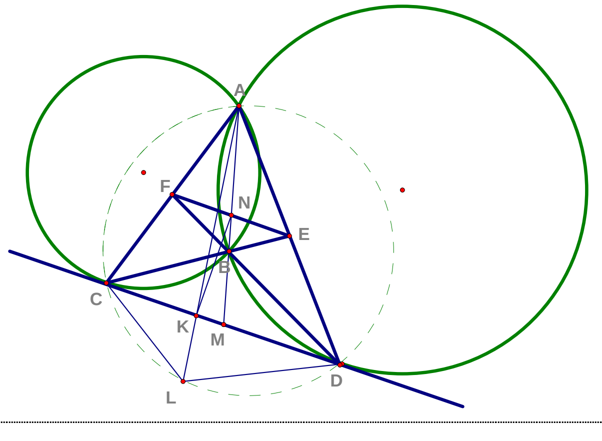
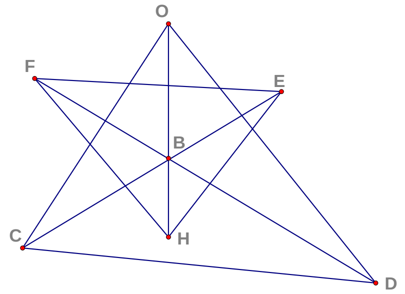
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NAM	KỲ THI HỌC SINH GIỎI THPT CHUYÊN VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA Năm học 2018-2019

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN MÔN TOÁN

(Hướng dẫn chấm này gồm có 06 trang)

Câu	Nội dung yêu cầu	Điểm
Câu 1 (3,0 đ)	*Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} \sqrt{5x^2+xy+3y^2}+\sqrt{3x^2+xy+5y^2}=3x+3y & (1) \\ (x+y-11)\left(\sqrt{2x+y-8}-\sqrt{x+1}\right)=5 & (2) \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$	
	ĐK $x\ge -1; y\ge 8-2x$	025
	$6VT(1)=\sqrt{180x^2+36xy+108y^2}+\sqrt{108x^2+36xy+180y^2}$ $=\sqrt{(11x+7y)^2+59(x-y)^2}+\sqrt{(7x+11y)^2+59(x-y)^2}$ $\ge\sqrt{(11x+7y)^2}+\sqrt{(7x+11y)^2}\ge(11x+7y)+(7x+11y)=18(x+y)=6VP(1)$ Dấu "=" xảy ra khi x = y	0.25 0.25 0.25 0,25
	Thay x = y vào PT(2) ta được: $(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5$ $\Leftrightarrow(2x-11)(2x-9)=5\left(\sqrt{3x-8}+\sqrt{x+1}\right)$ $\Leftrightarrow 4\left(x^2-11x+24\right)+\left[(3x-4)-5\sqrt{3x-8}\right]+\left[(x+7)-5\sqrt{x+1}\right]=0$ $\Leftrightarrow\left(x^2-11x+24\right)\left[4+\frac{9}{(3x-4)+5\sqrt{3x-8}}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}\right]=0\ (*)$	0.25 0.25 0,25 0,25
	Ta có $4+\frac{9}{(3x-4)+5\sqrt{3x-8}}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}>0$ Nên $(*)\Leftrightarrow x^2-11x+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=8\end{array}\right.$ Vây hệ pt có nghiệm $(x;y)\in\{(3;3);(8;8)\}$	0,25 0,25 0,25
	Cách khác: ĐK x ≥ - 1; y ≥ 8 – 2x,	0,25
	+ Xét $\lvert x\rvert\ne\lvert y\rvert$ Nhân hai vế phtr (1) cho lượng liên hiệp ta được: $(1)\Leftrightarrow(x+y)\left(2(x-y)-3\left(\sqrt{5x^2+xy+3y^2}-\sqrt{3x^2+xy+5y^2}\right)\right)=0$ $\Leftrightarrow 2(x-y)=3(\sqrt{5x^2+xy+3y^2}-\sqrt{3x^2+xy+5y^2})$ (*). Đặt $a=\sqrt{5x^2+xy+3y^2};b=\sqrt{3x^2+xy+5y^2}$. Ta được(*) tương đương hệ phtr: $\begin{cases}a-b=\frac{2}{3}(x-y)\\a^2-b^2=3\left(x^2-y^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}y\\b=\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5x^2+xy+3y^2}=\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}y\\\sqrt{3x^2+xy+5y^2}=\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y\end{cases}$; bình phương hai dẫn đến phtr vô nghiệm. + Xét x = - y hay x + y = 0 thì pt $(1)\Leftrightarrow VT(1)=0\Leftrightarrow x=y=0$. Thay vào (2) vô nghiệm. + Xét x = y thay vào pt (1) ta được |x| = x suy ra x ≥ 0 => x = y ≥ 0. Thay vào pt (2) ta được…(*giống cách trên)*	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 2 (2,0đ)	*Cho dãy số* (a_n) *xác định bởi:* $a_1=1;\ a_2=\frac{1}{2};\ a_{n+1}=\frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n},\ \forall n\ge 2$.	

	Với mỗi số nguyên dương n, đặt $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *. Chứng minh dãy số* (b_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*	
	Xét số hạng tổng quát $a_{k+1} = \frac{ka_k^2}{1+(k+1)a_k} \Leftrightarrow ka_k^2 = a_{k+1} + (k+1)a_{k+1}a_k$	
	$\Leftrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = ka_k - (k+1)a_{k+1}$	0,25
	Lấy tổng: $\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \sum_{k=2}^{n}\left(ka_k^2\right) - \sum_{k=2}^{n}(k+1)a_{k+1} = 2a_2 - (n+1)a_{n+1}$	0,25
	Suy ra $b_n = \frac{a_2}{a_1} + 2a_2 - (n+1)a_{n+1} = \frac{3}{2} - (n+1)a_{n+1}$ (1)	0,25
	Xét dãy (a_n) ta thấy $a_n > 0 ; \forall n$ và dãy (na_n) giảm Từ (1) suy ra $b_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số tăng và bị chặn trên nên theo định lí Vâyoxtrát thì dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn. Khi đó $\lim(b_n - b_{n-1}) = 0$ Mà $\lim(b_n - b_{n-1}) = \lim\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$	0,25 0,25 0,25
	Theo định nghĩa giới hạn : $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 0\right\| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow a_{n_0+k} < \frac{1}{2^k}a_{n_0}, \forall k \geq 1 \Rightarrow a_n < \frac{a_{n_0}.2^{n_0}}{2^n} = \frac{c}{2^n}, \forall n > n_0$ $\Leftrightarrow 0 < na_n < \frac{cn}{2^n}, \forall n > n_0$. Do $\lim\frac{n}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim na_n = 0 \Rightarrow \lim b_n = \frac{3}{2}$.	0,25 0,25
Câu 3 (5,0đ)	*Cho hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B. Gọi CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (C thuộc* (C_1) *, D thuộc* (C_2)*) và điểm B gần đường thẳng CD hơn điểm A. Đường thẳng CB cắt AD tại E và đường thẳng DB cắt CA tại F. Đường thẳng EF cắt AB tại N. Gọi K là hình chiếu vuông góc của N lên CD.* *a) Chứng minh* $\widehat{CAB} = \widehat{DAK}$. *b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và H là trực tâm tam giác KEF. Chứng minh các điểm O, B, H thẳng hàng*	
	Chú ý: *Không có điểm hình vẽ, không có hình vẽ không chấm*  	

	a) Gọi M là giao của AB và CD, ta có $P_{M/(O_1)} = P_{M/(O_2)}$ Suy ra được M là trung điểm của CD và $MC^2 = MD^2 = MA.MB$	0,25 0,25
	$\Rightarrow \frac{MC}{MB}=\frac{MA}{MC};\frac{MD}{MB}=\frac{MA}{MD}$ từ đó suy ra các tam giác MCB, MAC đồng dạng và các tam giác MDB, MAD đồng dạng. Do đó $\frac{CB}{AC}=\frac{CM}{AM};\frac{DB}{AD}=\frac{DM}{AM}\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$ (1)	0.25 0,25
	Do tứ giác AFCBDE là tứ giác toàn phần nên (ABNM) = - 1 => $K(ABNM) = -1$ nên theo tính chất của chùm điều hòa thì KM đi qua trung điểm của LB.	0,25 0,25
	Lấy điểm L trên AK sao cho LB song song với NK, suy ra $LB \perp CD$ Kết hợp với KM đi qua trung điểm của LB ta có L và B đối xứng với nhau qua CD . => LC =BC; LD = BD thay vào (1) Ta được $\frac{LC}{AC}=\frac{LD}{AD}$. (2)	0,25 0,25
	Vì CD là tiếp tuyến nên $\widehat{BAC}=\widehat{BCD};\widehat{BAD}=\widehat{BDC}$ $\Rightarrow \widehat{CAD}+\widehat{CLD}=\widehat{BCD}+\widehat{BDC}+\widehat{CBD}=180^0$ Do đó tứ giác ACLD nội tiếp. (3)	0,25 0,25
	Từ (2), (3) ta được tứ giác ACLD là tứ giác điều hòa, có M trung điểm CD nên AL là đường đối trung của tam giác ACD. Suy ra $\widehat{CAM}=\widehat{DAL}$ => $\widehat{CAB}=\widehat{DAK}$.	0,25 0,25
	b) Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{KBD}=\widehat{KLD}=\widehat{KCF}$ $\widehat{FAE}+\widehat{FBE}=\widehat{CAD}+\widehat{CBD}=\widehat{CAD}+\widehat{CLD}=180^0$ Suy ra các tứ giác FBKC, FBEA nội tiếp.	0,25 0,25
	Vì tứ giác FBEA nội tiếp và CD tiếp xúc với (C_1) nên $\widehat{BEF}=\widehat{BAF}=\widehat{BCD}\Rightarrow CD \parallel FE$ (4)	0,25
	Vì các tứ giác FBKC, FBEA nội tiếp và O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nên $\widehat{FKC}=\widehat{FBC}=\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\widehat{COD}=90^0-\widehat{OCK}$ Suy ra $CO \perp FK$. Từ đó với chú ý $EH \perp FK \Rightarrow CO \parallel EH$ (5)	0,25 0,25
	Tương tự $DO \parallel FH$ (6)	0,25
	Từ (4), (5), (6) , xét hai tam giác OCD và HFE có các cạnh đôi một song song nên theo định lý Desargues suy ra OH, CE, DF đồng quy tại B. Điều này nghĩa là O, H, B thẳng hàng.	0,25 0,25
	Câu 3a. *Cách khác*: Gọi $M = AB \cap CD$, ta có $P_{M/(O_1)} = P_{M/(O_2)}$, suy ra M trung điểm CD Ta có $\left.\begin{array}{l}\widehat{CAB}=\widehat{BCM}\\ \widehat{DAB}=\widehat{BDM}\end{array}\right\}$ => $\widehat{BCM}+\widehat{BDM}=\widehat{CAD}$ Suy ra tứ giác AFBE nội tiếp	0,5 0,25 0,25

	Tứ giác AFCBDE là tứ giác toàn phần nên (ABNM) = -1 => K(ABNM) = -1 . Mà KN $\perp$ KM nên theo tính chất của chùm điều hòa ta có KN và KM là phân giác trong và ngoài góc AKB. Lấy điểm L đối xứng với điểm B qua CD, suy ra KM là phân giác góc BKL Do đó A, K, L thẳng hàng	0,25 0,25 0,25 0,25
	Lại có $\widehat{CLD}=\widehat{CBD}=\widehat{EBF}$ => tứ giác ACLD nội tiếp Ta có: $\widehat{DAL}=\widehat{DCL}=\widehat{BCD}=\widehat{CAB}$ Suy ra $\widehat{DAK}=\widehat{CAB}$ (đpcm)	0,5 0,5
Câu 4 (2,0đ)	*Tìm tất cả các số nguyên dương* k *để phương trình* $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2=\mathrm{k}(1+4\mathrm{xy})$ *có nghiệm nguyên dương* x,y.	
	Giả sử tồn tại số nguyên dương k để phương trình $(x+y)^2=k(1+4xy)$ có nghiệm nguyên dương x,y. Không mất tổng quát, giả sử (x_0,y_0) là nghiệm sao cho $x_0\ge y_0$ và x_0+y_0 nhỏ nhất.	0,25
	Khi đó phương trình $x^2+2(1-2k)y_0x+y_0^2-k=0$ có hai nghiệm x_0,x_1 thoả mãn: $$\begin{cases}x_0+x_1=2(2k-1)y_0 & (1)\\ x_0x_1=y_0^2-k & (2)\end{cases}.$$	0,25
	Trường hợp 1: $x_0=y_0\Rightarrow k=\dfrac{4x_0^2}{1+4x_0^2}<1$ nên không thoả mãn.	0,25
	Trường hợp 2: $x_0>y_0$. Chúng ta xét các khả năng sau: - Nếu $x_1<0$ thì từ (1) và (2) ta có: $2(2k-1)y_0<x_0=\dfrac{k-y_0^2}{\lvert x_1\rvert}\le k-y_0^2\Rightarrow 4ky_0+y_0^2<2y_0+k$ là điều không xảy ra. - Nếu $x_1>0$ thì (x_1,y_0) cũng là một nghiệm của phương trình. Theo cách gọi của nghiệm (x_0,y_0) suy ra $x_1\ge x_0\Rightarrow x_1x_0>y_0^2$ là mâu thuẫn với (2). - Nếu $x_1=0\Rightarrow k=y_0^2$ là số chính phương.	0,25 0,25 0,25
	Thử lại với $k=a^2$, với a là số nguyên dương thì phương trình có các nghiệm nguyên dương (x,y) là $(4a^3-2a,a)$. Vậy tất cả các giá trị của k thoả mãn là: $k=a^2$, với a là số nguyên dương	0,25 0,25
Câu 5 (3,0đ)	*Tìm tất cả các hàm số* $\mathrm{f}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *thỏa mãn* $\mathrm{f}\left((\mathrm{x}-\mathrm{y})^2\right)=\mathrm{x}^2-2\mathrm{y}\mathrm{f}(\mathrm{x})+\left(\mathrm{f}(\mathrm{y})\right)^2$, $\forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{R}$.	
	Cho $x=y=0\Rightarrow f(0)=\left(f(0)\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\ f(0)=1\end{array}\right.$	0,25 0,25
	-Nếu $f(0)=0$: Cho $y=0,x\in R\Rightarrow f\left(x^2\right)=x^2\Rightarrow f(t)=t,\ \forall t\ge 0$ Cho $x=y\in R\Rightarrow f(0)=x^2-2xf(x)+\left(f(x)\right)^2\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=0\Rightarrow f(x)=x$ Thử lại thấy đúng.	0,25 0,25 0,25

	- Nếu $f(0)=1$: +) cho $y=0; x\in R \Rightarrow f(x^2)=x^2+1 \Rightarrow f(t)=t+1,\ \forall t\geq 0$ +)Cho $x=0, y\in R \Rightarrow f(y^2)=-2y+\left(f(y)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(y)\right)^2=f(y^2)+2y$ $\Leftrightarrow \left(f(y)\right)^2=y^2+1+2y=(y+1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(y)=y+1 \\ f(y)=-y-1 \end{array}\right.$	0,25 0,25 0,25
	Xét *f(y) =-y -1.* Giả sử tồn tại $y_0\in R$ sao cho $f(y_0)=-y_0-1$. Khi đó chọn $x=y=y_0$ ta có $1=y_0^2-2y_0f(y_0)+\left(f(y_0)\right)^2=\left(f(y_0)-y_0\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(y_0)=y_0-1 \\ f(y_0)=y_0+1 \end{array}\right.$ Nếu $f(y_0)=y_0-1 \Rightarrow y_0-1=-y_0-1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow$ loại Nếu $f(y_0)=y_0+1 \Rightarrow y_0+1=-y_0-1 \Rightarrow y_0=-1 \Rightarrow f(-1)=0$ cũng thỏa mãn $f(y_0)=y_0+1$	0,25 0,25
	Xét *f(y) = y+1*, thử lại thấy đúng. Vậy có hai hàm thỏa mãn bài toán là $f(x)=x$ và $f(x)=x+1$.	0,25 0,25
Câu 6 (2,0đ)	*Một con ếch bắt đầu nhảy trên mặt phẳng toạ độ từ điểm* $\mathrm{O}(0;0)$*, mỗi bước nhảy có độ dài một đơn vị đến các điểm có toạ độ là số hữu tỉ (hoành độ và tung độ là các số hữu tỉ).* *a) Chứng tỏ rằng con ếch có thể nhảy đến điểm* $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{13}\right)$. *b) Con ếch có thể nhảy đến điểm* $\left(0;\frac{1}{2018}\right)$ *được không ? Tại sao ?*	
	a) Chúng ta sử dụng các bộ ba Pitago $(m^2-n^2;2mn;m^2+n^2) \to (3;4;5), (12;5;13)$ để xây dựng dãy các bước nhảy của con ếch từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{17}\right)$, theo sơ đồ sau: $O(0;0) \to \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) \to \left(\frac{6}{5};0\right) \to \left(\frac{1}{5};0\right) \to \left(\frac{1}{5}-\frac{12}{13};\frac{-5}{13}\right) \to \left(\frac{1}{5};\frac{-10}{13}\right) \to \left(\frac{1}{5};\frac{3}{13}\right)$. Chú ý: *học sinh ghi được sơ đồ đi từ điểm O(0;0) đến điểm* $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{13}\right)$. *thì cho 1 điểm*	1,0
	b) Giả sử con ếch nhảy từ điểm hữu tỉ A đến điểm hữu tỉ B, với toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}=(r;s)$, ở đó r, s là các số hữu tỉ. Gọi *c* là mẫu số chung của r, s, suy ra $r=\frac{a}{c}$; $s=\frac{b}{c}$. Độ dài của mỗi bước nhảy là một đơn vị nên, từ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=1 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1 \Rightarrow a^2+b^2=c^2$.	0,25

	Không mất tổng quát có thể xem *c* là số lẻ (bởi vì nếu *c* là số chẵn thì *a*, *b* phải chẵn, mà $a^2+b^2=c^2$, suy ra $r=\frac{a}{c}=\frac{2a'}{2c'}=\frac{a'}{c'}; s=\frac{b}{c}=\frac{2b'}{2c'}=\frac{b'}{c'},$ nếu *c*' chẵn thì tiếp tục quá trình trên suy ra mẫu số chung của r, s là số lẻ).	0,25
	Giả sử ở bước nhảy thứ *i*, con ếch nhảy theo vectơ có toạ độ $\left(\frac{a_i}{c_i};\frac{b_i}{c_i}\right)$, với c_i lẻ.Thì ở bước nhảy thứ *k* toạ độ của con ếch là $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{c_i};\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{c_i}\right)$.	0,25
	Từ tất cả các c_i lẻ, suy ra con ếch không thể nhảy tới vị trí có toạ độ với mẫu số chẵn. Vậy con ếch không thể nhảy đến điểm $\left(0;\frac{1}{2018}\right)$.	0,25
Câu 7 (3,0đ)	*Cho các số thực không âm x ; y ; z thỏa mãn Tìm giá trị* $x^3+y^3+z^3=3.$ *nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{xyz+(x+y+z)^2}{5(xy+yz+zx)+1}$.	
	Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có: $x^3+1+1\ge 3x \Leftrightarrow x^3+2\ge 3x$. Tương tự $y^3+2\ge 3y; z^3+2\ge 3z$. Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên suy ra $x+y+z\le 3$. Ta có $3=x^3+y^3+z^3\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^3}=3xyz \Leftrightarrow xyz\le 1$	0,25 0,25 0,25 0,25
	Ta có $3-3xyz=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $\le 3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$	0,25 0,25
	$\Rightarrow 1-xyz\le x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \Leftrightarrow xyz+(x+y+z)^2\ge 1+3(xy+yz+zx)$ Ta có đánh giá: $\Leftrightarrow 1+3(xy+yz+zx)\le xyz+(x+y+z)^2\le 1+3^2=10$ $\Leftrightarrow 0\le xy+yz+zx\le 3$	0,25 0,25
	Do đó $P=\frac{xyz+(x+y+z)^2}{5(xy+yz+zx)+1}\ge\frac{3(xy+yz+zx)+1}{5(xy+yz+zx)+1}=f(t)$ $t=xy+yz+zx; t\in[0;3]$	0,25
	Ta xét hàm số $f(t)=\frac{3t+1}{5t+1}$; $t\in[0;3] \Rightarrow f'(t)<0$ Suy ra hàm số nghịch biến trên [0;3]. Suy ra $f(t)\ge f(3)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ $\Rightarrow P_{min}=\frac{5}{8}$ khi $x=y=z=1$.	0,25 0,25 0,25

Ghi chú: *Mọi cách giải nếu đúng giám khảo vẫn chấm theo thang điểm tương ứng.*