Lời giải đề số 5

Lê Việt Hải – 11 Toán – Phổ Thông Năng Khiếu

Bài toán 1. Cho *a,b,c,d* là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=3$ và $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \le 8(ab+bc+ca)$$

<u>Lời giải.</u> Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz cho các số dương, ta có

$$(a+b+c+d)^2 \le \left[\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+1\right](a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Suy ra $\frac{9}{4} \le \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+1$, sau khi quy đồng và rút gọn ta được

$$a^2+b^2+c^2 \le 8(ab+bc+ca)$$

Phần chứng minh hoàn tất.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$(2-x)(2+4^x)=6$$

<u>Lời giải.</u> Ta có định lý quen thuộc sau

Định lý Rolle: "Cho một hàm f liên tục trên đoạn [*a*,*b*] và khả vi trên đoạn đó. Nếu $f(a)=f(b)$ thì $\exists c \in [a,b]$ sao cho $f'(c)=0$".

Từ định lý trên ta dễ dàng suy ra được điều sau

"*Cho một hàm $f(x)$ xác định trên đoạn [a,b] và khả vi trên đoạn đó. Nếu $f'(x)$ có tối đa k nghiệm thuộc đoạn [a,b] thì $f(x)$ có nhiều nhất k + 1 nghiệm thuộc đoạn [a,b].*"

Từ phương trình ban đầu, nếu *x* là nghiệm thì $2-x>0$ hay $x<2$.

Khi đó, ta cũng có $(2-x)2<(2-x)(2+4^x)=6$, suy ra $-1<x$.

Đặt $f(x)=(2-x)(2+4^x)=2.4^x-2x-x.4^x+4$ $(-1<x<2)$. Ta có

$$f'(x)=2\ln 4.4^x-2-(4^x+x\ln 4.4^x)$$

$$f''(x)=2\ln^2 4.4^x-\ln 4.4^x-\ln 4.(4^x+x\ln 4.4^x)=\ln 4.4^x\left[\ln 4.(2-x)-2\right]$$

Ta có $f''(x)=0$ khi và chỉ khi $\ln 4.(2-x)=2$ hay $x=2-\dfrac{2}{\ln 4}$.

Lại có $-1<0<2-\dfrac{2}{\ln 4}<2$. Suy ra $f''(x)$ có đúng 1 nghiệm trên đoạn $(-1,2)$.

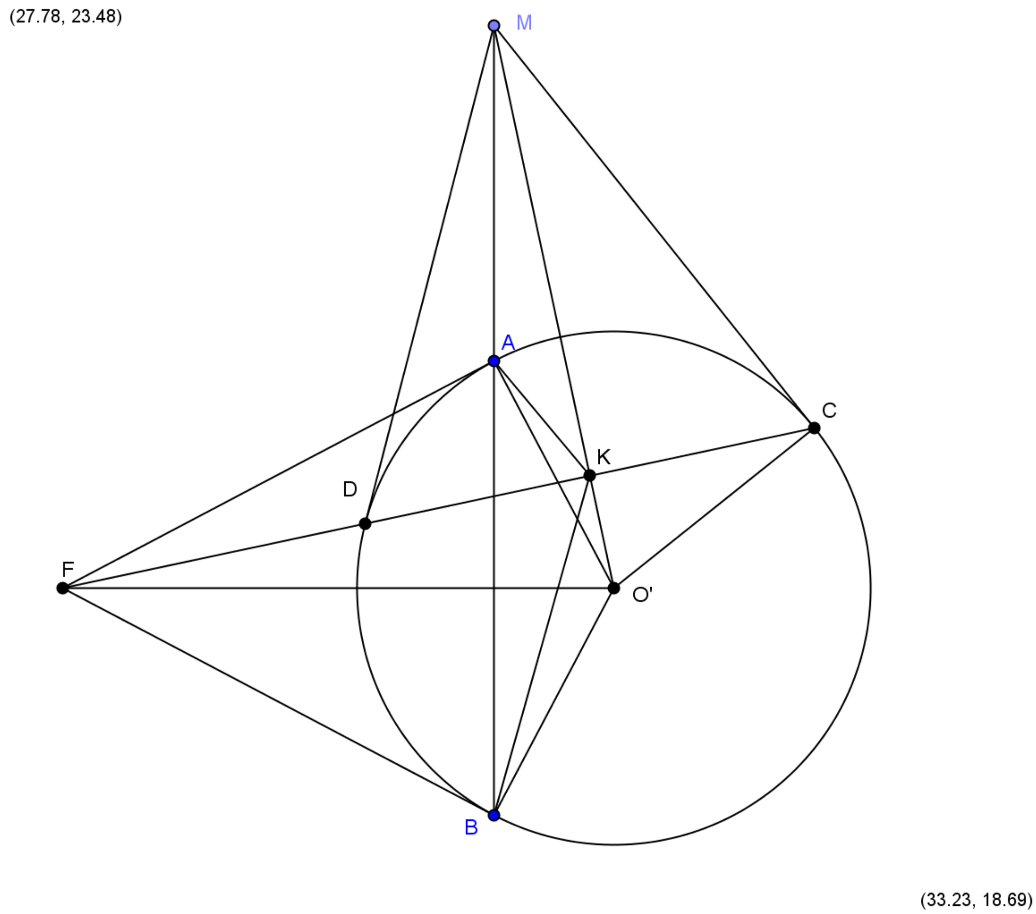
Áp dụng 2 lần điều ở trên, suy ra $f(x)$ có nhiều nhất 3 nghiệm.

Dễ dàng kiểm tra được $0,\dfrac{1}{2},1$ đều thỏa phương trình ban đầu. Vây phương trình có đúng 3 nghiệm là $0,\dfrac{1}{2},1$.

Bài toán 3. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối A*x* của tia AB ta lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O') hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là tiếp điểm và D nằm trong (O)). Đường thẳng AC cắt (O) lần thứ hai tại P và AD cắt (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia A*x*.

Lời giải.

Trước tiên ta xét đường tròn (O'), ta chứng minh CD đi qua điểm cố định.



Thật vậy, gọi F là giao điểm của CD và tiếp tuyến tại A của đường tròn (O’), ta chứng minh F cố định bằng việc chứng minh F cũng thuộc tiếp tuyến tại B của (O’).

Gọi K là giao điểm của MO’ và CD, vì MC và MD 2 tiếp tuyến của (O) tại C, D nên MK vuông góc với CD, hay $\angle FKO' = 90^\circ$. Lại có $\angle FAO' = 90^\circ$ (do FA là tiếp tuyến của (O’)), suy ra 4 điểm A, K, O’, F thuộc cùng 1 đường tròn. (1)

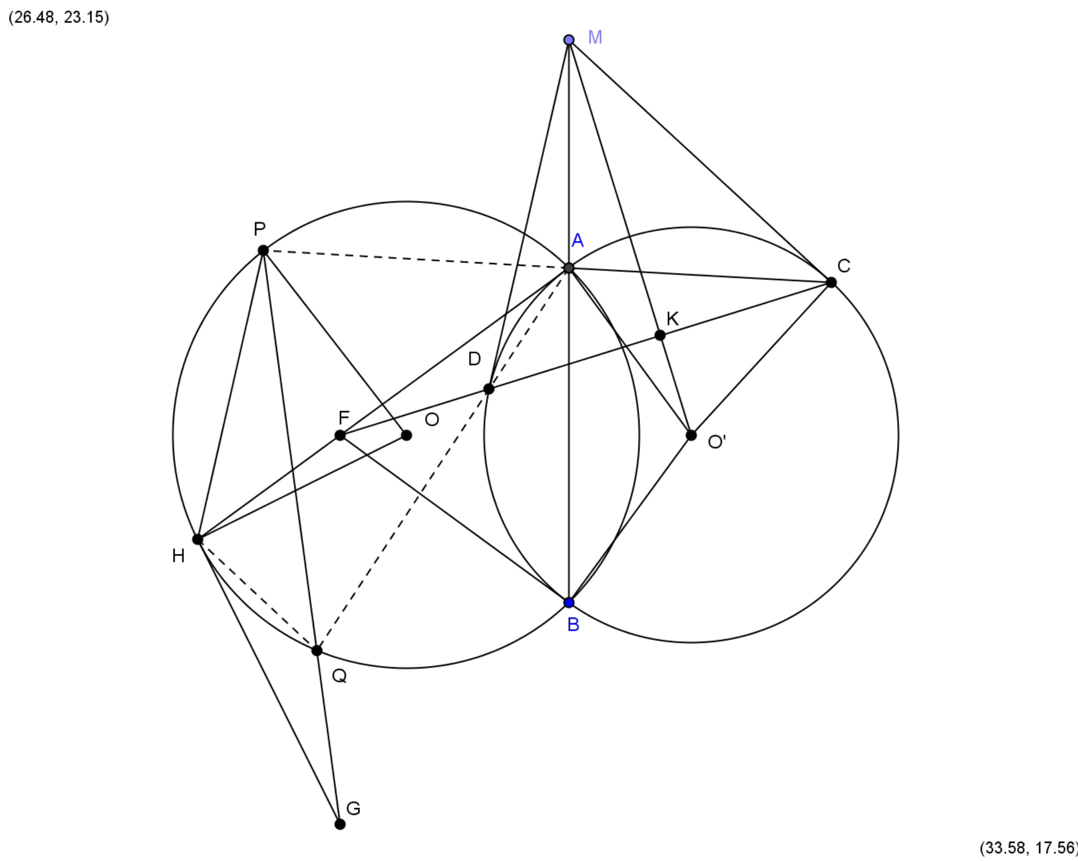
Ta có, theo phương tích của M đối với (O’) suy ra $MA.MB = MC^2$.

$\triangle MCO'$ vuông tại C có CK là đường cao nên $MC^2 = MK.MO'$.

Từ 2 điều trên suy ra $MK.MO' = MA.MB$, M lại là giao điểm của AB và KO’, suy ra K, O’, A, B thuộc cùng 1 đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra F, A, O’, B thuộc cùng 1 đường tròn, mà $\angle FAO' = 90^\circ$, nên $\angle FBO' = 90^\circ$, suy ra FB là tiếp tuyến của (O’) tại B, suy ra F cố định.

Trở lại bài toán. AF cắt (O) tại H, gọi G là giao điểm của PQ và tiếp tuyến tại H của đường tròn (O). Ta chứng minh G cố định.



Ta chứng minh ΔHPG đồng dạng với ΔACF.

Thật vậy, ta có $\angle HPG = \angle HAQ$, mà $\angle HAQ = \angle ACF$ (do FA là tiếp tuyến của (O') tại A) nên $\angle HPG = \angle ACF$.

Do PAQH nội tiếp (O) nên $\angle DAC = \angle QHP$, mà $\angle GHQ = \angle HAQ$ (do GH là tiếp tuyến của (O) tại H), suy ra $\angle FAC = \angle HAQ + \angle DAC = \angle QHP + \angle GHQ = \angle GHP$.

Từ 2 điều trên, suy ra ΔHPG đồng dạng với ΔACF,suy ra $\frac{AC}{HP} = \frac{AF}{HG}$. (3)

Do HA là tiếp truyến của (O') tại A nên suy ra $\angle PAH = \frac{1}{2}\angle AO'C$.

Lại có $\angle PAH = \frac{1}{2}\angle POH$ (góc nội tiếp chắn cung PH của đường tròn (O)).

Suy ra $\angle POH = \angle AO'C$, mà ΔPOH và $\Delta AO'C$ lần lượt cân tại O và O' nên 2 tam giác này đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{AC}{HP} = \frac{O'C}{OP}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $HG = \frac{OP.AF}{O'C}$, lại có AF không đổi (do A, F cố định), OP, O'C không đổi (lần lượt là bán kính của (O) và (O')), suy ra HG không đổi, mà H cố định và $\overrightarrow{HG}$ có phương và chiều không đổi, nên G cố định.
Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Tìm tất cả các số nguyên dương *n* > 1 có tính chất: Nếu *a, b* là các ước số của *n* và $(a,b)=1$ thì *a* + *b* – 1 cũng là ước của *n*.

Lời giải. Nếu *n* chỉ có 1 ước nguyên tố, hay $n = p^k$ $(p \in P,\ k \in N^*)$. Khi đó các ước của *n* là 1, *p*,…, p^k. Rõ ràng 2 ước *a*, *b* của *n* sao cho $(a,b)=1$ chỉ có thể là 1 và p^i $(1 \le i \le k)$, khi đó $a+b-1 = p^i \mid n$. Nói cách khác, tất cả các số nguyên dương *n* có dạng $n = p^k$ $(p \in P,\ k \in N^*)$ đều thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu *n* có từ 2 ước nguyên tố trở lên, gọi $p_1,...,p_k$ là tất cả các ước nguyên tố của *n* và $p_1 < ... < p_k$, $n = p_1^{x_1}...p_k^{x_k}$ $(x_i \in N^*)$.

Đặt $P = p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$.

Khi đó ta có, $P \mid n$, $p_1 \mid n$ và $(p_1, P) = 1$ suy ra $P + p_1 - 1 \mid n$.

Vì p_1 là ước nguyên tố nhỏ nhất nên $p_i \nmid P + p_1 - 1$ $(2 \le i \le k)$, mà $P + p_1 - 1 \mid n$ nên $P + p_1 - 1 = p_1^x$ $(2 \le x \le x_1)$, ta cũng suy ra $x_1 \ge 2$ nên $p_1^2 \mid n$.

Lại có $(p_1^2, P) = 1$, suy ra $P + p_1^2 - 1 \mid n$, hay $P + (p_1 - 1)(p_1 + 1) \mid n$. Ta có 2 trường hợp:

1) Nếu $p_1+1 \not\vdots\, p_2$ thì $(p_1+1, p_i)=1 \quad (2\le i\le k)$ (vì $p_1+1\le p_2<\ldots<p_k$), suy ra ta phải có $P+p_1^2-1=p_1^y \quad (x\le y\le x_1)$. Suy ra $p_1^2-p_1=p_1^y-p_1^x$ hay $p_1(p_1-1)=p_1^x(p_1^{y-x}-1)$, suy ra $x=1, y=2$ (sai vì $x\ge 2$)

2) Nếu $p_1+1 \,\vdots\, p_2$ thì $p_1+1=p_2$ (vì $p_1+1\le p_2$), mà p_2 là số nguyên tố lẻ nên $p_1=2, p_2=3$.

Ta chứng minh tiếp khi đó *n* không thể có nhiều hơn 3 ước nguyên tố. Giả sử điều ngược lại, khi đó đặt T là tích của tất cả các ước nguyên tố khác 2 và 3 của *n*, suy ra *T* là số lẻ.

Theo chứng minh trên ta cũng có $4=2^2 \mid n$, như vậy 2,3,4 | *n*, lại có $(T,2)=(T,3)=(T,4)=1$ nên theo giả thiết, ta có $T+1, T+2, T+3$ chia hết *n*.

Khi đó, theo định nghĩa của số *T*, ta suy ra các số $T+1, T+2, T+3$ chỉ có thể chia hết cho 2 và 3.

Ta có, $T+2$ là số lẻ nên $T+2=3^m \quad (1<m)$, $T+3$ không chia hết cho 3 nên $T+3=2^a \quad (1<a)$. Do $(T+1, T+2)=1$ nên $T+1=2^b \quad (1<b)$. Suy ra $2^a-2^b=(T+3)-(T+1)=2$ hay $2^b(2^{a-b}-1)=2$, suy ra $b=1, a=2$ (sai vì $1<b$). Vậy ta có điều mâu thuẫn làm cho điều giả sử sai.

Như vậy $n=2^{x_1}.3^{x_2}$, nếu $x_1\ge 3$ thì $2^3=8 \mid n$ suy ra $8+3-1=10 \mid n$ (sai). Vậy $x_1=1$ hoặc $x_1=2$.

Nếu $x_2\ge 2$ thì $3^2=9 \mid n$ suy ra $9+2-1=10 \mid n$ (sai). Vậy $x_2=1$.

Từ 2 điều trên suy ra *n* chỉ có thể là 6 hoặc 12. Rõ ràng 12 thỏa yêu cầu đề bài còn 6 thì không.

Tóm lại, tất cả các số *n* thỏa yêu cầu là $n=p^k$ ($p\in P$, $k\in N^*$) hoặc *n* = 12.

Bài toán 5. Hai người cùng chơi một trò chơi như sau: người thứ nhất chọn một số nguyên dương từ 2 đến 9; người thứ hai nhân số này với một số nguyên dương tùy ý từ 2 đến 9; sau đó người thứ nhất lại nhân kết quả thu được với một số tùy ý từ 2 đến 9… Người nào thu được một số lớn hơn 2010 trước thì thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng ?

Lời giải. Để tiện ta gọi 2 người lần lượt là A, B. Ta chứng minh A có chiến thuật thắng.

Thật vậy, lúc đầu A chọn số 9.

Ta có các tập hợp sau: {2,9}, {2,8}, {2,7}, {3,6}, {4,5}.

Sau đó B sẽ chọn một số bất kỳ từ 2 đến 9, A chỉ cần tiếp tục chọn số tương ứng sao cho nó nằm ở chung tập hợp và khác với số của B đã chọn. Ví dụ, B chọn 2 thì A có thể chọn 9, 8 hoặc 7; B chọn 3 thì A chọn 6,…

Đến lượt B chọn, dù chọn số nào thì tích khi đó vẫn bé hơn 2010, thật vậy, giả sử số B chọn là a, ta có

$$9\times7\times2\times a<9\times8\times2\times a<9\times6\times3\times a<9\times9\times2\times a<9\times4\times5\times a\le9\times4\times5\times9=1620$$

Sau đó, A chỉ cần chọn 9, vì dù trước đó B chọn a bất kỳ thì

$$\begin{aligned}2010<2268=9\times7\times2\times2\times9&<9\times7\times2\times a\times9<9\times8\times2\times a\times9\\&<9\times6\times3\times a\times9<9\times9\times2\times a\times9<9\times4\times5\times a\times9\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.