

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$$

2. Rút gọn biểu thức sau:

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
2. Chứng minh rằng:

$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

- 3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

$$2.1 \text{ Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

$$2.2 \text{ Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x + 2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

$$\text{Khi đó: } f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

Ta có: $a(b - c)(b + c - a^2) + c(a - b)(a + b - c^2) - b(a - c)(a + c - b^2) = 0$ (1)

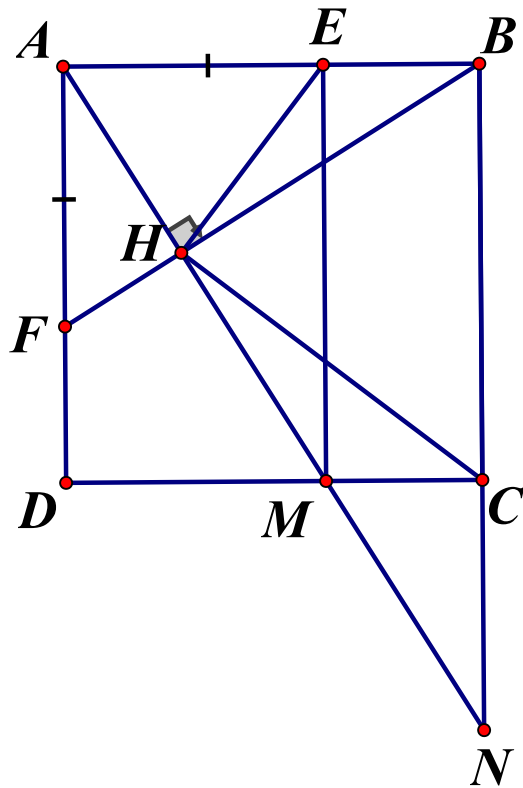
$$\begin{cases} a + b - c = x \\ b + c - a = y \\ a + c - b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x + z}{2} \\ b = \frac{x + y}{2} \\ c = \frac{y + z}{2} \end{cases}$$

Đặt

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x + z}{2} \cdot \left(\frac{x + y}{2} - \frac{y + z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y + z}{2} \cdot \left(\frac{x + z}{2} - \frac{x + y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x + y)(x - y)z^2 \\ &= \frac{x + z}{2} \cdot \frac{x - z}{2} \cdot y^2 + \frac{y + z}{2} \cdot \frac{z - y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (dfcm) \end{aligned}$$

Câu 4.



1) Ta có: $\angle BAM = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$AB = AD$ (gt); $\angle BAF = \angle ADM = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành. Mặt khác $\angle DAE = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}$ ($AB = BC$; $AE = AF$)

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE} \right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE} \right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD

Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF(dfcm)$

3) Do $AD \parallel CN(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = \left(\frac{CN}{MN} \right)^2 + \left(\frac{CM}{MN} \right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (dfcm)$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \quad \text{nên} \quad \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (\text{đpcm})$$