



Chương

Bài 3.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



Lý thuyết

1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

Cho $a = b$ trong các công thức cộng, ta được:



Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(2) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$



4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ ta có



$$(1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Công thức cộng



Phương

$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$



Ví dụ 1.1.

Rút gọn các biểu thức:

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\rho}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\rho}{4} + a\right)}$$

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

Lời giải

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\rho}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\rho}{4} + a\right)}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\rho}{4} \cos a - \sin \frac{\rho}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\rho}{4} \cos a + \cos \frac{\rho}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a$$

Ta có

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

$$\text{Ta có } B = \tan(a-b)(1 + \tan a \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b = 1$$



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{\rho}{3}\right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{\rho}{2}$$

$$(2) B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}$$

Lời giải

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{\rho}{3}\right) \text{ biết } A = \cos\left(x + \frac{\rho}{3}\right) \text{ và } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ta có

Mà $0 < x < \frac{\rho}{2}$ nên $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Do đó: $A = \cos\left(x + \frac{\rho}{3}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\rho}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\rho}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}.$

(2) $B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ biết $\cos a = \frac{1}{3}$ và $\cos b = \frac{1}{4}$

Ta có:

$$B = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \cdot (\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

$$= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$

$$= \cos^2 a \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}.$$



Ví dụ 1.3.

Với

(1) $a - b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

(2) $a + b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

Lời giải

(1) $a - b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

Ta có: $a - b = \frac{\rho}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\rho}{4} + b$

$$\tan a = \tan\left(\frac{\rho}{4} + b\right) = \frac{\tan \frac{\rho}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\rho}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}$$

Do đó:

(2) $a + b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

Ta có: $(1 + \tan a)(1 + \tan b)$

$$= (1 + \tan a) \left(1 + \tan\left(\frac{\rho}{4} - a\right)\right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}\right) = (1 + \tan a) \cdot \frac{2}{1 + \tan a} = 2$$



▮ Dạng 2. Công thức nhân đôi



Phương

Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$



Ví dụ 2.1.

Rút gọn các biểu thức sau

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

🔗 Lời giải

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow A \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{8}.$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

$$B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$



Ví dụ 2.2.

Tính các giá trị lượng giác của các góc $2a$ biết

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

🔗 Lời giải

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ta có } \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{13^2}} = \frac{12}{13} \quad \text{do } 0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$



$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{72}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{120}{169} : \left(-\frac{119}{169}\right) = -\frac{120}{119}.$$

(2) $\sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$

Ta có $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ do $0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{8}.$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\sqrt{17}}{8} : \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{\sqrt{17}}{9}.$$



Ví dụ 2.3.

Cho $\sin a = \frac{3}{5}$, với $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $E = \sin 2a + \tan 2a$.

Lời giải

Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{16}{25}$.

Do $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$.

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3}{-4} \Rightarrow \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{24}{7}.$$

Vậy $E = \sin 2a + \tan 2a = -\frac{24}{25} + \frac{14}{7} = \frac{74}{25}$



Ví dụ 2.4.

Chứng minh biểu thức $P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$ không phụ thuộc giá trị của x .

Lời giải

$$P = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x .



▮ **Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng**



Phương

$$(1) \quad \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \quad \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \quad \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



Ví dụ 3.1.

Biến mỗi biểu thức sau thành dạng tổng

$$(1) \quad A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) \quad B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$(3) \quad C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$(4) \quad D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

Lời giải

$$(1) \quad A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b)$$

$$A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$$

$$(2) \quad B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x (\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x \\ &= \frac{1}{4} (\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 6x = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x \end{aligned}$$

$$(3) \quad C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 4 \cos x (\cos x - \cos 5x) = 4 \cos^2 x - 4 \cos x \cos 5x \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x \end{aligned}$$

$$(4) \quad D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} D &= \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos x (\cos 2x + \cos 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x \end{aligned}$$



Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng

$$4 \cos x \cos\left(\frac{p}{3} - x\right) \cos\left(\frac{p}{3} + x\right) = \cos 3x,$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có
$$4 \cos x \cos\left(\frac{p}{3} - x\right) \cos\left(\frac{p}{3} + x\right)$$



$$= 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) + \cos \frac{2p}{3} \right]$$

$$= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $4 \cos x \cos \left(\frac{p}{3} - x \right) \cos \left(\frac{p}{3} + x \right) = \cos 3x,$ với $x \in \mathbb{R}.$



Ví dụ 3.3.

Chúng minh $S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} - x \right)$ không phụ thuộc giá trị của

Lời giải

Ta có

$$S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} - x \right)$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4p}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4p}{3} - 2x \right)}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4p}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{4p}{3} - 2x \right) \right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4p}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x = \frac{3}{2}.$$

Vậy $S = \frac{3}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).



▮ Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích



Phương

$$(1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



Ví dụ 4.1.

Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

$$(1) \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$(2) \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$(3) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$(4) \quad \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

🔑 Lời giải

$$(1) \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x) \\ &= 2 \sin 4x \cdot \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) \\ &= 4 \sin 4x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$(3) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= (\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cdot \cos x = 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x) \\ &= 4 \cos x \cdot \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

$$\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cdot \cot \frac{x-y}{2}$$



Ví dụ 4.2.

Chứng minh

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

👉 **Lời giải**

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có: $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

Ta có: $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x)$

$$= \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x$$

$$= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có: $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] = \frac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

Ta có: $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a$

$$= 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a = \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a$$



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

- » Câu 1. Rút gọn biểu thức $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$ ta được kết quả là:
A. $M = \cos x$. **B.** $M = \cos 3x$. **C.** $M = \sin x$. **D.** $M = \sin 3x$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x = \cos(2x - x) = \cos x$

- » Câu 2. Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là
A. 0 . **B.** $-\cos x$ **C.** $-2\cos x$ **D.** $\sin x - \cos x$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$\begin{aligned} & \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x \\ &= \cos 120^\circ \cos x + \sin 120^\circ \sin x + \cos 120^\circ \cos x - \sin 120^\circ \sin x - \cos x \\ &= \cos 120^\circ \cos x + \cos 120^\circ \cos x - \cos x \\ &= 2 \cos 120^\circ \cos x - \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos x - \cos x = -2 \cos x \end{aligned}$$

- » Câu 3. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$, $\cos b = \frac{3}{5}$, $\left(\frac{p}{2} < a < p; 0 < b < \frac{p}{2}\right)$. Kết quả của biểu thức $\sin(a+b)$ bằng:
A. 0 . **B.** $\frac{63}{65}$ **C.** $\frac{56}{65}$ **D.** $\frac{-33}{65}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\begin{cases} \frac{p}{2} < a < p \\ \sin a = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$$

+ Ta có:

$$\begin{cases} 0 < b < \frac{p}{2} \\ \cos b = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{-33}{65}$$

Khi đó

- » Câu 4. Trong các công thức sau, công thức nào **sai** ?
A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. **B.** $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. **D.** $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

👉 **Lời giải**

Chọn C



Ta có $\cos 6a = \cos(2 \cdot 3a) = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2\cos^2 3a - 1 = 1 - 2\sin^2 3a$ nên đáp án C sai.

» Câu 5. Đẳng thức nào **không đúng** với mọi x ?

A. $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$.

B. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

C. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

D. $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$.

» Câu 6. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Do $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} = (\sin x + \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2 \sin x \cos x$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$.

» Câu 7. Biết rằng $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(\alpha)}{b - \sin(\alpha)}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 4$.

B. $P = 1$.

C. $P = 2$.

D. $P = 3$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} + \tan 2x$

$= \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{1 - \sin^2 2x}$
 $= \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$. Vậy $a = 2, b = 1$. Suy ra $P = a + b = 3$.

» Câu 8. Biết $\sin\left(a + \frac{3p}{2}\right) + \cos\left(a + \frac{3p}{2}\right) = \sqrt{2}$. Tính $\sin(a + p) - 2 \cos(a - p)$.

A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

B. $-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

C. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\sin\left(a + \frac{3p}{2}\right) = \sin\left(a + 2p - \frac{p}{2}\right) = \sin\left(a - \frac{p}{2}\right) = -\sin\left(\frac{p}{2} - a\right) = -\cos a$.



$$\cos\left(a + \frac{3p}{2}\right) = \cos\left(a + 2p - \frac{p}{2}\right) = \cos\left(a - \frac{p}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2} - a\right) = \sin a$$

Suy ra $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow \sin a = \cos a + \sqrt{2}$.

Vì $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow 2\cos^2 a + 2\sqrt{2}\cos a + 2 = 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 a + 2\sqrt{2}\cos a + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Do đó $\sin(a+p) - 2\cos(a-p) = -\sin a + 2\cos a = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

- » Câu 9. Biết tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\sin A + \sin B + \sin C = a\cos\frac{A}{b}\cos\frac{B}{b}\cos\frac{C}{b}$ với a, b nguyên. Tính $a+b$.
- A. $a+b=6$. B. $a+b=4$. C. $a+b=2$. D. $a+b=8$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$\begin{aligned} VT &= \sin A + (\sin B + \sin C) = \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \\ &= 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \\ &= 2\sin\frac{B+C}{2} \cdot \left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) \quad \left(\text{vì } A+B+C=p \text{ nên } \frac{A}{2} = \frac{p}{2} - \frac{B+C}{2}\right) \\ &= 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $a=4; b=2$. Vậy $a+b=4+2=6$.

- » Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 2}$.
- A. -1. B. 1. C. 2. D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2\sin x + 2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + k2p$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 đạt được khi $x = -\frac{p}{2} + k2p$.

- » Câu 11. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A \cos B \cos C$ bằng
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \\ &= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C \end{aligned}$$



$$= 2 - \cos(p - C)\cos(A - B) - \cos^2 C = 2 + \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$+) \quad 2 \cos A \cos B \cos C = (\cos(A + B) + \cos(A - B)) \cos C = (-\cos C + \cos(A - B)) \cos C$$

$$= -\cos^2 C + \cos(A - B) \cos C$$

$$\Rightarrow A = 2 + \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C + \cos^2 C - \cos C \cos(A - B) = 2$$

» Câu 12. Cho biểu thức $S = \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \sin(x + 3a) + \sin(x + 4a)$. Nếu $0 < a < p$ thì S không phụ thuộc vào x khi a nhận giá trị nào?

A. $a = \frac{2p}{5}$

B. $a = \frac{2p}{5}$ hoặc $a = \frac{4p}{5}$

C. $a = -\frac{2p}{5}$ hoặc $a = \frac{4p}{5}$

D. $a = \frac{4p}{5}$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Nhân 2 vế của S với $\sin \frac{a}{2} \neq 0$ ta được

$$\sin \frac{a}{2} S = \sin \frac{a}{2} \sin x + \sin \frac{a}{2} \sin(x + a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x + 2a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x + 3a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x + 4a)$$

Ta có:

$$+ \quad \sin \frac{a}{2} \sin x = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{a}{2} - x \right) - \cos \left(\frac{a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \quad \sin \frac{a}{2} \sin(x + a) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{a}{2} + x \right) - \cos \left(\frac{3a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \quad \sin \frac{a}{2} \sin(x + 2a) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{3a}{2} + x \right) - \cos \left(\frac{5a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \quad \sin \frac{a}{2} \sin(x + 3a) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5a}{2} + x \right) - \cos \left(\frac{7a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \quad \sin \frac{a}{2} \sin(x + 4a) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{7a}{2} + x \right) - \cos \left(\frac{9a}{2} + x \right) \right]$$

$$\Rightarrow \sin \frac{a}{2} S = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{a}{2} - x \right) - \cos \left(\frac{9a}{2} + x \right) \right] = \sin \frac{5a}{2} \sin(x + 2a)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin \frac{5a}{2} \sin(x + 2a)}{\sin \frac{a}{2}}$$

Để S không phụ thuộc vào x thì $\sin \frac{5a}{2} = 0$.

Do $0 < a < p$ nên $a = \frac{2p}{5}$ hoặc $a = \frac{4p}{5}$.

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai



» Câu 13. Cho biết $\sin a = \frac{3}{5}, \cos a = -\frac{4}{5}$ và các biểu thức $A = \sin\left(\frac{p}{2} - a\right) + \sin(p+a)$;

$B = \cos(p-a) + \cot\left(\frac{p}{2} - a\right)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos a - \sin a$		
(b)	$B = \cos a + \tan a$		
(c)	$A + B = \frac{27}{20}$		
(d)	$A - B = -\frac{29}{20}$		

🔑 **Lời giải**

(a) $A = \cos a - \sin a$.

Ta có: $A = \sin\left(\frac{p}{2} - a\right) + \sin(p+a) = \cos a - \sin a = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{7}{5}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $B = \cos a + \tan a$.

Ta có: $B = \cos(p-a) + \cot\left(\frac{p}{2} - a\right) = -\cos a + \tan a = -\cos a + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{4}{5} + \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{20}$.

» **Chọn SAI.**

(c) $A + B = \frac{27}{20}$.

Ta có: $A + B = -\frac{27}{20}$.

» **Chọn SAI.**

(d) $A - B = -\frac{29}{20}$.

Ta có: $A - B = -\frac{29}{20}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» Câu 14. Cho $0 < a < \frac{p}{2}; \frac{p}{2} < b < p$ và $\tan a = 3; \tan b = -2$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\tan(a+p) = -3$		
(b)	$\tan(a+b) = -1$		
(c)	$\cot(a-b) = 1$		



(d) $\sin(a-b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

(a) $\tan(a+p) = -3$

$\tan(a+p) = \tan a = 3$

» **Chọn SAI.**

(b) $\tan(a+b) = -1$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3 + (-2)}{1 - 3 \cdot (-2)} = \frac{1}{7}$

» **Chọn SAI.**

(c) $\cot(a-b) = 1$

$\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1}{\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}} = -1$

» **Chọn SAI.**

(d) $\sin(a-b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $0 < a < \frac{p}{2}$; $\tan a = 3 \Rightarrow \cos a > 0$;

$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\sin a = \tan a \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ta có: $\frac{p}{2} < b < p$; $\tan b = -2 \Rightarrow \cos b < 0$;

$1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy

» **Chọn ĐÚNG.**

» Câu 15. Cho $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3p}{2} < x < 2p$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$		
(b)	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$		
(d)	$C = \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}$		



Lời giải

(a) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$.

Có $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Có $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Do $\frac{3p}{2} < x < 2p$ nên $\cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$.

Ta cũng có $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{5}$ mà $\frac{3p}{2} < x < 2p \Leftrightarrow \frac{3p}{4} < \frac{x}{2} < p \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0$ nên chọn

$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

Theo trên ta có

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Vậy

» **Chọn SAI.**

(d) $C = \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}$.

$$C = \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{4\sin x \cdot \cos x - (2\cos^2 x - 1)}{\frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\cos^2 x - 1} + (2\cos^2 x - 1)} = \frac{-287}{551}.$$

Có

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 16.** Biết $\sin 2a = -\frac{4}{5}, \frac{p}{2} < a < \frac{3p}{4}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos 2a = \frac{3}{5}$		
(b)	$B = (1 + 3\sin^2 a)(1 - 4\cos^2 a) = \frac{17}{25}$		
(c)	$C = \sin^4 a + \cos^4 a = \frac{7}{25}$		



(d) $D = \sin\left(2x + \frac{p}{4}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

👉 **Lời giải**

(a) $A = \cos 2a = \frac{3}{5}$

Ta có $\cos^2 2a = 1 - \sin^2 2a = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Vì $\frac{p}{2} < a < \frac{3p}{4} \Rightarrow p < 2a < \frac{3p}{2} \Rightarrow \cos 2a < 0 \Rightarrow \cos 2a = -\frac{3}{5}$

» **Chọn SAI.**

(b) $B = (1 + 3 \sin^2 a)(1 - 4 \cos^2 a) = \frac{17}{25}$

Ta có $B = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2a}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2a}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2a\right) (-1 - 2 \cos 2a)$.

Thay $\cos 2a = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \left(-1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{17}{25}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $C = \sin^4 a + \cos^4 a = \frac{7}{25}$

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $C = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{17}{25}$.

» **Chọn SAI.**

(d) $D = \sin\left(2x + \frac{p}{4}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

Ta có $\sin\left(2x + \frac{p}{4}\right) = \sin 2x \cos \frac{p}{4} + \cos 2x \sin \frac{p}{4} = \left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{-3}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 17.** Cho tam giác ABC .

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$A = 180^\circ - (B + C)$		
(b)	$\sin B + \sin(A + C) = 0$		
(c)	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$		
(d)	ΔABC cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$		

👉 **Lời giải**

(a) $A = 180^\circ - (B + C)$



Đúng vì : $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\sin B + \sin(A + C) = 0$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow B = 180^\circ - (A + C) \Leftrightarrow \sin B = \sin(180^\circ - (A + C)) = \sin(A + C)$$

$$\text{Suy ra: } \sin B - \sin(A + C) = 0$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (1)$$

$$\text{Do } \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \text{ nên } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự: } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow (\sin A + \sin B) + \sin C$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\triangle ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$

$$\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(A + C) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 18.** Biết $\tan x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{p}{2} < x < p$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -2$		
(b)	$\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$		

» **Lời giải**

(a) $\cot x = -2$.

Vì $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$ nên mệnh đề ĐÚNG



» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Có $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5}$.

Mà $\frac{p}{2} < x < p \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Mệnh đề b) SAI.

» **Chọn SAI.**

(c) $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ nên mệnh đề ĐÚNG.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x}{5\cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$

Chia cả tử và mẫu của M cho $\cos^2 x$ ta có

$$M = \frac{2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 4}{5 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{20}{19}$$

nên mệnh đề SAI.

» **Chọn SAI.**

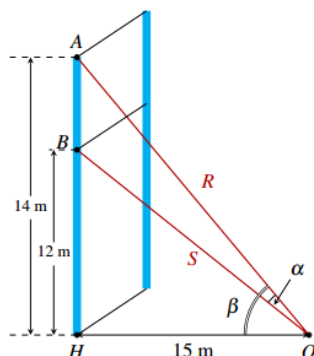
» **Câu 19.** Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + j)$ trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$). (Dùng cho ba ý a, b, c).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{p}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$.		
(b)	Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.		
(c)	Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + p)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{p}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{p}{4}\right)$ (cm).		
(d)	Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào		



cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình vẽ bên dưới). Gọi α là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan \alpha = \frac{10}{131}$.

🔗 **Lời giải**



$$x(t) = 5 \cos \left(100\pi t + \frac{p}{4} \right)$$

(a) Nếu một vật giao động theo phương trình thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$.

Ta có: $x(t) = 5 \sin \left(100\pi t + \frac{p}{4} \right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu (ứng với $t=0$) là

$$x = 5 \sin \left(\frac{p}{4} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn SAI.**

(b) Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.

$$x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t) = 5 \cdot \sin(100\pi t) = 5 \cdot \cos \left(100\pi t + \frac{3p}{2} \right)$$

Ta có:

Khi đó biên độ của giao động là 5.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là

$$x_1 = 5 \cos(100\pi t + p) \text{ (cm)} \quad \text{và} \quad x_2 = 5 \cos \left(100\pi t - \frac{p}{2} \right) \text{ (cm)}$$

$$x = 5\sqrt{2} \cos \left(100\pi t + \frac{p}{4} \right) \text{ (cm)}$$

hợp của hai dao động trên là

Ta có:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 5 \cos(100\pi t + p) + 5 \cos \left(100\pi t - \frac{p}{2} \right) = 5 \left[\cos(100\pi t + p) + \cos \left(100\pi t - \frac{p}{2} \right) \right] \\ &= 5 \cdot 2 \cos \left(100\pi t + \frac{p}{4} \right) \cos \frac{3p}{4} = -5\sqrt{2} \cos \left(100\pi t + \frac{p}{4} \right) = 5\sqrt{2} \cos \left(100\pi t - \frac{3p}{4} \right) \end{aligned}$$

» **Chọn SAI.**

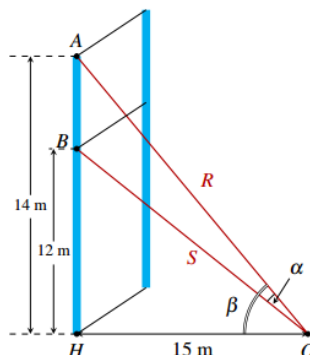
(d) Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp



trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình vẽ bên dưới). Gọi

a là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan a = \frac{10}{131}$.

Ta có $\tan b = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}$; $\tan b_1 = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15}$.



$$\tan a = \tan(b - b_1) = \frac{\tan b - \tan b_1}{1 + \tan b \tan b_1} = \frac{10}{131}.$$

Khi đó

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 20.** Cho biểu thức $P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$. Sau khi đơn giản

hóa, ta được biểu thức $P = \cos(\alpha)$. Giá trị của α bằng

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 8**

Biến đổi biểu thức P , ta có:

$$P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$$

$$= \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 5x \cdot \cos(3x + 90^\circ) = \cos 5x \cdot \cos 3x - \sin 5x \cdot \sin 3x = \cos(5x + 3x) = \cos(8x)$$

$$\Rightarrow \alpha = 8.$$

» **Câu 21.** Cho góc a thỏa mãn $\sin a = \frac{1}{5}$. Khi đó giá trị biểu thức $P = \cos^2 2x + \cos^2 x$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$. Biết rằng phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1754**

Biến đổi biểu thức P rồi thay giá trị $\sin a = \frac{1}{5}$ vào P , ta được:

$$P = \cos^2 2x + \cos^2 x$$

$$= (1 - 2\sin^2 a)^2 + (1 - \sin^2 a) = \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = \frac{1129}{625}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1129 \\ b=625 \end{cases} \Rightarrow a+b=1754$$

» **Câu 22.** Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{\cos 10x - \cos 9x - \cos 8x + \cos 7x}{\sin 10x - \sin 9x - \sin 8x + \sin 7x}$ với $x = \frac{p}{34}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

✓ **Trả lời: 0,71**

$$A = \frac{(\cos 10x + \cos 7x) - (\cos 9x + \cos 8x)}{(\sin 10x + \sin 7x) - (\sin 9x + \sin 8x)}$$

Ta có:

$$= \frac{2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{17x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{17x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)} = \cot \frac{17x}{2}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = \frac{p}{34}$ bằng $\cot \frac{17 \cdot \frac{p}{34}}{2} = \cot \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$

» **Câu 23.** Cho $\tan a = 2$ và $a \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$. Tính $A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{p}{4}\right)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

✓ **Trả lời: 1,45**

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a + 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{\tan^2 a + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Mà } a \in \left(0; \frac{p}{2}\right) \text{ nên } \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ và } \sin a = \tan a \cdot \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Mặt khác } A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{p}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{p}{4} + \sin \frac{p}{4} \cos \frac{a}{2} \right) \Leftrightarrow A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{a}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right) \Leftrightarrow A = 2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \Leftrightarrow A = 2 \left(\frac{1 - \cos a}{2} \right) + \sin a$$

$$\Leftrightarrow A = \sin a - \cos a + 1 \Leftrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \Leftrightarrow A = \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \approx 1,45$$

» **Câu 24.** Cho $\sin a = \frac{3}{5}$ và $\frac{p}{2} < a < p$. Giá trị gần đúng của biểu thức $E = \frac{2 \tan a - \cot a}{\tan a + 3 \cot a}$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng trăm)?

Lời giải

✓ **Trả lời: 0,04**

$$\text{Vì } \frac{p}{2} < a < p \Rightarrow \cos a < 0 \text{ nên } \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan a - \cot a}{\tan a + 3 \cot a} = \frac{2}{57} \approx 0,04$$

» **Câu 25.** Cho biểu thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

$$A = \cos(5p - x) - \sin\left(\frac{3p}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3p}{2} - x\right) + \cot(3p - x)$$

» Khi đó giá trị của $10A$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 0

Ta có $\cos(5p - x) = \cos(p - x + 2.2p) = \cos(p - x) = -\cos x$

$$\sin\left(\frac{3p}{2} + x\right) = \sin\left(p + \frac{p}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{p}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3p}{2} - x\right) = \tan\left(p + \frac{p}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{p}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3p - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0 \Rightarrow 10A = 0$$

» Câu 26. Đơn giản biểu thức

$$P = \left(\frac{1 - \cos a}{\sin^2 a} + \frac{1}{1 + \cos a} \right) \sin^2 a.$$

Lời giải

Trả lời: 2

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a} + \frac{1}{1 - \cos a} &= \frac{1 - \cos a}{1 - \cos^2 a} + \frac{1}{1 - \cos a} \\ &= \frac{1 - \cos a}{(1 - \cos a)(1 + \cos a)} + \frac{1}{1 - \cos a} = \frac{1}{1 + \cos a} + \frac{1}{1 - \cos a} = \frac{2}{\sin^2 a} \end{aligned}$$

$$P = \left[\frac{1 - \cos a}{(1 - \cos a)(1 + \cos a)} + \frac{1}{1 - \cos a} \right] \sin^2 a = \frac{2}{\sin^2 a} \cdot \sin^2 a = 2$$

» Câu 27. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\cos^4 x - \cos 2x + m|$ bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập S .

Lời giải

Trả lời: -1

$$\text{Ta có } y = |\cos^4 x - \cos 2x + m| = |\cos^4 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + m| = |\sin^4 x + m|$$

$$\text{Đặt } t = \sin^4 x, \quad t \in [0; 1]$$

$$\text{Suy ra } y = |t + m|, \quad t \in [0; 1]$$

Xét hàm số $f(t) = t + m$ trên đoạn $[0; 1]$.

$$\max_{t \in [0; 1]} f(t) = f(1) = m + 1 \quad \min_{t \in [0; 1]} f(t) = f(0) = m$$

Trường hợp 1: Xét $m \geq 0$ ta có $\min_{t \in [0; 1]} y = m \Leftrightarrow m = 3$ (TM).

Trường hợp 2: Xét $m \leq -1$ ta có $\min_{t \in [0; 1]} y = -m - 1 \Rightarrow -m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = -4$ (TM).

Trường hợp 3: Xét $-1 < m < 0$ ta có $\min_{t \in [0; 1]} y = 0 \Rightarrow 0 = 3$ (vô lý)

$$\text{Vậy } S = \{-4; 3\} \Rightarrow -4 + 3 = -1$$

» Câu 28. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn $a + c = 4b$.

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}.$$



Lời giải

✓ **Trả lời: 0,6**

Áp dụng định lý sin, ta có: $a+c=4b$

$$\Leftrightarrow 2R\sin A + 2R\sin C = 8R\sin B \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 4\sin B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 8\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 4\sin \frac{B}{2} \quad \sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2} \neq 0, \quad \frac{B}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 4\cos \frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 5\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 3\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Vậy $P=0,6$.

» **Câu 29.** Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + j)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $j \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}, \quad x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}$$

Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

✓ **Trả lời: -0,26**

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ta có

$$= 2 \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy pha ban đầu bằng $-\frac{\pi}{12} \approx -0,26$.

----- Hết -----