

CHUYÊN ĐỀ: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Dạng 1: PHÂN TÍCH ĐA THỨC BẬC BA VÀ BẬC 4

A. LÝ THUYẾT

Phương pháp:

Dùng máy tính nhằm nghiệm

hoặc tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có 1 nghiệm $x=1$

Tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là $x=-1$

1 số HĐT đáng nhớ:

$$1, (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2, (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3, a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$4, a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$5, a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$6, 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$7, (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$8, a^4 + b^4 = (a+b)(a-b) \left[(a+b)^2 - 2ab \right]$$

$$9, a^4 + b^4 = \left[(a+b)^2 - 2ab \right]^2 - 2(ab)^2$$

$$10, a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$11, a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$12, a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

B. LUYỆN TẬP

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$

HD:

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1, 3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử $(a-1)$, $(a-3)$ và $(a+8)$,

$$Ta có: a^3 + 4a^2 - 29a + 24 = (a^3 - a^2) + (5a^2 - 5a) + (-24a + 24)$$

$$a^2(a-1) + 5a(a-1) - 24(a-1) = (a-1)(a^2 + 5a - 24) = (a-1)(a-3)(a+8)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

HD:

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

Và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{-6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\text{a thức trở thành : } x^2 (t^2 + 2 + 6t + 7) = x^2 (t^2 + 6t + 9) = x^2 (t + 3)^2$$

Đ

$$\text{Thay } t \text{ trở lại ta được : } x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 3 \right)^2 = x^2 \left(\frac{x^2 - 1 + 3x}{x} \right)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

HD :

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$

HD :

Với dạng này, ta chỉ việc lấy số nhỏ nhất nhân với số lớn nhất, để tạo ra những số hạng giống nhau :

$$(x + 1)(x + 7)(x + 3)(x + 5) + 15 = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$$

$$\text{Đặt } x^2 + 8x = t \Rightarrow (t + 7)(t + 15) + 15 = t^2 + 22t + 105 + 15 = t^2 + 22t + 120$$

$$= (t + 10)(t + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x + 6)(x + 2)$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2x^2 + 1$

HD :

Nhận thấy ngay đa thức trên là hằng đẳng thức nên ta có :

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : $(3x - 1)$

$$\text{nên ta có : } 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$

$$= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : $(2x - 1)$
Nên ta có : $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3$
 $= x^2(2x - 1) - 2x(2x - 1) + 3(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 2x + 3)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = \frac{-1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : $(3x + 1)$
Ta có : $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 3x^3 + x^2 - 15x^2 - 5x + 9x + 3$
 $x^2(3x + 1) - 5x(3x + 1) + 3(3x + 1) = (3x + 1)(x^2 - 5x + 3)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

HD :

bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = -1$ và $x = -2$
Như vậy ta có : $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

HD:

Ta có:
 $(x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

Bài 11: Phân tích thành nhân tử: $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$

HD:

$= x^4 + 2004x^2 + 2004x - x + 2004 = (x^4 - x) + 2004(x^2 + x + 1)$
 $= x(x^3 - 1) + 2004(x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2004(x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2004)$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x - 2001.2002$

HD :

Ta có: $x^2 - x - 2001(2001 + 1) = x^2 - x + 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001)$
 $(x - 2001)(x + 2001) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

HD :

$$x(x+10)(x+4)(x+6)+128=(x^2+10x)(x^2+10x+24)+128$$

Đặt : $x^2+10x=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$$t(t+24)+128=t^2+24t+128=(t+8)(t+16)$$

Thay t trở lại đa thức ta được : $(x^2+10x+8)(x^2+10x+16)=(x^2+10x+8)(x+2)(x+8)$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

$$\text{Đặt } x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

Đa thức trở thành :

$$x^2(t^2+2+6t+7)=x^2(t^2+6t+9)=x^2(t+3)^2$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$$

$$\text{Vậy } x^4+6x^3+7x^2-6x+1=(x^2+3x-1)^2$$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

HD :

$$\text{Đặt } x^2+x=t \text{ khi đó đa thức trở thành : } (t+1)(t+2)-12=t^2+3t-10=(t-2)(t+5)$$

$$\text{Thay t trở lại đa thức ta được : } (x^2+x-2)(x^2+x+5)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2-4)(x^2-10)-72$

HD :

Đặt $x^2-4=t$ khi đó đa thức trở thành :

$$t(t-6)-72=t^2-6t-72=(t-12)(t+6)=(x^2-16)(x^2+2)=(x-4)(x+4)(x^2+2)$$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3-11x^2+6x+1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3-11x^2+6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Đa thức trở thành :

$$x^2(t^2 - 2 + 6t + 7) = x^2(t^2 + 6t + 5) = x^2(t+1)(t+5)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 5 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 1 + x}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 1 + 5x}{x} \right) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)+1$

HD :

$$\text{Ta có : } (a+1)(a+4)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+5a+4)(a^2+5a+6)+1$$

$$\text{Đặt } a^2+5a+5=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } (t-1)(t+1)+1=t^2=(a^2+5a+5)^2$$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

HD :

$$\text{Ta có : } (x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-24 = (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$

$$\text{Đặt : } x^2+7x+11=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành}$$

$$(t-1)(t+1)-24=t^2-25=(t-5)(t+5)=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

HD :

$$(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4 = (12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)-4$$

$$\text{Đặt } 12x^2+11x=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } (t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$$

$$(12x^2+11x-2)(12x^2+11x+3)$$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

HD :

$$\text{Ta có : } 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2 = 4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$$

$$x^2 \left[4 \left(x + 17 + \frac{60}{x} \right) \left(x + 16 + \frac{60}{x} \right) - 3 \right], \text{ Đặt : } x + \frac{60}{x} = t, \text{ Khi đó đa thức trở thành :}$$

$$x^2 [4(t+17)(t+16)-3] = x^2(4t^2+132t+1085) = x^2(2t+31)(2t+35)$$

$$= x^2 \left(2x + \frac{120}{x} + 31 \right) \left(2x + \frac{120}{x} + 35 \right) = (2x^2+31x+120)(2x^2+35x+120)$$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)-5$

HD :

$$\text{Đặt : } x^2+3x=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành :}$$

$$(t+1)(t-3)-5=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$$

$$(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

HD :

$$(x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$$

Bài 24: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12$

HD :

Nhắm thấy đa thức có nghiệm là $x=2$, hay có 1 nhân tử là $x - 2$

Ta có :

$$6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12 = (6a^4 - 12a^3) + (19a^3 - 38a^2) + (a^2 - 2a) - (6a - 12)$$

$$6a^3(a-2) + 19a^2(a-2) + a(a-2) - 6(a-2) = (a-2)(6a^3 + 19a^2 + a - 6)$$

$$= (a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)$$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

HD :

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

$$\text{Ta có : } x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = (x^4 + x^3) + (5x^3 + 5x^2) + (8x^2 + 8x) + (4x + 4)$$

$$= x^3(x+1) + 5x^2(x+1) + 8x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

$$= (x+1)^2(x+2)^2$$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x$

HD :

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$$

$$\text{Đặt: } (x^2 + 4x + 8) = y \Rightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 \Rightarrow (y+x)(y+2x)$$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

HD :

$$x^4 + x^2 + 1 + 2009x^2 + 2009x + 2009 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2009(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)$$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24$

HD :

$$\text{Ta có : } (x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24 = (x-1)(x+4)(x-2)(x+3) - 24$$

$$(x-2)(x+4)(x-1)(x+3) - 24 = (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3) - 24$$

$$\text{Đặt : } x^2 + 2x = t, \text{ khi đó đa thức trở thành : } (t-8)(t-3) - 24 = t^2 - 11t = t(t-11)$$

Thay t trở lại ta được : $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) = x(x + 2)(x^2 + 2x - 11)$

Bài 29: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 2x + 7) - (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3)$

HD :

Đặt : $x^2 + 2x = t$, khi đó đa thức trở thành :

$(t + 7) - (t + 4)(t + 3) = t + 7 - t^2 - 7t - 12 = -t^2 - 6t - 5 = -(t + 1)(t + 5)$, Thay t trở lại ta

được :

$$- (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 5) = - (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 5)$$

Bài 30: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1$

HD :

$$x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = x^2 \left(x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 10 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 26 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 + 10t + 26) = x^2 (t^2 + 10t + 24) = x^2 (t + 4)(t + 6)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 4 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 6x + 1}{x} \right) = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

Vậy $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$

Bài 31: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) - 1680$

HD :

$$(x - 4)(x - 7)(x - 5)(x - 6) - 1689 = (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) - 1680$$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = t$, Khi đó đa thức trở thành :

$$(t - 1)(t + 1) - 1680 = t^2 - 1681 = (t - 41)(t + 41)$$

Thay t trở lại đa thức ta được :

$$(x^2 - 11x - 12)(x^2 - 11x + 70) = (x - 12)(x + 1)(x^2 - 11x + 70)$$

Bài 32: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

HD :

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = x^2 \left(x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 + t - 4) = x^2 (t^2 + t - 6) = x^2 (t - 2)(t + 3)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 3x + 1)$$

Vậy $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x - 1)^2 (x^2 + 3x + 1)$

Bài 33: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$

HD :

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = x^2 \left(x^2 - 7x + 14 + \frac{-7}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 - 7t + 14) = x^2 (t^2 - 7t + 12) = x^2 (t - 3)(t - 4)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x} \right) = (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 1)$$

Vậy $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1)$

$$A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$

Bài 34: Cho biểu thức:

a, Phân tích A thành nhân tử

b, Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì $A < 0$

HD:

a) Ta có: $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2$

$$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a)$$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$$b + c - a > 0, b + c + a > 0, b - c - a < 0, b - c + a > 0 \Rightarrow A < 0$$

Dạng 2: THÊM BỐT HẠNG TỬ

I. Phương pháp :

- Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sử dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,

- Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng

thức số 3 : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

II. Luyện tập:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $4x^4 + 81$

b, $64x^4 + y^4$

HD :

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } 4x^4 + 81 &= (2x^2)^2 + 9^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 9 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 9 = (2x^2 + 9)^2 - 36x^2 \\ &= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 64x^4 + y^4 &= (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2 \cdot 8x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot 8x^2 \cdot y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - 16x^2 y^2 \\ &= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + 4xy + y^2)(8x^2 - 4xy + y^2) \end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } 4x^4 + y^4 \qquad \text{b, } 4x^8 + 1 \qquad \text{c, } x^4 y^4 + 4$$

HD :

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } 4x^4 + y^4 &= (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot y^2 - 4x^2 y^2 \\ &= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 4x^8 + 1 &= (2x^4)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x^4 \cdot 1 - 4x^4 \\ &= (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 = (2x^4 + 2x^2 + 1)(2x^4 - 2x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } x^4 y^4 + 4 &= (x^2 y^2)^2 + 2^2 = (x^2 y^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 2 - 4x^2 y^2 \\ &= (x^2 y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 y^2 - 2xy + 2)(x^2 y^2 + 2xy + 2) \end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^8 + x^4 + 1 \qquad \text{b, } x^7 + x^5 + 1$$

HD :

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + x^4 + x^4 + 1 - x^4 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 \\ &= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } x^7 + x^5 + 1 &= x^7 + x^5 + (x^2 + x) + 1 - x^2 - x = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^6 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + x^3 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^7 + x^2 + 1 \qquad \text{b, } x^5 + x - 1 \qquad \text{c, } x^8 + x + 1$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^7 + x^2 + 1 &= (x^7 - x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } x^5 + x - 1 &= (x^5 + x^2) + (-x^2 + x - 1) = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= x^2(x+1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } x^8 + x + 1 &= (x^8 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $64x^4 + y^4$

b, $4x^4 + y^4$

c, $x^4 + 324$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } 64x^4 + y^4 &= (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 16x^2.y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 \\ &= (8x^2 + y^2 - 4xy)(8x^2 + y^2 + 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 4x^4 + y^4 &= (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.2x^2.y^2 - 4x^2.y^2 \\ &= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } x^4 + 324 &= (x^2)^2 + (18)^2 = (x^2)^2 + (18)^2 + 2.x^2.18 - 36x^2 \\ &= (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 18 + 6x)(x^2 + 18 - 6x) \end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^4 + 64$

b, $81x^4 + 4y^4$

c, $x^4 + 4y^4$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^4 + 64 &= (x^2)^2 + 8^2 = (x^2)^2 + 8^2 + 2.x^2.8 - 16x^2 \\ &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 81x^4 + 4y^4 &= (9x^2)^2 + (2y^2)^2 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.9x^2.2y^2 - 36x^2.y^2 \\ &= (9x^2 + 2y^2)^2 - (6xy)^2 = (9x^2 + 2y^2 - 6xy)(9x^2 + 2y^2 + 6xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } x^4 + 4y^4 &= (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.x^2.2y^2 - 4x^2.y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^4y^4 + 4$

b, $4x^4y^4 + 1$

c, $4x^4 + 81$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^4y^4 + 4 &= (x^2y^2)^2 + 2^2 = (x^2y^2)^2 + 2^2 + 2.x^2y^2.2 - 4x^2.y^2 \\ &= (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 - 2xy + 2)(x^2y^2 + 2xy + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 4x^4y^4 + 1 &= (2x^2y^2)^2 + 1^2 = (2x^2y^2)^2 + 1^2 + 2.2x^2y^2.1 - 4x^2.y^2 \\ &= (2x^2y^2 + 1)^2 - (2xy)^2 = (2x^2y^2 + 1 + 2xy)(2x^2y^2 + 1 - 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } 4x^4 + 81 &= (2x^2)^2 + 9^2 = (2x^2)^2 + 9^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 9 - 36x^2 \\ &= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x) \end{aligned}$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } 64x^4 + y^4 \qquad \text{b, } a^4 + 64 \qquad \text{c, } a^4 + 4b^2$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } 64x^4 + y^4 &= (8x^2)^2 + (y^2)^2 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2 \cdot 8x^2 \cdot y^2 - 16x^2 y^2 \\ &= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } a^4 + 64 &= (a^2)^2 + 8^2 = (a^2)^2 + 8^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 8 - 16a^2 \\ &= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } a^4 + 4b^4 &= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 2b^2 - 4a^2 b^2 \\ &= (a^2 - 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2b^2 + 2ab)(a^2 - 2b^2 - 2ab) \end{aligned}$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^4 + 4 \qquad \text{b, } 4x^8 + 1 \qquad \text{d, } x^4 + 4$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 4x^8 + 1 &= (2x^4)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x^4 \cdot 1 - 4x^4 = (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 \\ &= (2x^4 + 1 - 2x^2)(2x^4 + 1 + 2x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^{64} + x^{32} + 1 \qquad \text{b, } a^{10} + a^5 + 1 \qquad \text{d, } x^5 - x^4 - 1$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } x^{64} + x^{32} + 1 &= x^{64} + 2 \cdot x^{32} + 1 - x^{32} = (x^{32} + 1)^2 - x^{32} \\ &= (x^{32} + 1 + x^{16})(x^{32} + 1 - x^{16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } a^{10} + a^5 + 1 &= (a^{10} - a) + (a^5 - a^2) + (a^2 + a + 1) = a(a^9 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) \\ &= a((a^3)^3 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = a(a^3 - 1)(a^6 + 2a^3 + 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) \\ &= (a^7 + 2a^4 + a)(a - 1)(a^2 + a + 1) + a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

$$= (a^2 + a + 1) \left[(a^7 + 2a^4 + a)(a - 1) + (a^3 - a^2) + 1 \right]$$

c, Ta có: $x^5 - x^4 - 1 = (x^5 - x^4 + x^3) - (x^3 + 1) = x^3(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$
 $(x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$

Dạng 3: ĐA THỨC BẬC CAO

I. Phương pháp:

- Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1} + x^{3m+2} + 1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm xuất hiện bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu:

II. Luyện tập:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x^7 + x^5 + x^3) + (x^4 + x^2 + 1) = x^3(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) \\ & = (x^4 + x^2 + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\ & = (x^2 - x + 1)^2 (x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1 = (x^{11} + x^{10} + x^9) + (x^8 + x^7 + x^6) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = x^9(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = (x^2 + x + 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 14x^4 + 1$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^8 + 2x^4 + 1 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 2(x^4 + 1) \cdot 2x^2 + 4x^4 - 4x^2(x^4 + 1) + 8x^4 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2)^2 - (2x^3 - 2x)^2 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^3 + 2x)(x^4 + 1 + 2x^2 + 2x^3 - 2x) \end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 98x^4 + 1$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x^4 + 1)^2 + 2(x^4 + 1) \cdot 8x^2 + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4 \\ & = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2 \end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3 &= 2x^5 - 2x^4 - x^4 + x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 3 \\ &= 2x^4(x-1) - x^3(x-1) + 5x^2(x-1) - 3(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x^2+3)(2x+1)\end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

Dạng 4: ĐA THỨC ĐA ẨN

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (z^2 + 2z + 1) = (x+y)^2 - (z+1)^2 \\ &= (x+y+z+1)(x+y-z-1)\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1 &= (x^2 - 2xz + z^2) - (y^2 - 2y + 1) = (x-z)^2 - (y-1)^2 \\ &= (x-z+y-1)(x-z-y+1)\end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3 &= x(x^5 - 2x^3 - x^2y^3 + 2y^3) \\ &= x[x^3(x^2-2) - y^3(x^2-2)] = x(x^3-y^3)(x^2-2) = x(x-y)(x^2-2)(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 &= x^2(x^4 - x^2 - 9x + 9) \\ &= x^2[x^2(x^2-1) - 9(x-1)] = x^2[x^2(x-1)(x+1) - 9(x-1)] = x^2(x-1)(x^3+x^2-9)\end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac) - 4b^2 \\ = (2a^2 + 2c^2 - 2b^2 + 4ac) = 2(a^2 + 2ac + c^2 - b^2) = 2[(a+c)^2 - b^2] \\ = 2(a+c+b)(a+c-b)\end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

HD:

$$\text{Ta có: } ab^2 - ac^2 - bc^2 + a^2b + a^2c - b^2c = a^2(b+c) + b^2(a-c) - c^2(a+b)$$

$$\begin{aligned}
&= a^2(b+c) + b^2[(a+b) - (b+c)] - c^2(a+b) \\
&= a^2(b+c) + b^2(a+b) - b^2(b+c) - c^2(a+b) \\
&= (b+c)(a^2 - b^2) + (a+b)(b^2 - c^2) = (b+c)(a-b)(a+b) + (a+b)(b-c)(b+c) \\
&= (a+b)(b+c)(a-b+b-c) = (a+b)(b+c)(a-c)
\end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(x+z) + 3xyz$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &= [xy(x+y) + xyz] + [yz(y+z) + xyz] + [zx(z+x) + xyz] \\
&= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z) = (x+y+z)(xy + yz + zx)
\end{aligned}$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x)$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &= xy(x+y) - yz(y+z) - zx[(y+z) - (x+y)] \\
&= xy(x+y) - yz(y+z) - zx(y+z) + zx(x+y) \\
&= x(x+y)(y+z) - z(y+z)(x+y) = (x+y)(y+z)(x-z)
\end{aligned}$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &x^4(y-z) + y^4[-(y-z) - (x-y)] + z^4(x-y) \\
&= x^4(y-z) - y^4(y-z) - y^4(x-y) + z^4(x-y) \\
&= (y-z)(x^4 - y^4) - (x-y)(y^4 - z^4) \\
&= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) - (x-y)(y-z)(y+z)(y^2 + z^2) \\
&= (x-y)(y-z)[(x+y)(x^2 + y^2) - (y+z)(y^2 + z^2)] \\
&= (x-y)(y-z)(x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 - y^3 - yz^2 - y^2z - z^3) \\
&= (x-y)(y-z)(x^3 - z^3 + y^2(x-z) + y(x^2 - z^2)) \\
&= (x-y)(y-z)[(x-z)(x^2 + xz + z^2) + y^2(x-z) + y(x-z)(x+z)] \\
&= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2 + xz + z^2 + y^2 + xy + yz)
\end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 - abc \\
&= (a^2b + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + abc) + a^2c + ca^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+c) \\
&= b(a+b+c)(a+c)+ac(a+c) \\
&= (a+c)(ab+b^2+bc+ac)=(a+c)(b+c)(a+b) \\
&= (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3
\end{aligned}$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử:

HD:

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } (a+b+c)^3 - \left[(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 \right] \\
&\begin{cases} x=a+b-c \\ y=b+c-a \Rightarrow x+y+z=a+b+c \\ z=c+a-b \end{cases} \\
&= (x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3 \\
&= 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3 \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c = 24abc
\end{aligned}$$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

HD:

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } a^2(b-c)+b^2[-(b-c)-(a-b)]+c^2(a-b) \\
&= a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b) \\
&= (b-c)(a-b)(a+b)-(a-b)(b-c)(b+c) \\
&= (b-c)(a-b)(a+b-b-c)=(a-b)(b-c)(a-c)
\end{aligned}$$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$

HD:

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } xy^3 - xz^3 + yz^3 - x^3y + x^3z - y^3z \\
&= x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) \\
&= x^3(z-y)+y^3[-(z-y)-(y-x)]+z^3(y-x) \\
&= x^3(z-y)-y^3(z-y)-y^3(y-x)+z^3(y-x) \\
&= (z-y)(x^3-y^3)+(y-x)(z^3-y^3) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-x)(z-y)(z^2+yz+y^2) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2-z^2-yz-y^2) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2-z^2+xy-yz)=(z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)
\end{aligned}$$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

HD:

Ta có: $(x^2 + y^2 + z^2) \left[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \right] + (xy + yz + zx)^2$

Đặt: $x^2 + y^2 + z^2 = a, xy + yz + zx = b$ khi đó đa thức:

$$a(a + 2b) + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

HD:

Đặt: $x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x + y + z = c$,

Khi đó ta có:

$$2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2,$$

Lại có:

$$a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \quad \text{và} \quad b - c^2 = -2(xy + yz + zx),$$

$$\text{Thay vào ta được: } -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2 = 8xyz(x + y + z)$$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $-c^2(a - b) + b^2(a - c) - a^2(b - c)$

HD:

Ta có: $-c^2(a - b) + b^2[(a - b) + (b - c)] - a^2(b - c)$

$$= -c^2(a - b) + b^2(a - b) + b^2(b - c) - a^2(b - c)$$

$$= (a - b)(b - c)(b + c) + (b - c)(b - a)(b + a)$$

$$= (a - b)(b - c)(b + c - a - b) = (a - b)(b - c)(c - a)$$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3$

HD:

Ta có: $z^3(x - y) + x^3[-(x - y) - (z - x)] + y^3(z - x)$

$$= z^3(x - y) - x^3(x - y) + y^3(z - x) - x^3(z - x)$$

$$= (x - y)(z^3 - x^3) + (z - x)(y^3 - x^3)$$

$$= (x - y)(z - x)(z^2 + zx + x^2) + (z - x)(y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

$$= (x - y)(z - x)(z^2 + zx + x^2 - y^2 - xy - x^2) = (x - y)(z - x)(z - y)(z + y - x)$$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $ab(a + b) - bc(b + c) - ac(c - a)$

HD:

Ta có: $ab(a + b) - bc[(a + b) + (c - a)] - ac(c - a)$

$$\begin{aligned}
&= ab(a+b) - bc(a+b) - bc(c-a) - ac(c-a) \\
&= b(a+b)(a-c) - c(c-a)(b+a) = (a+b)(b+c)(a-c)
\end{aligned}$$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y) - x^3(1-y) + y^3(1-x)$

HD :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & (x-y) - x^3[(x-y) + (1-x)] + y^3(1-x) \\
&= (x-y) - x^3(x-y) - x^3(1-x) + y^3(1-x) \\
&= (x-y)(1-x^3) - (1-x)(x^3-y^3) \\
&= (x-y)(1-x)(1+x+x^2) - (1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2) \\
&= (x-y)(1-x)(1+x+x^2-x^2-xy-y^2) = (x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)
\end{aligned}$$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2(c-b) - 4c^2a^2(2a+c)$

HD :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2[(2a+c) - (2a+b)] - 4c^2a^2(2a+c) \\
&= 4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2(2a+c) - b^2c^2(2a+b) - 4c^2a^2(2a+c) \\
&= b^2(2a+b)(4a^2-c^2) + c^2(2a+c)(b^2-4a^2) \\
&= b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c) - c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b) \\
&= (2a+c)(2a+b)(2ab^2 - b^2c - 2ac^2 + bc^2) \\
&= (2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)
\end{aligned}$$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$

HD :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & z^3(x-y) + x^3[-(x-y) - (z-x)] + y^3(z-x) \\
&= z^3(x-y) - x^3(x-y) + y^3(z-x) - x^3(z-x) \\
&= (x-y)(z^3-x^3) + (z-x)(y^3-x^3) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2) + (z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2) = (x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)
\end{aligned}$$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)$

HD :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & bc(ab-ac+bd-dc) - ac(ab-bc+ad-dc) + ab(ac-bc+ad-bd) \\
&= \\
& bc(ab-ac+bd-dc) - ac[(ab-ac+bd-dc) + (ac-bc+ad-bd)] + ab(ac-bc+ad-bd)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ab - ac + bd - dc)(bc - ac) - (ac - bc + ad - bd)(ac - ab) \\
&= (a + d)(b - c)c(b - a) - (c + d)(a - b)a(c - b) \\
&= (b - c)(b - a)(ac + dc - ca - ad) = (b - c)(b - a)(c - a).d
\end{aligned}$$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$

HD :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } & y^3(a - x) - x^3[(a - x) + (x - y)] + a^3(x - y) \\
&= y^3(a - x) - x^3(a - x) - x^3(x - y) + a^3(x - y) \\
&= (a - x)(y^3 - x^3) - (x - y)(x^3 - a^3) \\
&= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x - a)(x^2 + xa + a^2) \\
&= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x^2 - xa - a^2) \\
&= (x - a)(x - y)(y^2 - yx - a^2) \\
&= (x - a)(x - y)(y - a)(y + a + x)
\end{aligned}$$

Bài 24: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c - 1)$

Bài 28 : Phân tích thành nhân tử: $x^2y + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x + y)^2 = (x + y)(xy + z^2 + xz + yz) \\
&= (x + y)(y + z)(z + x)
\end{aligned}$$

Dạng 5: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

HD :

$$\text{Ta có : } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 3)$$

$$\text{Hoặc : } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 3)$$

Giả sử ở TH1 ta có :

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = x^4 + (a + b)x^3 + (4 + ab)x^2 + (3a + b)x + 3$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} a+b=-6 \\ 4+ab=12 \\ 3a+b=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \end{cases}, \text{ Vậy } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 &= 2x^4 + 2x^3 - 5x^3 - 5x^2 - 2x^2 - 2x + 8x + 8 \\ &= 2x^3(x+1) - 5x^2(x+1) - 2x(x+1) + 8(x+1) \\ &= (x+1)(2x^3 - 5x^2 - 2x + 8) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x - 4) \end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 &= (ax+by+3)(cx+dy-1) \\ &= \\ 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 &= acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2 + (3c-a)x + (3d-b)y - 3 \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} ac=12 \\ ad+bc=-10 \\ bd=-12 \\ 3c-a=5 \\ 3d-b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-6 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}, \text{ Vậy}$$

$$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

HD:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2x^3y - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2xy - z^2) = (x^2 + y^2)[(x+y)^2 - z^2] \\ &= (x^2 + y^2)(x+y+z)(x+y-z) \end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2 &= 81x^4(z^2 - y^2) - (z^2 - y^2) \\ &= (z^2 - y^2)(81x^4 - 1) = (z-y)(z+y)(9x^2 - 1)(9x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$= (z - y)(z + y)(3x + 1)(3x - 1)(9x^2 + 1)$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 \\ &= x^6 - y^6 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^3)^2 - (y^3)^2 + (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 - y^2 + 1) \end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

HD:

$$\text{Ta có: } 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + 1)(cx^2 + dx + 1)$$

Đồng nhất hết số ta có:

$$4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 8x + 63$

HD:

$$\text{Ta có: } x^4 + 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$x^4 + 8x + 63 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x+1)^4 + [x(x+1)+1]^2 \\ &= (x+1)^4 + x^2(x+1)^2 + 2x(x+1)+1 \\ &= (x+1)^2[(x+1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1) \\ &= (2x^2 + 2x + 1)[(x+1)^2 + 1] \\ &= (x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+y)^5 - x^5 - y^5$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5 \\ &= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5xy \left[(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y) \right] \\
&= 5xy(x+y)(x^2 + y^2 + xy)
\end{aligned}$$

Bài 11: Tìm tổng hệ số của đa thức sau khi khai triển:

a, $(4x - 3)^4$ b, $(5x - 2)^5$ c, $(x^2 + x - 2)^{100} + (x^2 + 1 - x)^{2017}$

HD :

Tổng hệ số của đa thức chính là giá trị của đa thức tại $x = 1$

Bài 12: Tìm hệ số của hạng tử bậc cao nhất và tổng các hệ số của đa thức:

$$(3 - 6x + 4x^2)^{2005} (1 - x^2)^{2004} \cdot (1 - 2x + 3x^2 - x^3)^{2003}$$