A. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trang bị những tri thức cơ bản ,cần thiết ,tiên tiến nhất đặc biệt là những tri thức phương pháp và phát triển trí tuệ cho học sinh là các mục tiêu được đặt lên hàng đầu trong các mục tiêu dạy học môn toán.

Bất đẳng thức là một vấn đề được giáo viên và học sinh thâm nhập với một lượng thời gian khá nhiều vì đây là vấn đề có thể phát triển khả năng tư duy toán học cho học sinh.

Thế nhưng qua

việc tìm hiểu vấn đề này trong quá trình dạy học tôi thấy mặc dù đã có rất nhiều phương pháp giải cho những bài toán bất đẳng thức điển hình cụ thể có nhiều dạng. Có những bài toán bất đẳng thức khó khi bồi dưỡng học sinh khá giỏi việc sử dụng những phương pháp đã có gặp nhiều khó khăn, vì thế với hướng suy nghĩ khắc phục những hạn chế về phương pháp giải đã có trước tôi đã tìm kiếm thêm được một phương pháp tiện lợi để giải quyết những bài toán khó và cũng để khơi dậy trí tìm tòi của học sinh và giáo viên trong quá trình tự học, khơi dậy lòng say mê tìm kiếm những cái mới.

Vì những lý do đó.Dưới đây tôi xin được trao đổi với quý đồng nghiệp một phương pháp giải cho những bài toán bất đẳng thức (Thường là những bài bất đẳng thức khó, xảy ra trong các kỳ thi học sinh giỏi, thi Đại học). Và trong một số bài tôi khai thác sâu thêm bằng những hoạt động trí tuệ như tổng quát, phân tích, so sánh, đặc biệt hóa. ..

Nội dung đề tài gồm ba phần :

Phần I: Một biến là ẩn phụ t=h(x,y,z,...)

Phần II: Một biến là x(y hoặc z)

Phần III: Khai thác phương pháp trong lượng giác

B.NỘI DUNG ĐỀ TÀI

<u>*/ Bài toán</u>: Xét bài toán : với điều kiện R (nếu có) . Chứng minh rằng p=f(x,y,z,...) $\geq A$ (hoặc $\leq$A)

<u>phương pháp giải:</u>

⊕ Chứng minh p $\geq g(t)$ với $t \in D$

⊕ Chứng minh $g(t) \geq A$ với $\forall t \in D$

Vấn đề đặt ra là đánh giá biểu thức p để đưa về biểu thức một biến g(t) và chứng minh $g(t) \geq A$

- Việc chứng minh $g(t) \geq A$ ở đây tôi chỉ sử dụng cách biến đổi (dự đoán dấu bằng xảy ra),ngoài ra đối với hoc sinh lớp 12 có thể làm một cách nhanh chóng hơn bằng cách sử dụng đạo hàm lập bảng biến thiên để giải.

- Còn đánh giá p nói chung là phong phú tùy thuộc từng bài toán để lựa chọn cách đánh giá thích hợp (dùng cách biến đổi , sử dụng bất đẳng thức cổ điển bunhiacopki,côsi,....) .

*/ kiến thức bổ sung

1. Bất đẳng thức cơ bản :

a.Bất đẳng thức **côsi**:

cho $x_1, x_2,..., x_n (n \geq 2)$ số không âm khi đó:

$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

b. Bất đẳng thức **bunhiacopxki**:

$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$

c. Bất đẳng thức **svac-xơ**(hệ quả của bất đẳng thức bunhiacopxki) :

với $y_1, y_2,..., y_n (n \geq 2)$ là số dương: $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$

2. Tính chất:

a. Nếu p có giá tri không đổi khi ta hoán vị vòng quanh các biến x,y,z..
chẳng hạn p=f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y) .
khi đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử x=max(x,y,z,...) hoặc x=min(x,y,z,...)

b. Nếu p có giá trị không đổi khi ta hoán vị một cách bất kì các biến x,y,z...
chẳng hạn p=f(x,y,z)=f(x,z,y)=f(y,x,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)=f(z,y,x) .
khi đó không mất tính tổng quát ta có thể sắp xếp các biến theo một thứ tự $x \geq y \geq z \geq ....$

I. MỘT BIẾN LÀ ẨN PHỤ t=h(x,y,z,...).

Sau đây là một số ví dụ mở đầu

• **Bài toán 1**:Với x,y là số dương chứng minh rằng:

$x^3 + y^3 \geq xy^2 + yx^2$ (1)

Giải:

Vì x là số dương nên:

(1) $\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 \geq \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$. đặt $\frac{y}{x}$=t thì t>0

(1) trở thành $t^3 - t^2 - t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+1) \geq 0$ (đúng với mọi t>0)

$\Rightarrow$ **đpcm**

Tổng quát ta có bài toán sau:

Cho x,y là số dương. Cmr: $x^n + y^n \geq xy^{n-1} + x^{n-1}y (n \geq 2, n \in N)$

Chứng minh hoàn hoàn tương tự!

• **Bài toán 2**: Với x,y khác không chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq -2 \qquad (2)$$

Giải:

Đặt t= $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ thì $|t|=\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\geq 2$ (áp dụng bđt **côsi**)

khi đó (2) trở thành:

$(t^2-2)^2-2-(t^2-2)+t+2\geq 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^3-2t^2-t+3)\geq 0 (2')$

+) Với $t\geq 2$: ta có $t^3-2t^2-t+3=(t-2)(t^2-1)+1>0$

nên bất đẳng thức (2') đúng

+) Với $t\leq -2$: ta có $t^3-2t^2-t+3=(t+2)[(t-2)^2+3]-11 > 0$

và $t+2\leq 0$ nên bất đẳng thức (2') đúng

vậy bất đẳng thức (2) đúng dấu bằng xảy ra khi t=-2 hay x=-y

$\Rightarrow$ **đpcm**

• **Bài toán 3**:(Đề chọn đội tuyển dự thi HSG toán QG 2006-2007)

x,y,z là số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$.Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$

-Nhận xét : Dự đoán dấu giá trị LN,NN đạt được khi x=y=z hoặc tại các điểm biên.Thử vào ta có phán đoán $-2\sqrt{2}\leq P\leq 2\sqrt{2}$

Giải: Từ đẳng thức $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ và điều kiện ta có:

$$|p|=|(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)|=\left|(x+y+z)(2-\frac{(x+y+z)^2-2}{2})\right|$$

đặt $t=|x+y+z| \quad \Rightarrow \quad 0<t\leq\sqrt{6}$

$$|p|=t(2-\frac{t^2-2}{2})=-\frac{t^3}{2}+3t=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{2})^2(t+2\sqrt{2})+2\sqrt{2}\leq 2\sqrt{2}$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=\sqrt{2}$

vậy $P_{min}=-2\sqrt{2}$ khi x=$-\sqrt{2}$,y=z=0 hoặc hoán vị

$P_{max}=2\sqrt{2}$ khi x=$\sqrt{2}$,y=z=0 hoặc hoán vị

Sau đây ta xét một số ví dụ mà phải đánh giá biểu thức P mới thấy được ẩn phụ

• **Bài toán 4**: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z\leq\frac{3}{2}\end{cases}$ Cmr: $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{15}{2}$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức **côsi** ta có:

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z+3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\geq x+y+z+\frac{9}{x+y+z}$$

Đặt $t=x+y+z\Rightarrow 0<t\leq\frac{3}{2}$

Vậy: $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge t+\frac{9}{t}=t+\frac{9}{4t}+\frac{27}{4t}\ge 2\sqrt{t.\frac{9}{4t}}+\frac{27}{4.\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=y=z= $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **đpcm**

<u>Tổng quát</u> **ta có bài toán:** Cho $x_1, x_2, ..., x_n (n\ge 2)$ là số dương ;
$x_1+x_2+...+x_n\le k(k\in R^*)$ $b\ge 0; ak^2\le bn^2$.

Cmr : $a(x_1+x_2+...+x_n)+b(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})\ge\frac{bn^2+ak^2}{k}$ (*)

Sơ lược lời giải:

$$a(x_1+x_2+...+x_n)+b(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})\ge a(x_1+x_2+...+x_n)+\frac{bn^2}{x_1+x_2+...+x_n}$$

$$=at+\frac{bn^2}{t}=bn^2(\frac{1}{t}+\frac{t}{k^2})+t(a-\frac{bn^2}{k^2})\ge bn^2.2.\frac{1}{k}+k(a-\frac{bn^2}{k^2})=\frac{bn^2+ak^2}{k}$$

<u>Nhân xét1</u>:

- Từ bài toán **(*)** ta **Đặc biệt hóa**

1.Với a=1; b=4 ; n=3 ; k= $\frac{3}{2}$ ta có bài toán :

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z\le\frac{3}{2}\end{cases}$ Cmr: $x+y+z+4(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge\frac{51}{2}$

kết hợp bất đẳng thức **bunhiacopxki** ta có

bài toán 2':(olimpic-toán sơ cấp -Đại Học Vinh)

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z\le\frac{3}{2}\end{cases}$ C mr: $\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\ge 3.\frac{\sqrt{17}}{2}$

Thật vậy : áp dụng bất đẳng thức ***bunhacopxki*** ta có

$\sqrt{(x^2+\frac{1}{y^2})(1^2+4^2)}\ge x+\frac{4}{y}\Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{17}}(x+\frac{4}{y})$

tương tự sau đó cộng lại kết hợp bài toán trên ta suy ra điều phải chứng minh

Với a=1;b=9;n=3;k=1 kết hợp bất đẳng thức ***bunhiacopxki*** ta có bài toán

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z\le 1\end{cases}$ CMR : $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$

(đề thi đại học ,cao đẳng năm 2003 -2004)

2.với a= -1; b=1 ; n=2 ; k= $\sqrt{2}$ ta có bài toán :

Cho $\begin{cases} x,y>0 \\ x+y\le\sqrt{2}\end{cases}$ Cmr: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-(x+y)\ge\sqrt{2}$

bằng cách thay đổi giả thiết , đặt ẩn phụ ta có ***bài toán 2''*:**

cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ Cmr: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \sqrt{2}$

Thật vậy: bằng cách đặt: a= $\sqrt{1-x}$; b= $\sqrt{1-y}$ và kết hợp bất đẳng thức **bunhacopxki** và bài toán trên ta suy ra điều phải chứng minh

<u>Tổng quát:</u> (**tạp chí CRUX**)

$x_1, x_2, ..., x_n (n \geq 2)$ là số dương và $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$,m>0:

Cmr:: $$\frac{x_1}{\sqrt{m - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{m - x_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{m - x_n}} \geq \sqrt{\frac{mn}{n-1}}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự !

- Nếu đổi chiều của bất đẳng thức ở điều kiện (bài toán (*))thì bài toán thay đổi như thế nào?

Trả lời câu hỏi này ta có bài toán mới : Cho $x_1, x_2, ..., x_n (n \geq 2)$ là số dương; $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq k (k \in R^*)$ $b \geq 0; ak^2 \geq bn^2$.

Cmr : $$a(x_1 + x_2 + ... + x_n) + b(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \geq \frac{bn^2 + ak^2}{k} \quad (**)$$

từ bài toán (**) ta có thể khai thác ta được những bài toán mới khá thú vị ...

*)*Như vậy khi làm một bài toán ta có thể dùng hoạt động trí tuệ để khai thác sâu bài toán_ở trên có một chu kì hoạt động khá hay đó là* :**bài toán cụ thể** $\rightarrow$ **tổng quát** $\rightarrow$ **đặc biệt** $\rightarrow$ **(phân tích , so sánh...)** $\rightarrow$ **bài toán mới** $\rightarrow$ **tổng quát.**

(chú ý tổng quát có nhiều hướng :theo hằng số ,theo số biến hoặc số mũ)

- **<u>Bài toán 5</u>:**(THTT/ T4/352/2007) Với x,y,z là số dương và xyz ≥ 1

Cmr: $$\frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{yz}}} + \frac{y}{\sqrt{y + \sqrt{xz}}} + \frac{z}{\sqrt{z + \sqrt{xy}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

<u>Giải</u>:

Đặt a= $\sqrt{x}$, b= $\sqrt{y}$, c= $\sqrt{z}$

Bài toán trở thành : a,b,clà số dương và abc ≥ 1 cmr

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (4')$$

Áp dụng bất đẳng thức **svac-xơ** ta có:

VT^2(5')

$$\geq \left[\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ac} + \sqrt{c^2 + ab}} \right]^2 = \frac{(a+b+c)^4}{\left[\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ac} + \sqrt{c^2 + ab} \right]^2}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^4}{3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3[(a+b+c)^2 - 3(ab + bc + ca)]} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3[(a+b+c)^2 - 3]}$$

{vì $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3$}

đặt t=$(a+b+c)^2$ thì t ≥ 9 { vì a+b+c $\geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$}

ta có $\frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \ge \frac{3.9+15}{12} + 2\sqrt{\frac{t-3}{12}.\frac{3}{t-3}} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \text{VT}^2\ (5') \ge \frac{9}{2} \Rightarrow \text{VT}(4') \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$

dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1

$\Rightarrow$ **đpcm**

Tổng quát ta có bài toán sau:với $x_1, x_2, ..., x_n (n \ge 2)$ dương và $x_1x_2...x_n \le 1$

Cmr: $$\frac{x_1}{\sqrt{x_1+\sqrt{x_2x_3..x_n}}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2+\sqrt{x_3x_4..x_nx_1}}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{x_n+\sqrt{x_1x_2..x_{n-1}}}} \ge \frac{n}{\sqrt{2}}$$

- **Bài toán 6:** Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ Cmr: $P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \le \frac{9}{10}$

Nhận xét: Ta nghĩ đến áp dụng bđt **svac-xơ** nhưng ở đây chiều của bất đẳng thức lại ngược.Một ý nghĩ nảy sinh là biến đổi P để làm đổi chiều bất đẳng thức ?

Giải : Ta có :

$$P = x(1-\frac{x^2}{1+x^2}) + y(1-\frac{y^2}{1+y^2}) + z(1-\frac{z^2}{1+z^2}) = 1-(\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{y^3}{1+y^2} + \frac{z^3}{1+z^2})$$

$$= 1-(\frac{x^4}{x+x^3} + \frac{y^4}{y+y^3} + \frac{z^4}{z+z^3}) \le 1 - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x+y+z+x^3+y^3+z^3}$$

Đặt $t = x^2+y^2+z^2$ từ đk $\Rightarrow t \ge \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức ***bunhiacopxki*** và ***côsi*** ta có:

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \le$$

$$\le x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2}[1-(x^2+y^2+z^2)] + 3\sqrt{(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^3} = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + t\sqrt{\frac{t}{3}}$$

Vậy

$$P \le 1 - \frac{2t^2}{1+3t+2t\sqrt{\frac{t}{3}}} \le 1 - \frac{2t^2}{3t+1+t^2+\frac{t}{3}} = \frac{-3t^2+10t+3}{3t^2+10t+3} - \frac{9}{10} + \frac{9}{10} = \frac{(\frac{1}{3}-t)(57t+9)}{3t^2+10t+3} + \frac{9}{10} \le \frac{9}{10}$$

dấu bằng xảy khi và chỉ khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ **đpcm**

Khi gặp bài toán có điều kiện phức tạp khó sử dụng thì phải xử lí điều kiện . Ta xét bài toán sau:

- **Bài toán 7:**(Tạp chí toán học tuổi thơ)

Cho $\begin{cases} x, y, z \in (0;1) \\ xyz = (1-x)(1-y)(1-z) (1) \end{cases}$ Cmr: $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{3}{4}$

Giải:

(1) $\Leftrightarrow$ 1-(x+y+z)+xy+yz+zx=2xyz

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4xyz$

Áp dụng BĐT **Côsi** ta có : $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$ nên

$x^2+y^2+z^2 \geq 2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

Đặt t=x+y+z thì $0<t<3$ .Khi đó:

$x^2+y^2+z^2 \geq -\frac{4}{27}t^3+t^2-2t+2=\frac{1}{27}(2t-3)^2(\frac{15}{4}-t)+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

dấu bằng xảy ra khi t=$\frac{3}{2}$ hay x=y=z=$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **đpcm**

<u>Nhân xét 2</u> : Từ ý tưởng phương pháp giải ở trên ta có thể **sáng tạo các bất đẳng thức** :

chẳng hạn **-**Từ bất đẳng thức **cô si**

1.C ho x,y là số dương.Cmr: $(x^2+y^2)^3+8\geq 8x^2y^2+8xy$

2.(THTT-248 - 1998):Cho x,y,z là số dương không lớn hơn 1. Cmr:

a. $\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{1}{3}+\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{3}$

b. $\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{1}{3}+(1-x)(1-y)(1-z)$

Từ đó ta có bài toán **tổng quát** : (chú ý: câu b chặt hơn câu a)

Cho $x_1,x_2,...,x_n (n\geq 2)$ là số dương không lớn hơn α : Cmr:

$$\frac{a^{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}\geq\frac{a^n}{n}+(a-x_1)(a-x_2)...(a-x_n)$$

Hd: áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$(a-x_1)(a-x_2)...(a-x_n)\leq\left(\frac{na-(x_1+x_2+...+x_n)}{n}\right)^n$$

bất đẳng thức trở thành: $\frac{a^{n+1}}{t}\geq\frac{a^n}{n}+\left(\frac{na-t}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{na-t}{n}\left[\frac{n^{n-1}a^n-t(na-t)^{n-1}}{tn^{n-1}}\right]\geq 0(*)$

áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$(n-1)t(na-t)(na-t)...(na-t)\leq\left(\frac{(n-1)na}{n}\right)^n=(n-1)^na^n\Rightarrow t(na-t)^{n-1}<n^{n-1}a^n$$

kết hợp điều kiện bài toán nên bất đẳng thức (*) đúng

ngoài ra từ cách chứng minh ta có bất đẳng thức chặt hơn sau:

Cho $x_1,x_2,...,x_n(n\geq 2)$ là số dương không lớn hơn a .Cmr:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}\geq\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{a^n}{n}+(a-x_1)(a-x_2)...(a-x_n)$$

chứng minh hoàn toàn tương tự !

3.Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2\le 3 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z+27xyz\le 30$

4.Cho $\begin{cases} x,y,z\ge 0 \\ xyz\ge x+y+z+2 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z\ge 6$

- Từ bất đẳng thức **bunhiacôsxki, svac -xơ** và **đẳng thức**

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$

1. Cho x,y,z nằm trong đoạn [1;2] .Cmr : $0\le xy+yz+zx-(x+y+z)\le 6$

2. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz\ge 1 \end{cases}$ Cmr: $x^2+y^2+z^2+\dfrac{1}{xy+yz+zx}\ge\dfrac{10}{3}$

3. Cho $\begin{cases} xyz\le 1 \\ x,y,z>0 \end{cases}$ Cmr: $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{3}{x+y+z}\ge 4$

4. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z\le\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Cmr: $\dfrac{1}{x-x^2}+\dfrac{1}{y-y^2}+\dfrac{1}{z-z^2}\ge\dfrac{108}{5}$

5.(THTT- 346/2006) Cho $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$ Cmr:

$xy+yz+zx\ge 8(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

6. Cho $\begin{cases} xy+yz+zx\ge x+y+z \\ x,y,z\in[1;2] \end{cases}$

Cmr: $\dfrac{x^2}{4+(y-z)^2}+\dfrac{y^2}{4+(z-x)^2}+\dfrac{z^2}{4+(x-y)^2}\ge\dfrac{3}{4}$

- Hay từ bất đẳng thức **schur :**

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\ge 0\Leftrightarrow 4(xy+yz+zx)\le\frac{9xyz}{x+y+z}+(x+y+z)^2$$

1: Cho xyz là số không âm .

Cmr: $2xyz+x^2+y^2+z^2+1\ge 2(xy+yz+zx)$

sơ lược lời giải: Bất đẳng thức của bài toán tương đương với

$(x+y+z)^2+2xyz+1\ge 4(xy+yz+zx)$ *hay* $4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2\le 2xyz+1$

kết hợp bất đẳng thức trên và bất đẳng thức côsi ta cần chứng minh:

$\dfrac{(9-2t)t^2}{27}\le 1$ với $t=x+y+z$, $t<\dfrac{9}{2}$ { còn $t\ge\dfrac{9}{2}$ hiển nhiên đúng}

Bằng cách thêm bớt các biểu thức vào ta có nhiều bài toán khác nhau

Chẳng hạn:

$$a[4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2]-bxyz-ct\le\frac{9axyz}{t}-bxyz-ct;\quad t=x+y+z$$

ta có: Chọn a,b sao cho: $\begin{cases} a,b,c>0 \\ 2a=b+c \end{cases}$ thì:

$a(x^2+y^2+z^2)+bxyz+c(x+y+z)+3a-b-3c \ge 2a(xy+yz+zx)$

với a=3 b=5 c=1 ta có bài toán:

2.Cho x,y,z là số không âm . chứng minh rằng :

$3(x^2+y^2+z^2)+5xyz+(x+y+z)+1\ge 6(xy+yz+zx)$

Bằng cách **tương tự** ta có bài toán:

3.Cho x,y,z là số dương chứng minh rằng

$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z)$ (THTT-số 356)

4.Cho x,y,z là số dương chứng minh rằng

$x^2+y^2+z^2+2xyz+3\ge(1+x)(1+y)(1+z)$

5.Cho $\begin{cases} xy+yz+zx\ge 3 \\ x,y,z\in[0;\frac{4}{3}] \end{cases}$ Cmr: $xyz+4(x+y+z)\ge 13$

Từ đẳng thức ,bất đẳng thức cơ bản,đơn giản ta có thể tạo vô số bài toán!
để kết thúc phần I tôi xin đưa ra thêm một số bài toán làm theo phương pháp này:

--------------Một số bài toán----------

I$_1$.Chứng minh rằng: $-\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}\le\frac{x+y}{1+x^4+y^4}\le\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ với mọi x,y thuộc R

HD: $t=|x+y|$

I$_2$.Cho $\begin{cases} |x+y+z|\ge 3 \\ x,y,z\in(0;2) \end{cases}$ Cmr:

$$\frac{27}{(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)}\le\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{4-y^2}+\frac{1}{4-z^2}$$

HD: t $=(x+y+z)^2$:

I$_3$.Cho $\begin{cases} x,y,z\ge 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ Cmr : $x(y-z)^4+y(z-x)^4+z(x-y)^4\le\frac{1}{12}$

HD: Giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$ đặt $t=x(y+z)$ ta chứng minh được

$x(y-z)^4+y(z-x)^4+z(x-y)^4\le t(1-3t)$

I$_4$. Cho $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz=4 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z\le 3$

I$_5$. Cho $\begin{cases} xy+yz+zx\ge x+y+z \\ x,y,z\in(0;1] \end{cases}$ Cmr:

$$\frac{x^2}{(y+z-x)^2}+\frac{y^2}{(z+x-y)^2}+\frac{z^2}{(x+y-z)^2}\ge 3$$

I$_6$. Cho $x_1,x_2,...,x_n (n\ge 2, n\in N)$ là số dương và $x_1+x_2+...+x_n\le k(n>k>0)$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x_1-x_1^2}+\frac{1}{x_2-x_2^2}+...+\frac{1}{x_n-x_n^2}\ge\frac{n^3}{k(n-k)}$

I$_7$. Với $x_1, x_2, ..., x_n (n \geq 2)$ dương và $x_1 x_2 ... x_n \leq 1$. Cmr:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + \frac{1}{x_1 + x_2 + ... + x_n} \geq \frac{n^2 + 1}{n}$$

• <u>Nhân xét 3:</u>

- Nếu chứng minh g(t) ≥ 0 bằng cách biến đổi như trên thì trước tiên phải dự đoán được dấu bằng xảy ra tại đâu để đánh giá hay tách nhóm hợp lý .

-Khi đặt ẩn phụ thì phải tìm điều kiện sát của ẩn phụ đặc biệt là chứng minh g(t)≥ 0 bằng phương pháp đạo hàm.

II. MỘT BIẾN LÀ x(y hoặc z):

Ở ví dụ trên thì chúng ta phải làm xuất hiện ẩn phụ.sau đây ta xét một lớp bài toán mà ẩn phụ chính là x hoặc y hoặc z

1.Đưa về một biến nhờ điều kiện :

• **<u>Bài toán 8</u>**: Cho $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$ Cmr: $xy + yz + zx - xyz \leq \frac{8}{27}$

<u>Giải:</u>

Từ đk bài toán ta thấy $0 \leq z \leq 1 \Rightarrow 1 - z \geq 0$

áp dụng bđt ***côsi*** ta có:

$$xy+yz+zx-xyz=z(x+y)+xy(1-z) \leq z(x+y)+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-z)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx-xyz=z(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-z)=\frac{-z^3 - z^2 + z + 1}{4}=$$

$-\frac{1}{4}(z - \frac{1}{3})^2 (z + \frac{5}{3}) + \frac{8}{27} \leq \frac{8}{27}$ với mọi z, $0 \leq z \leq 1$

dấu bằng xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3} \Rightarrow$ đpcm

• **<u>Bài toán số 9</u>**: Cho $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$ Cmr: $5 + xyz \geq 2(xy + yz + zx)$ (9)

<u>Giải:</u> Không mất tính tổng quát giả sử z=min(x,y,z)

Từ điều kiện dễ thấy $0 \leq z \leq 1$

$$(9) \Leftrightarrow 5 + xy(z-2) - 2z(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow 5 + (\frac{x+y}{2})^2 (z-2) - 2z(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5 + (\frac{3-z}{2})^2 (z-2) - 2z(3-z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z^3 - 3z + 2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(z-1)^2 (z+2)}{4} \geq 0$$

đúng với $\forall z \in [0;1]$. Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1

$\Rightarrow$ đpcm

• <u>Nhân xét4:</u>

- Nếu lấy điều kiện $0 \leq z \leq 3$ thì bất đẳng thức đánh giá biểu thức trên là không đúng. ở đây chúng ta sử dụng **tính chất** 1 để làm hạn chế điều kiện của biến để có thể đánh giá được biểu thức.

- Ta có bài toán ***Tổng quát*** của bài 9 sau:

bài toán 9' cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\geq 0 \\ a<0; b>0 \\ \frac{a}{b}\leq -\frac{4}{3} \end{cases}$ Cmr: $a(xy+yz+zx)+bxyz-(3a+b)\geq 0$

HD: Không mất tính tổng quát giả sử z=min(x,y,z)

từ điều kiện dễ thấy $0\leq z\leq 1 \Rightarrow a+bz<0; z-\frac{3a}{b}-4\geq 0$ ta có:

$$a(xy+yz+zx)+bxyz-(3a+b)=xy(a+bz)+az(x+y)-(3a+b)\geq \frac{(3-z)^2}{4}(a+bz)+$$

$$+az(3-z)-(3a+b)=\frac{1}{4}b(z-1)^2(z-\frac{3a}{b}-4)\geq 0$$

Chú ý: Nếu $\frac{a}{b}\leq -3$ thì việc chứng minh bài toán tổng quát không cần sử dụng ***tính chất 1***

Thay đổi hình thức bài toán:

- Sử dụng **đẳng thức** $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$ ta có thể đưa bài toán trên về bài toán tương đương nhưng hình thức khác :

chẳng hạn bài 9 có thể phát biểu dưới dạng tương đương :

Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ (THTT-2006) Cmr: $x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4$

hay sử dụng **đẳng thức**

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]$

bài toán 9 có thể được phát biểu dưới dạng :

Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr: $2(x^3+y^3+z^3)+3xyz\geq 9$

- **Đặt ẩn phụ** : a=mx;b=my;c=mz hoặc a=$\frac{1}{x}$;b=$\frac{1}{y}$;c=$\frac{1}{z}$ ..v..v..

chẳng hạn: bài toán 9 có thể phát biểu dưới dạng tương đương

- Cho $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr: $5+27xyz\geq 18(xy+yz+zx)$
- Cho $\begin{cases} xyz=xy+yz+zx \\ x,y,z>0 \end{cases}$ Cmr: $5x^2y^2z^2+27xyz\geq 18(x^2+y^2+z^2)$

-Sử dụng **tính chất bắc cầu** và **bất đẳng thức** đã có:

chẳng hạn bài 9: Từ bất đẳng thức côsi: $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$

ta có **bài toán** $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr: $x^3+y^3+z^3+15\geq 6(xy+yz+zx)$

*)Từ cách chứng minh bài toán tổng quát trên ta có bài toán ***Tương tự***

bài toán9'' Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z \geq 0 \\ a>0; b<0 \\ \dfrac{a}{b} \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ chứng minh rằng:

$$a(xy+yz+zx)+bxyz-(3a+b) \geq 0$$

Chú ý : Để chứng minh : sử dụng ***tính chất 1*** với **z=max(x,y,z)**

Đặc biệt hóa ta có bài toán:

Với a=1; b=-2 : Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$ Cmr: $xy+yz+zx \geq 2xyz+1$

Sau đây ta xét tiếp một số bài toán sử dụng tính chất này để làm hạn chế phạm vi của biến:

• **Bài toán 10**: Cho $\begin{cases} x,y,z \in [0;2] \\ x+y+z=3 \end{cases}$ Cmr: $x^3+y^3+z^3 \leq 9$

Giải:

Không mất tính tổng quát , giả sử z=max(x,y,z)

Từ điều kiện $\Rightarrow 1 \leq z \leq 2$.

Ta có:

$x^3+y^3+z^3 \leq x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3=(x+y)^3+z^3=(3-z)^3+z^3=$

$=9z^3-27z+27=9(z-1)(z-2)+9 \leq 9$ với mọi z, $1 \leq z \leq 2$

dấu bằng xảy ra khi (x,y,z)=(0,1,2) và hoán vị của nó

$\Rightarrow$ đpcm

• **Bài toán 11** : (Đề thi toán quốc gia _bảng B_1996;USAMO_2001)

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx+xyz=4 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z \geq xy+yz+zx \quad (11)$

Giải:

Giả sử z=min(x,y,z) , từ điều kiện ta có :

$4=xy+yz+zx+xyz \geq z^3+3z^2 \Rightarrow (z-1)(z+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0<z\leq 1 \quad (11')$

$xy+yz+zx+xyz=4 \Leftrightarrow (x+y)z=4-xyz-xy \Rightarrow x+y=\dfrac{4-xyz-xy}{z} \quad (11'')$

Mặt khác : $0=xy(1+z)+z(x+y)-4 \geq xy(1+z)+2\sqrt{xy}.z-4$

$\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-\dfrac{2}{z+1})(\sqrt{xy}+2) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \dfrac{2}{z+1} \quad (11''')$

$(11) \Leftrightarrow (x+y)(1-z)+z-xy \geq 0$

Từ (11'),(11''),(11''') ta có :

$$(x+y)(1-z)+z-xy=\frac{4-xyz-xy}{z}(1-z)+z-xy=\frac{4-4z+xy(z^2-z)-xy+z^2}{z}$$

$$\geq\frac{4-4z+\left(\frac{2}{z+1}\right)^2(z^2-z)-\left(\frac{2}{z+1}\right)^2+z^2}{z}=\frac{z(1-z)^2}{(z+1)^2}\geq 0$$

dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1

$\Rightarrow$ đpcm

• **Bài toán 12**: Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr: $2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2z^2\geq 7$

Giải:

Ta có $[(x-1)(y-1)][(y-1)(z-1)][(z-1)(x-1)]=[(x-1)(y-1)(z-1)]^2\geq 0$

Do đó trong ba số $(x-1)(y-1);(y-1)(z-1);(z-1)(x-1)$ có ít nhất một số không âm . Giả sử $(x-1)(y-1)\geq 0 \Leftrightarrow xy\geq x+y-1$

Ta có:

$$2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2z^2\geq (x+y)^2+2z^2+(x+y-1)^2z^2=(3-z)^2+2z^2+(2-z)^2z^2$$

$$=z^4-4z^3+7z^2-6z+9=(z-1)^2(z^2-2z+2)+7\geq 7$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y+z=3 \\ (x-1)(y-1)=0 \\ (z-1)^2(z^2-2z+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

$\Rightarrow$ đpcm

Bằng cách sử dụng tính chất trên ta có thể tạo ra các bài toán mới

chẳng hạn: cho $\begin{cases} xyz=1 \\ x,y,z\in[\frac{1}{2};4] \end{cases}$ Cmr: $xy+yz+zx\leq\frac{17}{4}$

.............Một số bài toán.................

II$_{11}$. Cho $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr:

a. $y+z\geq 16xyz$

b. $xy+yz+zx\geq 9xyz$

c. $9xyz+1\geq 4(xy+yz+zx)$

II$_{12}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\geq 0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$ Cmr: $3(x+y+z)+xyz\geq 10$

II$_{13}$. Cho $x,y\in[0;\frac{\sqrt{2}}{2}]$. Cmr: $\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}$

HD: Giả sử $\frac{\sqrt{2}}{2}\geq x\geq y\geq 0$ ta đi chứng minh: $\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}\leq\frac{2x}{1+x^2}$

II$_{14}$. Cho $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z \ge 0 \end{cases}$ Cmr:

a. $\dfrac{x^2+1}{y^2+1}+\dfrac{y^2+1}{z^2+1}+\dfrac{z^2+1}{x^2+1}\le\dfrac{7}{2}$ (bài T5 - THTT - 10/2004)

b. $\dfrac{x^n+1}{y^n+1}+\dfrac{y^n+1}{z^n+1}+\dfrac{z^n+1}{x^n+1}\le\dfrac{7}{2}$

HD:Giả sử x=max(x,y,z)

$$\frac{x^2+1}{y^2+1}+\frac{y^2+1}{z^2+1}+\frac{z^2+1}{x^2+1}\le 1+\frac{y^2+1}{1}+\frac{z^2+1}{x^2+1}=3+y^2+z^2+\frac{1}{x^2+1}$$

$$\le 3+(y+z)^2+\frac{1}{x^2+1}=x^2-2x+4+\frac{1}{x^2+1}$$

Câu b tương tự!

II$_{15}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\in[0;2] \\ x+y+z=3 \end{cases}$ Cmr : $x^n+y^n+z^n\le 2^n+1$

(Tổng quát bài 8: chứng minh tương tự!)

2. Đưa dần về một biến:

Từ biểu thức p có n biến ta đánh giá đưa về (n-1) biến .... và cuối cùng đưa về 1 biến. sau đây ta xét một số ví dụ đặc trưng thể hiện phương pháp này:

- **Bài toán 13:** Cho x,y,z nằm trong đoạn [1;2]

Chứng minh rằng : $x^3+y^3+z^3\le 5xyz$

Giải:

Đặt $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-5xyz$

Không mất tính tổng quát giả sử : $2\ge x\ge y\ge z\ge 1$

$f(x,y,z)-f(x,y,1)=z^3-5xyz-(1-5xy)=(z-1)(1+z+z^2-5xy)\le 0$

Vì : $z-1\ge 0;1+z+z^2-5xy\le 1+z+z^2-5z^2=1+z-4z^2=-4(z-1)^2-3z+1<0$

Mặt khác : $f(x,y,1)-f(x,1,1)=y^3-5xy-(1-5x)=(y-1)(1+y+y^2-5x)\le 0$

Vì $y-1\ge 0;1+y+y^2-5x\le 1+y+y^2-5y=y^2-4y+1=(y-1)(y-2)-y-1<0$

Vậy $f(x,y,z)\le f(x,1,1)=x^3-5x+2=(x-2)[(x+1)^2-2]\le 0\quad \forall x,1\le x\le 2$

dấu bằng bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (x,y,z)=(2,1,1) và hoán vị của (2,1,1) $\Rightarrow$ đpcm

- **Bài toán14**:(Đây là bài toán số 9) Cho $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $5+xyz\ge 2(xy+yz+zx)$

Giải

Đặt $p(x,y,z)=2(xy+yz+zx)-xyz$

Ta cần chứng minh $f(x,y,z)\le 5$. Do vai trò của x,y,z trong f như nhau nên theo **tính chất 2** ta giả sử $0\le x\le y\le z$ kết hợp điều kiện ta dễ dàng suy ra $0\le x\le 1$

Xét

$$f(x,y,z)-f(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2})=2(xy+yz+zx)-xyz-2(x\frac{y+z}{2}+\frac{(y+z)^2}{4}+x\frac{y+z}{2})+x\frac{(y+z)^2}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)(y-z)^2\le 0\Rightarrow f(x,y,z)\le f(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2})=f(x,\frac{3-x}{2},\frac{3-x}{2})=\frac{-x^3+3x-2}{4}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)\le\frac{-x^3+3x-2}{4}-5+5=5-\frac{(x-1)^2(x+2)}{4}\le 5\qquad\forall x;0\le x\le 1$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(x-2)(y-z)^2=0\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

$\Rightarrow$ đpcm

• **<u>Bài toán15</u>:** (Bất đẳng thức ***côsi***): Cho x,y,z là số dương

Chứng minh rằng: $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$

<u>Giải</u>:

Không mất tính tổng quát giả sử $z\ge y\ge x>0$

Đặt $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Tacó:

$$f(x,y,z)-f(x,y,\sqrt{xy})=z^3-(\sqrt{xy})^3+3xy(\sqrt{xy}-z)=(z-\sqrt{xy})(z^2+z\sqrt{xy}-2xy)\ge 0 \text{ vì } z\ge\sqrt{xy}$$

Mặt khác: Đặt $g(x,y)=f(x,y,\sqrt{xy})=x^3+y^3-2\sqrt{(xy)^3}$

$$g(x,y)-g(x,x)=y^3-x^3-2(\sqrt{(xy)^3}-\sqrt{x^6})=\left(\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}\right)^2\ge 0$$

Vậy $f(x,y,z)\ge f(x,y,\sqrt{xy})=g(x,y)\ge g(x,x)=0$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}z=\sqrt{xy}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$ $\Rightarrow$ đpcm

• **<u>Bài số 16</u>**:(Bất đẳng thức ***nesbit***) Cho x,y,z là số dương .

Chứng minh rằng : $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$

<u>Giải:</u>

Đặt $f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$. Giả sử z=min(x,y,z)

Ta có : $f(x,y,z)-f(x,y,\sqrt{xy})=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{x}{y+\sqrt{xy}}-\frac{y}{\sqrt{xy}+x}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$

$$=\frac{x(\sqrt{xy}-z)}{(y+z)(y+\sqrt{xy})}+\frac{y(\sqrt{xy}-z)}{(z+x)(\sqrt{xy}+x)}+\frac{z-\sqrt{xy}}{x+y}=(\sqrt{xy}-z)\left(\frac{x}{(y+z)(y+\sqrt{xy})}+\right.$$

$$\left.+\frac{y}{(z+x)(\sqrt{xy}+x)}-\frac{1}{x+y}\right)\ge\frac{x}{(y+x)(y+\sqrt{xy})}+\frac{y}{(y+x)(\sqrt{xy}+x)}-\frac{1}{x+y}=$$

$$=\frac{1}{x+y}\left(\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-1\right)=\frac{1}{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}}\ge 0$$

Ta có : $f(x,y,\sqrt{xy})=\frac{x}{\sqrt{xy}+y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+x}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}}+\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{y}{x}}+1}+\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{\frac{y}{x}+1}=$

$$=\frac{1}{t+t^2}+\frac{t^2}{t+1}+\frac{t}{t^2+1}=(t-1)^2\frac{2t^2-t+2}{2t(t^2+1)}+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2} \text{ với } t=\sqrt{\frac{y}{x}}(t>0)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : x=y=z=1

$\Rightarrow$ đpcm

• **Nhận xét :**

- Khi đưa biểu thức 3 biến về 2 biến hay 1 biến thường xét hiệu biểu thức của bất đẳng thức và biểu thức đó với x(hoặc y hoặc z) thay bởi trung bình nhân hoặc trung bình cộng .
- Thường ta phải sử dụng **tính chất 2** mới có đánh giá được

* ....Một số bài toán............*

II$_{21}$. Cho $\begin{cases} xyz=1 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr : $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 4(x+y+z-1)$

II$_{22}$. Cho $\begin{cases} xy+yz+zx+6xyz=9 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z+3xyz\geq 6$

II$_{23}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$ Cmr:

a. $xy+yz+zx\geq 9xyz$

b. $9xyz+1\geq 4(xy+yz+zx)$

II$_{24}$. Cho $x,y\in[0;\frac{\sqrt{2}}{2}]$ chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

II$_{25}$. Cho $x,y,z\in[\frac{1}{3};3]$ chứng minh rằng: $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\geq\frac{7}{5}$ (THTT-số 357)

II$_{26}$. Cho x,y,z là số dương chứng minh rằng:

$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\geq 5(x+y+z)$ (THTT-số 356)

II$_{27}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\geq 0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$ Cmr: $3(x+y+z)+xyz\geq 10$

II$_{28}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$ Cmr: $x+y+z\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

II$_{29}$. Cho $\begin{cases} x,y,z\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$ Cmr: $7(xy+yz+zx)\leq 12+9xyz$

II$_{20}$ Chứng minh rằng **:**

$$\left|\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right|\le\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$ (OLIMPIC 30-4)

HD: Không mất tính tổng quát ta giả sử: $\frac{1}{2}\le z\le y\le x\le 1$

Đặt : z=ax ; y=bx $\Rightarrow \frac{1}{2}\le a\le b\le 1$ sau đó đánh giá tiếp ta đưa về 1biến là b.

III. KHAI THÁC PHƯƠNG PHÁP TRONG LƯỢNG GIÁC:

Ở trên là những bất đẳng thức trong đại số. vậy trong lượng giác liệu có thể đánh giá được không? sau đây ta xét một số ví dụ trong lư ợng giác

- **Bài toán17**:Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

sinA+sinB+ $\sqrt{3}$ sinC $\le\frac{4}{3}\sqrt{6}$ (17)

Giải:

$$(17)\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sqrt{3}\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{3}\sin C\le 2\cos\frac{C}{2}+\sqrt{3}\sin C$$

Đặt $\cos\frac{C}{2}=t\Rightarrow 1\ge t>0$

Ta có: $2\cos\frac{C}{2}+\sqrt{3}\sin C=2\cos\frac{C}{2}(1+\sqrt{3}\sin\frac{C}{2})=2t(1+\sqrt{3(1-t^2)})$

Áp dụng bđt ***côsi*** :

$$2t(1+\sqrt{3(1-t^2)})=2t(1+\frac{3}{2}.2\sqrt{\frac{1}{3}(1-t^2)})\le 2t[1+\frac{3}{2}(\frac{1}{3}+1-t^2)]=-3t^3+6t=$$

$$=-(t-\frac{\sqrt{6}}{3})^2(3t+2\sqrt{6})+\frac{4}{3}\sqrt{6}\le\frac{4}{3}\sqrt{6}\qquad(17')$$

(17') đúng với mọi t>0 ; vì vậy: sinA+sinB+ $\sqrt{3}$ sinC $\le\frac{4}{3}\sqrt{6}$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\cos\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B=\pi-\alpha\\ C=2\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow$ đpcm

- **Bài toán18:** Cho tam giác ABC chứng minh rằng:

(1-cosA)(1-cosB)(1-cosC) $\ge$ cosAcosBcosC (18)

Giải:

+) Nếu tam giác có góc vuông hoặc góc tù thì bđt luôn đúng

+) Nếu tam giác là nhọn ,ta có:

$$(18)\Leftrightarrow\frac{1-\cos A}{\cos A}.\frac{1-(\cos B+\cos C)+\cos B\cos sC}{\cos B\cos C}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\cos A}\left(\frac{1-2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)}+1\right)\ge 1 \qquad (18')$$

$$\Rightarrow VT(18')\ge \frac{1-\cos A}{\cos A}\left(\frac{1-2\sin\frac{A}{2}}{\frac{1}{2}(1-\cos A)}+1\right)=\frac{2-4\sin\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}$$

Ta có: $\frac{2-4\sin\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1-4\sin\frac{A}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(1-2\sin\frac{A}{2})^2}{\cos A}\ge 0\,(18'')$

Vì tam giác nhọn nên (18") luôn đúng.Do đó(18) đúng

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\frac{B-C}{2}=1\\ 1-\sin\frac{A}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow A=B=C$

$\Rightarrow$ đpcm

Trong tam giác ABC ta có **điều kiện là A+B+C=180 $^\circ$**
nên gợi ý cho chúng ta sử dụng **tính chất 1** để làm hạn chế phạm vi biến từ đó có thể đánh giá được biểu thức ,

Sau đây là một số ví dụ:

• **<u>Bài toán 19</u>**: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A) \quad (19)$$

<u>Giải:</u>

Khi hoán vị (A,B,C) thì bđt (19) không thay đổi do đó không mất tính tổng quát

Giả sử A=min(A,B,C. Vì $A+B+C=180^\circ \ge 3A$ nên $0^\circ < A\le 60^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\frac{A}{2}<1$

$$T=3(\cos A+\cos B+\cos C)-2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=$$

$$=3(\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2})-\cos(B-C)+\cos(B+C)-2\sin A.2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=2\cos A+\cos\frac{B-C}{2}[6\sin\frac{A}{2}-4\sin A\cos\frac{A}{2}]-\cos(B-C)$$

Ta có: vì $\sin\frac{A}{2}\ge 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\frac{A}{2}<1 \Rightarrow 6\sin\frac{A}{2}-4\sin A\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}(3-4\cos^2\frac{A}{2})\le 0$

Mặt khác $\cos\frac{B-C}{2}\le 1, \cos(B-C)\le 1$ nên

$$T\ge 2\cos A+6\sin\frac{A}{2}-4\sin A\cos\frac{A}{2}-1=2(1-2\sin^2\frac{A}{2})+6\sin\frac{A}{2}-8\sin\frac{A}{2}(1-\sin^2\frac{A}{2})-1=$$

$$=8t^3-4t^2-2t-+1=(2t-1)^2(2t+1)\ge 0\forall t\ge 0$$

trong đó $t=\sin\frac{A}{2}$.Vì vậy $(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\frac{B-C}{2}=1\\ \cos(B-C)=1\Leftrightarrow A=B=C\\ \sin\frac{A}{2}=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ đpcm

• **<u>Bài toán20</u>**: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C\quad(20)$$

<u>Giải:</u>

Khi hoán vị (A,B,C) thì bđt (20) không thay đổi do đó không mất tính tổng quát . ta giả sử A=max(A,B,C)

Khi đó $A\ge 60^\circ (20')$. Xét

$$T=1+\cos A\cos B\cos C-\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

$$T=1+\frac{1}{2}\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$$

$$=1-\frac{1}{2}[\cos^2 A+\sqrt{3}\sin A\cos A]+\cos(B-C)[\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A]$$

Từ (20') ta có: $\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\cos(A+60^\circ)<0$ và $\cos(B-C)\le 1$ nên

$$T\ge 1-[\frac{1}{2}\cos^2 A+\sqrt{3}\sin A\cos A]+\frac{1}{2}(\cos A-\sqrt{3}\sin A)=(\cos A+1)[1-\cos(A-60^\circ)]\ge 0$$

Vì vậy $1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\cos(B-C)=1\\ \cos(A-60^\circ)=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C$

$\Rightarrow$ đpcm

.... Một số bài toán.................

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

III$_{31}$.Nếu tam giác ABC nhọn:

$$\tan A+\tan B+\tan C+\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\ge 3\sqrt{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

III$_{32}$. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge\frac{15}{2}$

III$_{33}$. $1+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{13}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)+$
$+\cos A\cos B\cos C$

III$_{34}$. $\cos 3A + \cos 3B - \cos 3C \geq -\dfrac{3}{2}$

III$_{35}$. $\sin^2 A + \sin^2 B + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 C \leq 1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

III$_{36}$. $\sin\dfrac{A}{2}\sqrt[3]{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}} \leq \dfrac{3}{16}\sqrt[3]{2}$

III$_{37}$. $\cot A + \cot B + 2\cot C \geq 2$

III$_{38}$. Nếu tam giác ABC không phải là tam giác tù thì

a. $(1+\sin^2)(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C) > 4$

b. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nhận xét 5: Ta có thể chuyển **bất đẳng thức có điều kiện trong đại số** sang **lượng giác** bằng cách:

***) Từ đẳng thức lượng giác cơ bản** :

+) *Từ đẳng thức*:

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \qquad (1)$

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1 \qquad (2)$

kết hợp bài toán : **II**$_{12}$. Cho $\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ xy+yz+zx = 3 \end{cases}$ Cmr: $3(x+y+z) + xyz \geq 10$

chứng minh bài này tương tự **bài toán 11**(hoặc sử dụng đưa dần về một biến)

từ (1) bằng cách đặt : $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}; \quad y = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan B}; \quad z = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan C}$ ta được bài toán tương đương bài toán **II**$_{12}$: cho tam giác ABC nhọn .

Cmr: $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A + 1 \geq \dfrac{10}{3\sqrt{3}}\tan A\tan B\tan C$

tương tự ta có : $9(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}) + \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} \geq 30\sqrt{3}$

+) *Từ đẳng thức*: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$ và

Bài toán 11: Cho $\begin{cases} x,y,z > 0 \\ xy+yz+zx+xyz = 4 \end{cases}$ Cmr:x+y+z≥xy+yz+zx

Đặt x=2cosA ; y=2cosB ; z=2cosC ta có bài toán:

Chứng minh rằng với tam giác nhọn ABC thì:

cosA+cosB+cosC≥2(cosAcosB+cosBcosC+cosCcosA)

đây là bài toán khá đẹp

***) Từ bất đẳng thức lượng giác cơ bản** :

Ta xét ***bài toán 9:***

Dễ thấy từ cách chứng minh có thể thay điều kiện của bài toán như sau

Cho $\begin{cases} x+y+z\le 3 \\ x,y,z\ge 0 \\ a<0;b>0 \\ \dfrac{a}{b}\le -\dfrac{4}{3} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 3 \\ x,y,z\ge 0 \\ a<0;b>0 \\ \dfrac{a}{b}\le -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Cmr: $a(xy+yz+zx)+bxyz-(3a+b)\ge 0$

Đặc biệt hóa ta có bài toán :

1. a=-2;b=1 . $\begin{cases} x+y+z\le 3 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$ Cmr: $5+xyz\ge 2(xy+yz+zx)$

2.a=-4;b=3 . $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 3 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$ Cmr: $9+3xyz\ge 4(xy+yz+zx)$

Kết hợp bất đẳng thức cơ bản trong lượng giác chẳng hạn

1. $\cos A+\cos B+\cos C\le \dfrac{3}{2}$ ta có bài toán:

Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng:

$5+8\cos A\cos sB\cos sC\ge 8(\cos A\cos B+\cos B\cos c+\cos C\cos sA)$

2. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le \dfrac{9}{4}$ ta có bài toán:

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC thì:

$9\sqrt{3}+8\sin A\sin B\sin C\ge 16(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

tương tự đối với tang,cotang và bài toán khác

chú ý: Giải bài toán đại số thông qua giải bài lượng giác người ta gọi l à phương pháp **lượng giác hóa.** Làm ngược lại gọi là phương pháp **đại số hóa.**

C. KẾT LUẬN

Trên đây là một trích dẫn về sự vận dụng phương pháp đưa về một biến trong vấn đề chứng minh bất đẳng thức.

Đề tài này đã được bản thân tôi và các đồng nghiệp cùng đơn vị thí điểm trên các em có học lực từ khá trở lên. Kết quả thu được rất khả quan, các em học tập một cách say mê hứng thú. Một số em đã đạt được những thành tích tốt qua những đợt thi học sinh giỏi vừa qua. Vì tác dụng tích cực trong việc bồi dưỡng học sinh khá giỏi nên kính mong Hội đồng khoa học và quý thầy (cô) góp ý bổ sung để đề tài ngày một hoàn thiện hơn, có ứng dụng rộng hơn trong quá trình dạy học ở trường THPT.

Xin chân thành cảm ơn!

ngày 10 tháng 5 năm 2007

NGƯỜI THỰC HIỆN

Kỳ_Xác

Tài liệu tham khảo

1.Tạp chí toán học và tuổi trẻ

2.Sáng tạo bất đẳng thức _*PHAM KIM HÙNG*

3.Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức _*TRẦN TUẤN ANH*

4.Các bài toán chọn lọc về *hệ thức lượng trong tam giác tứ giác*

PHAN HUY KHẢI_NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG

5.Olimpic 30_4