KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4

Môn thi : **Toán** - Khối : 11

Câu 1 : (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Giải:

Đặt $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$ và $g(t) = t^3 + t$ thì hệ phương trình được viết lại:

$$\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$$

Giả sử $x = \max(x, y, z)$ thì $\begin{cases} x\ge y \\ x\ge z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge g(y) \\ g(x)\ge g(z) \end{cases}$ (do hàm số g đồng biến) $\Rightarrow \begin{cases} g(x)\ge f(x) \\ g(z)\le f(z) \end{cases}$ .... (1,5 đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x\ge 2x^3+3x^2-18 \\ z^3+z\le 2z^3+3z^2-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+5x+9)\le 0 \\ (z-2)(z^2+5z+9)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ z\ge 2 \end{cases}$ .... (1 đ)

Từ đó suy ra: $2\le z\le x\le 2 \Rightarrow x=z=2$. Thế vào hệ phương trình ta được $y=2$ .... (1 đ)

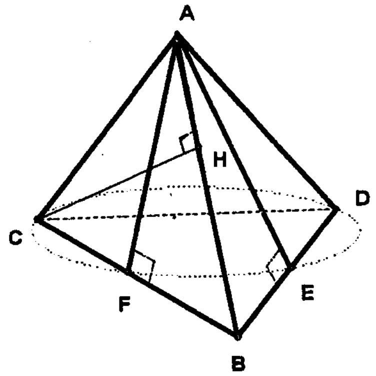
Thử lại ta thấy: $x = y = z = 2$ thoả hệ phương trình. .... (0,5 đ)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 2$.

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn . Gọi E , F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C,D,E,F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Giải :



+ Kẻ đường cao CH của tam giác nhọn ABC (H thuộc đoạn AB và khác A,B).

Ta có $AB \perp CH$ (1), A, C, F, H ở trên đường tròn đường kính AC và BH.BA=BF.BC (2) ....(1 đ)

+ Nếu C,D,E,F ở trên một đường tròn thì BE.BD=BF.BC (3) .

Từ (2) và (3) : BE.BD=BH.BA .Do đó A,H,E,D ở trên đường tròn với đường kính là AD .

Suy ra $AB \perp DH$ (4) . Từ (1) và (4) ta có $AB \perp (CHD)$ .Vì vậy $AB \perp CD$ ....(1,5 đ)

+ Nếu $AB \perp CD$ thì $AB \perp (CHD)$. Suy ra $AB \perp DH$ .Do đó A,H,E,D ở trên đường tròn với đường kính là AD.

Ta có : BE.BD=BH.BA (5).

Từ (5) và (2) : BE.BD=BF.BC.Suy ra C, D, E, F ở trên một đường tròn ....(1,5 đ)

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, và tìm $\lim x_n$.

Giải:

Ta có $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \forall x \geq 0$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi x=0 (phải chứng minh bđt trái)...... (1 đ)

$\sin x \leq x, \forall x \geq 0 \Rightarrow x_n \geq 0, \forall n \in N$ (1) .... (0,5 đ)

$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sin(x_{n-1}) \geq x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3}{6}, \forall n \geq 1 \Rightarrow 6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1}) \leq x_{n-1}^3, \forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \leq x_{n-1}, \forall n \geq 1$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow$ (x_n) có giới hạn hữu hạn .... (1,5 đ)

Gọi $\lim x_n = \alpha$, ta có $\alpha = \sqrt[3]{6\alpha - 6\sin\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 0$ .... (1 đ)

Câu 4. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f(x;y)$ thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \ \ \forall x,y,z\in R \\ f\left(x^2+y-f(0;x);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;y^2-f(0;y)\right) \ \ \forall x,y\in R \end{cases}$$

Giải.

Ta xét điều kiện đầu tiên $f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \ \ \forall x,y,z\in R$

Cho $x=y=z=0\Rightarrow f(0;0)=0$

Cho $y=z=0\Rightarrow f(0;x)+f(x;0)=x^2 \ \forall x\in R$ (1)............(0,5 đ)

Cho $z=0\Rightarrow f(x;y)=x^2+y^2-f(y;0)-f(0;x)=f(x;0)+f(0;y) \ \forall x,y\in R$ (2)............(0,5 đ)

Xét điều kiện thứ hai của giả thiết:

$f\left(x^2+y-f(0;x);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;y^2-f(0;y)\right) \ \ \forall x,y\in R$

Theo (1) ta thu được:

$f\left(y+f(x;0);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;f(y;0)\right)=x+f\left(f(y;0);0\right) \ \forall x,y\in R$............(1 đ)

Đặt $g(x)=f(x;0)$ khi đó ta viết lại điều kiện: $g\left(y+g(x)\right)=x+g\left(g(y)\right) \ \forall x,y\in R$

Khi đó do $g(0)=f(0;0)=0$

Cho $y=0\Rightarrow g\left(g(x)\right)=x \ \forall x\in R$

Cho $x=0\Rightarrow g(y)=g\left(g(y)\right)=y \ \forall y\in R$............(1 đ)

Ta có $f(0;x)=x^2-f(x;0)=x^2-x \ \forall x\in R$

Do đó theo (2) ta có: $f(x;y)=f(x;0)+f(0;y)=x+y^2-y \ \ \forall x;y\in R$............(0,5 đ)

Thử lại hàm số $f(x;y)=x+y^2-y$ thỏa mãn điều kiện bài ra............(0,5 đ)

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m) + f(n)) \mid (m + n)^{2009}$ $\forall m, n \in N^*$
Chứng minh f(1), f(2), f(3), ... là cấp số cộng có công sai dương.

Đáp án:

• Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh (1).
Thật vậy , giả sử f không là đơn ánh

$\Rightarrow \exists\ a, b \in N^*, a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$
Khi đó có

$(f(a) + f(n)) | (a + n)^{2009}\ \forall\ n \in N^*$ và $(f(a) + f(n)) = (f(b) + f(n)) | (b + n)^{2009}\ \forall\ n \in N^*$
$\Rightarrow f(a) + f(n)$ là một ước chung của $(a + n)^{2009}$ và $(b + n)^{2009}$, mà $f(a) + f(n) \geq 2$.
$\Rightarrow ((a + n)^{2009}, (b + n)^{2009}) \neq 1\ \forall\ n \in N^*$
$\Rightarrow (a + n, b + n) \neq 1\ \forall\ n \in N^*$
$\Rightarrow (a + n, b - a) \neq 1\ \forall\ n \in N^*$ (α)
Lấy p là một số nguyên tố lớn hơn b và lấy $n = p - a$ ta có $(a + n, b - a) = (p, b - a) = 1$ mâu thuẫn với (α).

Vậy f đơn ánh. ....(1đ)
• Lấy t tùy ý thuộc N^*, ta xét $f(t + 1) - f(t)$
$\forall\ n \in N^*$ ta có $(f(n) + f(t)) | (n + t)^{2009}$ và $(f(n) + f(t + 1)) | (n + t + 1)^{2009}$
mà $(n + t, n + t + 1) = 1 \Rightarrow ((n + t)^{2009}, (n + t + 1)^{2009}) = 1$
$\Rightarrow (f(n) + f(t), f(n) + f(t + 1)) = 1$
$\Rightarrow (f(n) + f(t), f(t + 1) - f(t)) = 1\ \forall n \in N^*\ (\beta)$ ....(1 đ)
Từ $(\beta) \Rightarrow f(t + 1) - f(t) = \pm 1\ \forall t \in N^*$ (2)
Thật vậy, nếu tồn tại t sao cho $f(t + 1) - f(t) \neq \pm 1$ thì tồn tại số nguyên tố q là ước của $f(t + 1) - f(t)$.

Lấy $k \in N^*$ sao cho $q^k > t$ và lấy $n = q^k - t$ ta có
$(f(n) + f(t)) | (n + t)^{2009} = q^{2009k} \Rightarrow q | (f(n) + f(t))$
mà ta đã có $q | (f(t + 1) - f(t))$

$\Rightarrow$ q là một ước chung của $(f(n) + f(t))$ và $(f(t + 1) - f(t))$: mâu thuẫn với (β)..............................(1 đ)

Vậy ta có (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(t + 1) - f(t) = 1\ \forall t \in N^*$ hoặc $f(t + 1) - f(t) = -1\ \forall t \in N^*$
Mặt khác do $f(n) \in N^*\ \forall n \in N^*$ nên không thể có $f(t + 1) - f(t) = -1\ \forall t \in N^*$
Vậy ta có $f(t+1) - f(t) = 1\ \forall t \in N^*$ tức là dãy f(1), f(2), f(3), f(4),.... là một cấp số cộng công sai 1. (1 đ)