HSG9 Tỉnh Bắc Ninh 2023 2024

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thứcP = $\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$,với x>0,x≠1

2. Cho đường thẳng d: y = ax+b (a khác 0). Tìm a,b biết d đi qua M (1;2) và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân, O là gốc tọa độ.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $5x^2$ + 6x + 4 = 3(x + 1) $\sqrt{3x^2+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ x^3-5x^2+3x-8+2y=0\end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x; y) của phương trình

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{10}\right|=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}}$$

2. Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn p = a^2+b^2 là số nguyên tố và p - 5 chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 by chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. Đường thẳng MA cắt DB và DC theo thứ tự tại H và K, đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N.

1. Chứng minh rằng tứ giác DHEM nội tiếp và HE là phân giác của góc MHC

2. Gọi G là giao điểm của KF và HẸ. Chứng minh rằng tứ giác GHOF là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.

3. Chứng minh rằng $\frac{HN}{HM}=\frac{DK}{DC}$

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kinh của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau, tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bảng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quả trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tông các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?

2. Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đăng thức

$$(a^2b+b^2c+c^2a)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\le\frac{3}{2}$$

HẾT

HƯỚNG DẪN CHẤM

1. Rút gọn biểu thức P = $\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$,với x>0,x≠1

2. Cho đường thẳng d: y = ax+b (a khác 0). Tìm a,b biết d đi qua M (1;2) và cắt các trụcvOx, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân, O là gốc tọa độ.

1 Ta có

P = $\frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x})(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}))1+2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$

2 Vì đường thẳng (d) đi qua M(1;2) nên a+b=2. Đường thẳng (d) cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A (-$\frac{b}{a};0)$ và B(0;b). Tam giác OAB cân khi OA=OB=> $\left|\frac{b}{a}=|b|\right|$

⇔$|a|$=1(vì b≠0)⇔ a=±1. Từ đó ta tìm được (a,b)є$\{(-1;3);(1;1)\}$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $5x^2$ + 6x + 4 = 3(x + 1) $\sqrt{3x^2+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ x^3-5x^2+3x-8+2y=0\end{cases}$

1) Phương trình tương đương $3x^2+4-3(x+1)\sqrt{3x^2+4}+2x^2+6x=0$

Đặt t=$\sqrt{3x^2+4}$được phương trình t^2-3(x+1)t+2$x^2+6x=0$

Ta có Δ=9$(x+1)^2-4(2x^2+6x)=(x-3)^2$=>$\begin{cases}t=2x\\ t=x+3\end{cases}$

Với t=2x=>$\sqrt{3x^2+4}=2x$⇔$\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-4=0\end{cases}$⇔x=2

Với t=x+3=> $\sqrt{3x^2+4}=x+3$⇔$\begin{cases}x\geq -3\\ 2x^2-6x-5=0\end{cases}$⇔x=$\frac{3\pm\sqrt{19}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm S= $\left\{\frac{3-\sqrt{19}}{2};2;\frac{3+\sqrt{19}}{2}\right\}$

2 ĐKXĐ y≤$\frac{5}{2}$.Từ phương trình $(4x^2+1)x(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

⇔$(2x)^3+2x=(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y}(1)$

Nếu 2x>$\sqrt{5-2y}=¿(2x)^3+2x>(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y}$

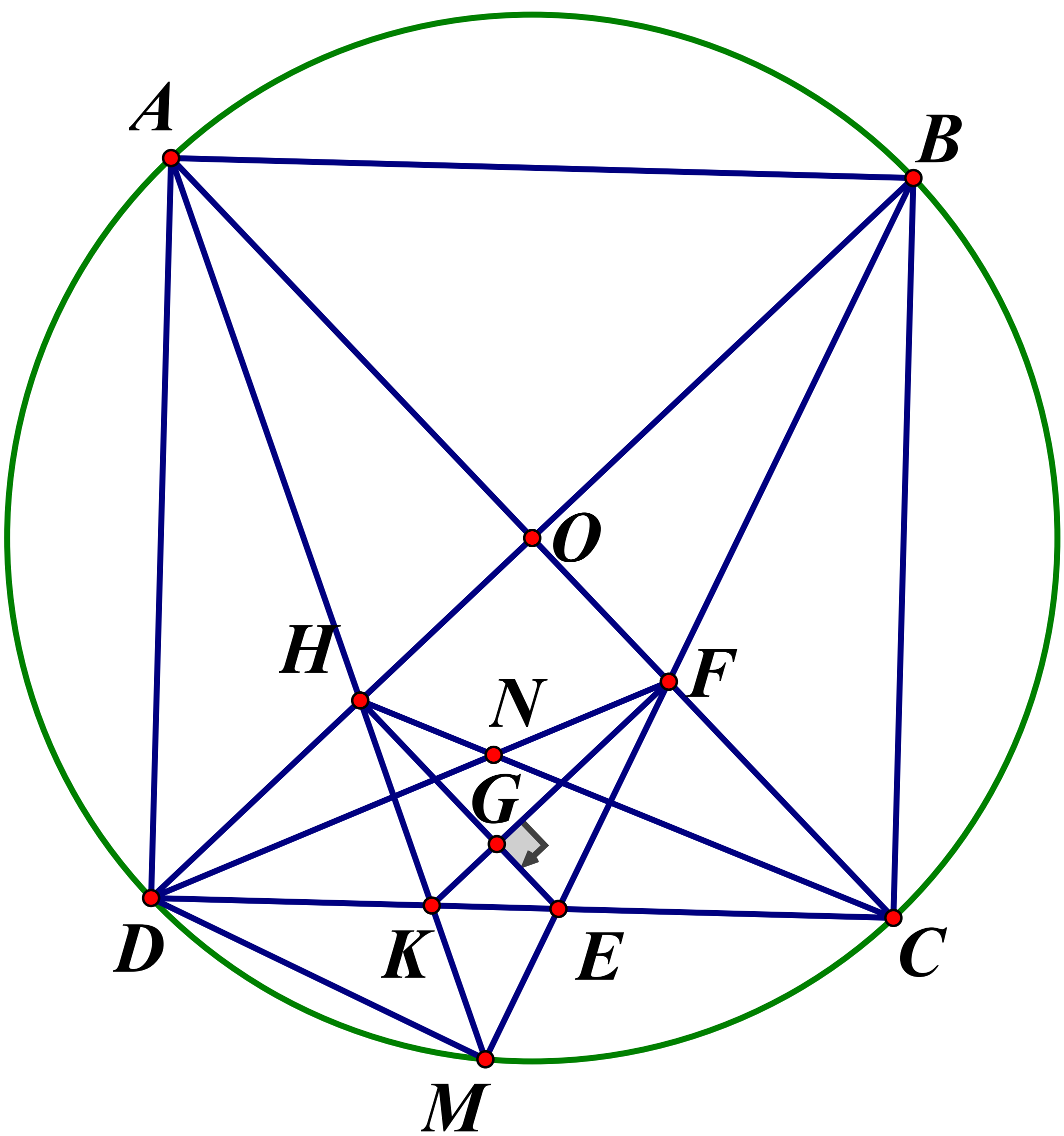
Nếu 2x<$\sqrt{5-2y}=¿(2x)^3+2x<(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y}$
Nếu 2x=$\sqrt{5-2y}=¿(2x)^3+2x=(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y}$
Do đó từ (1) ta có 2x=$\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2y=5-4x^2\end{cases}$
Thay 2y=5-$4x^2$ vào phương trình $x^3-5x^2+3x-8+2y=0\,được$
$2(x-1)^3=(x+1)^3\Leftrightarrow$x=$\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$=>y=$\frac{5}{2}-2(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1})^2$
Câu 3. (4,0 điểm)
1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x; y) của phương trình

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{10}\right|=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}}$$

2. Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn p = a^2+b^2 là số nguyên tố và p - 5 chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 by chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

1 Ta có $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{10}\right|=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}}$
$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}$
$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\Leftrightarrow\sqrt{x}=10-\sqrt{y}$
$\Leftrightarrow$x=y-20$\sqrt{y}$+100
Vì x,y nguyên dương nên y phải là số chính phương
Lập luận tương tự ta cũng có x là số chính phương. Đặt x=$a^2, y=b^2\,với\,a,b\epsilon N*¿$
T có a+b=10. Suy ra (a,b)ϵ$\{(1;9);(2;8);\ldots;(9;1)\}$
=>(x;y)ϵ$\{(1;81);(4;64);\ldots;(81;1)\}$
2. Vì (p-5):9=>p=8k+5(kϵN)
Ta có $(ax^2)^{4k+2}-(by^2)^{4k+2}\vdots(ax^2-by^2\vdots p$
=>$(a^{4k+2}.x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4})$:p
Nhận thấy $a^{4k+2}.x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4}$
=$(a^{4k+2}+b^{4k+2})x^{8k+4}-b^{4k+2}(x^{8k+4}+y^{8k+4})$
Do $(a^{4k+2}+b^{4k+2})=(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}:(a^2+b^2)=p\,và\,b<p\,nên(x^{8k+4}+y^{8k+4})\vdots p(*)$
Neuse trong hai số x,y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p. Nếu cả hai số x,y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có $x^{8l+4}=x^{p-1}\equiv 1$ (mod p);
$y^{8l+4}=y^{p-1}\equiv 1$ (mod p)=>$x^{8k+4}+y^{8k+4}v\equiv 2(mod\,p)$ mâu thuẫn với (*)
Vậy cả hai số x,y đều chia hết cho p
Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. Đường thẳng MA cắt DB và DC theo thứ tự tại H và K, đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N.

1. Chứng minh rằng tứ giác DHEM nội tiếp và HE là phân giác của góc MHC
2. Gọi G là giao điểm của KF và HE. Chứng minh rằng tứ giác GHOF là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.
3. Chứng minh rằng $\frac{HN}{HM}=\frac{DK}{DC}$



1)Vì hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn nên O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông ABCD. Ta có $\widehat{HDE}=\widehat{HME}=45°$ nên tứ giác DHEM nội tiếp. Suy ra $\widehat{DhE}=\widehat{DME}=90°$

Lại có BD là trung trực của AC, mà H thuộc BD nên tam giác AHC cân tại H. Suy ra HB là tia phân giác của $\widehat{AHC}$

Ta có $\widehat{OHE}=\frac{1}{2}\widehat{AHM}=$ ¿ $\widehat{EHC}+\widehat{OHC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{AHC}+\widehat{MHC}\right)$, *mà*

$\widehat{BHC}=\frac{1}{2}\widehat{AHC}=¿\widehat{EHC}=\frac{1}{2}\widehat{MHC}$

Do đó HE là tia phân giác của $\widehat{MHC}$

2. Tam giác có HDE có $\widehat{DHE}=90°$; $\widehat{HDE}=45°=¿\widehat{GEK}=45°$

Ta có $\widehat{MKC}=\frac{1}{2}\left(sđ\,\widehat{AD}+sđ\,\widehat{MC}\right);\widehat{MFC}=\frac{1}{2}\left(sđ\,\widehat{AB}+sđ\,\widehat{MC}\right)mà\,\widehat{AB}=\widehat{AD}=¿\widehat{MKC}=\widehat{MFC}$

Suy ra tứ giác MKFC nội tiếp. Lại có $\widehat{KMC}=\widehat{AMC}=90°=¿\widehat{KFC}=90°\,hay\,KF\perp AC$

Vì $\widehat{GHO}=\widehat{HOF}=\widehat{GFO}=90°$nên GHOF là hình chữ nhât

Ta có
$\widehat{HGF}=90°=¿\widehat{HGK}=90°\,và\,\widehat{KGE}=90°\,suy\,ra\,tam\,giác\,KGE\,vuông\,cân\,tại\,G\,,nên\,GK=¿(1)$

Vì $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}\,nên\,MB$là phân giác của $\widehat{AMC}$.Tam giác MHC có HE là phân giác của $\widehat{MHC}\,và\,ME$ là phân giác của $\widehat{HMC}$ nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMC. Do đó EC là phân giác của $\widehat{HCM}$, suy ra $\widehat{NCD}=\widehat{MCD}$.Tương tự ta cũng có KF là phân giác của $\widehat{MFD}$

Ta cũng có $\widehat{DMF}$.Do đó dẫn đến K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DMF, suy DC là phân giác của $\widehat{NDM}$

Từ đó suy ra $\widehat{NDC}=\widehat{MDC}$. Hai tam giác NCD và MCD có
$\widehat{NDC}=\widehat{MDC};\widehat{NCD}=\widehat{MCD}\,và\,DC$ chung nên ΔNCD=ΔMCD=>NC=MC

Hai tam giác NKC và MKC có NC=MC;$\widehat{NCK}=\widehat{MCK}$; KC chung nên ΔNKC=ΔMKC

Suy ra $\widehat{KNC}=\widehat{KMC}=90°=¿\widehat{HNK}=90°$ mà $\widehat{HGK}=90°$ nên HNGK nội tiếp

Lại có $\widehat{KHG}=\widehat{GHN}=¿\widehat{NG}=\widehat{KG}=¿$>Gk=GN(2)

Từ (1) và (2) suy ra GK=GN=GE, hay G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE

3 Vì $\widehat{KMC}=\widehat{KNC}=90°$ nên tứ giác MKNC nội tiếp, suy ra $\widehat{HMN}=\widehat{NCH}$

Hai tam giác HMN và HCK có $\widehat{MHC}$ chung $\widehat{MHN}=\widehat{KCH}=¿\Delta HMN\quad\Delta HCK$

=>$\frac{HN}{HM}=\frac{HK}{HC}(3)$

Vì HE là phân giác của $\widehat{KHC}$ nên $\frac{HK}{HC}=\frac{EK}{EC}(4)$

Vì HE là phân giác của $\widehat{KMC}$ nên $\frac{EK}{EC}=\frac{MK}{MC}(5)$

Lại có $\Delta HMN \quad \Delta HCK = ¿ \frac{MK}{MC}=\frac{MD}{MB}(6)$

Vì MH là phân giác của $\widehat{DMB}$ nên $\frac{HD}{HB}=\frac{MD}{MB}(7)$

Do AB//DK nên $\frac{HK}{HA}=\frac{HD}{HB}=\frac{DK}{DC}(8)$

Từ (3),(4),(5),(6),(7),(8) suy ra $\frac{HN}{HM}=\frac{DK}{DC}$

Câu 5. (2,0 điểm)
1. Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kinh của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút
của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước
3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành
4 cung bằng nhau, tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bảng tổng của hai
số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quả trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tông
các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?
2. Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đãng thức

$$\left(a^2 b+b^2 c+c^2 a\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\le\frac{3}{2}$$

1. Gọi S_n. là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau n bước, n∈ N*.
Sau bước 1, trên đường tròn có 2^1số là 1,1 nên $S_1 = 1 + 1 = 2 = 2.3^0$
Sau bước 2, trên đường tròn có 2^2số là 1,2,1,2 nên $S_2 = 1 +2+ 1+2 = 6 = 2.3^1$
Sau bước 3, trên đường tròn có 2^3số là 1,3,2,3,1,3,2,23 nên $S_3 = 18 = 2.3^2$
Dự đoán sau n bước tổng là $S_n = 2.3^{n-1}$ Ta sẽ chứng minh S n = $2S_n = 2.3^{n-1}$ (*) ∀n∈N*
Thật vậy, với n = 1 (*) đúng
Giả sử (*) đúng với n =k(kn∈ N*.) , nghĩa là sau k bước trên đường tròn đã cho có các số vớtổng là $S_k = 2.3^{k-1}$
Sang bước thứ k+1, ta coi 2^k điểm đã ghi số là 2^k điểm chia, nên đường tròn được chia thành 2^k cung bằng nhau.

Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tươngứng. Do đó $S_{k+1} = ¿\ S_k + 2S_k = 3S_k = 2.3^k$

Vậy $S_n = 2.3^{n-1}$với mọi n∈ N* do đó $S_{2021} = 2.3^{2020}$

2. Ta có (a+b+c)($a^2+b^2+c^2$) = (a^2 + ab^2)+(b+bc^2)+(c^2+c^2)+($a^2b+b^2c+c^2a$)

Áp dụng BĐt Cauchy ta có $(a^3+ab^2)+(b^3+bc2^{\square})+(c^3+ca^2) \geq 2$($a^2b+b^2c+c^2a$)

Do đó (a+b+c)($a^2+b^2+c^2$)≥3($a^2b+b^2c+c^2a$)

⇔ $a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$.suy ra

$$(a^2b+b^2c+c^2a)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right) \leq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right) \leq \frac{1}{3}$$

Ta có 1= $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ⇔ $a^2+1 \geq a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$

Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT Cauchy-schwarz ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{c+a}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}\right);$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{1.\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2}} \leq \frac{1}{2}\left[1+\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2}\right] \leq \frac{1}{2}(1+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2})$$

Suy ra $\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{2}(1+\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2})(1)$

Tương tự $\frac{a+b+c}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$

$\frac{a+b+c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{1}{2}(1+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{b+c}+\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2})(2)$

Từ (1),(2) và (3) ta có $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)$

$\leq \frac{1}{6}\left(3+\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

BĐT đã chứng minh

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=$\frac{1}{\sqrt{3}}$