{1}{2}$

$$\text{Mà } \frac{HI}{CH} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \text{ (do I là trung điểm CH)} \Rightarrow \frac{CJ}{AH} = \frac{HI}{CH} \Rightarrow \frac{CJ}{HI} = \frac{AH}{CH}$$

$$\text{Để chứng minh } \triangle AHC \sim \triangle CHB \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow \frac{CJ}{HI} = \frac{CH}{HB}$$

$$\text{Lại có: } CJ \parallel AB \text{ và } CH \perp AB \Rightarrow CH \perp CJ \Rightarrow \widehat{JCH} = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle CJH \text{ và } \triangle HIB: \widehat{JCH} = \widehat{IHB}; \frac{CJ}{CH} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow \triangle CJH \sim \triangle HIB \text{ (c.g.c) (đpcm)}$$

$$\text{c) Ta có: } \widehat{HIB} + \widehat{HBI} = 90^\circ. \text{ Mà } \widehat{HBI} = \widehat{CHJ} \text{ (do } \triangle CJH \sim \triangle HIB)$$

$$\Rightarrow \widehat{HIB} + \widehat{CHJ} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác HEI vuông tại E} \Rightarrow \widehat{IEJ} = 90^\circ$$

$$\text{Xét tứ giác CIEJ: } \widehat{IEJ} = \widehat{ICJ} = 90^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác CIEJ nội tiếp đường tròn}$$

$$\Rightarrow \widehat{ECI} = \widehat{EJI} \text{ hay } \widehat{ECH} = \widehat{HJI}. \text{ Mà } \widehat{HJI} \stackrel{?}{=} \widehat{HDC} \text{ (IJ//CD)} \Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{HDC}$$

$$\text{Xét } \triangle HEC \text{ và } \triangle HCD: \widehat{ECH} = \widehat{CDH} \text{ (Cmt); } \widehat{CHD} \text{ chung}$$

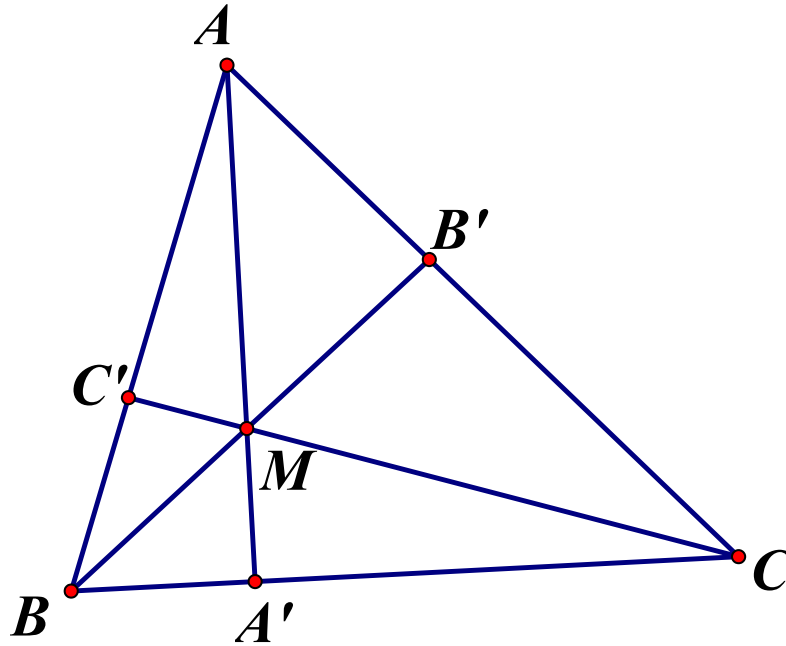
$$\Rightarrow \triangle HEC \sim \triangle HCD \text{ (g.g)}$$

$$\text{Suy ra } \frac{HE}{HC} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow HE \cdot HD = HC^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 4. Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC, các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D, E, F. Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

$$P \stackrel{?}{=} \frac{MA}{MD} + \frac{MB}{ME} + \frac{MC}{MF} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Lời giải



Gọi $S_{MBC}=S_1$; $S_{AMC}=S_2$; $S_{AMB}=S_3$ (với S_N là diện tích của hình N)

Ta có: $\frac{MA}{MA'} \cdot \frac{S_2}{S_{MA'C}} \cdot \frac{S_3}{S_{MA'B}} = \frac{S_2+S_3}{S_{MA'C}+S_{MA'B}} \cdot \frac{S_2+S_3}{S_1}$

Bn làm tương tự:

$$\frac{MB}{MB'} \cdot \frac{S_1+S_3}{S_2} ; \frac{MC}{MC'} \cdot \frac{S_1+S_2}{S_3}$$

Cộng các Tỉ số trên ta có:

$$S = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} \cdot \frac{S_2+S_3}{S_1} + \frac{S_1+S_3}{S_2} + \frac{S_1+S_2}{S_3}$$

$$= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} \right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3} \right) \geq 6$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow (S_1-S_2)^2 = (S_2-S_3)^2 \cdot (S_3-S_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow M \text{ là trọng tâm tam giác ABC (bn tự cm nha)}$$

Vậy M là trọng tâm của tam giác ABC thì S đạt giá trị nhỏ nhất (=6)

Bài 5. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

Lời giải

Nhận thấy $x = y = z = 0$ là nghiệm phương trình

Xét x, y, z khác ta có

$$\frac{5(xy+yz+zx)}{xyz} = 4 \Leftrightarrow 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) : 4$$

Ta có $|x| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1$

Tương tự với 2 cái còn lại

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \geq \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$$

Mà $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) : 4$ từ -3 đến 3 chỉ có số 0 chia hết cho 4 mà x, y, z khác 0 (loại)

Vậy bộ nghiệm duy nhất của pt là $x = y = z = 0$

----- **HẾT** -----