

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không tính thời gian giao đề)

ĐỀ SỐ 8

Nguyễn Hoàng Khanh

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

- Câu 1:** Cho $a + b = 1$. Giá trị của biểu thức $a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 2023$ là
A. 2023. B. 2024. C. 2022. D. 2025.
- Câu 2:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{2024.2027}$ ta được kết quả là
A. $P = \frac{675}{4054}$. B. $P = \frac{2025}{4054}$. C. $P = \frac{2029}{4054}$. D. $P = \frac{2033}{4054}$.
- Câu 3:** Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. B. $a^3 + b^3 + c^3 = 0$.
C. $2023a + 2024b + 2025c \neq 0$. D. $abc = 1$.
- Câu 4:** Phân tích đa thức $P(x) = x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$ thành nhân tử, ta được $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 - cx + d)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính giá trị của tổng $T = a + 2b + 3c + 4d$.
A. $T = 12004$. B. $T = 8102$. C. $T = 8099$. D. $T = -216$.
- Câu 5:** Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2024}{3x^2 - 6x + 2023}$ là $\frac{a}{b}$; với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $a + 3b = 2021$. B. $a + 3b = 2022$. C. $a + 3b = 2023$. D. $a + 3b = 2024$.
- Câu 6:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 - 6x^2 - 4x(y - 1) + 4y^2 + 7$ là
A. -5. B. -10. C. -13. D. -12.
- Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên âm x thỏa mãn $x^5 - x^2(x - 8) = 8$?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 8:** Biết đa thức $P(x) = 18x^3 - 27x^2 + 16x - 2m$ chia hết cho đa thức $Q(x) = 3x - 4$. Tổng giá trị các số nguyên dương nhỏ hơn m là
A. 28. B. 36. C. 45. D. 55.
- Câu 9:** Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + 2b$ và $Q(x) = x^2 - 2x - 3$, với a, b là các số thực. Biết $P(x):Q(x)$. Giá trị $a^2 + b^3$ là
A. 28. B. -26. C. -18. D. -23.
- Câu 10:** Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 64^\circ$. Gọi I là giao điểm hai đường phân giác của hai góc $\angle A, \angle C$. Tìm số đo của góc $\angle AIC$.

- A. $\angle AIC = 122^\circ$. B. $\angle AIC = 121^\circ$. C. $\angle AIC = 124^\circ$. D. $\angle AIC = 128^\circ$.

Câu 11: Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD và đáy nhỏ AB . Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Biết tia phân giác của góc $\angle BCD$ đi qua điểm K . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\angle BKC = 90^\circ$. B. $\angle BKC = 45^\circ$. C. $\angle BKC = 60^\circ$. D. $\angle BKC = 30^\circ$.

Câu 12: Một hộp đựng 12 viên bi khác nhau gồm 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp trên. Xác suất của biến cố: “Chọn ra được 3 viên bi có đủ 3 màu” là

- A. $\frac{3}{11}$. B. $\frac{1}{11}$. C. $\frac{1}{66}$. D. $\frac{2}{15}$.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thành nhân tử.

b) Cho hai số thực phân biệt a và b khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = [(a-1)(b-1)]^{2024}$.

Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

b) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $3x^2y + y^3 = -14$ và $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 5y = 0$.

Câu III. (2 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$.

b) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện $p > q > 3; p - q = 2$. Chứng minh rằng $p^3 + q^3$ chia hết cho 36 .

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2024 . Gọi E là điểm di động trên cạnh BD , (E không trùng với B và D) . Từ E kẻ EH vuông góc với AB tại H và kẻ EK vuông góc với AD tại K .

a) Chứng minh rằng $CK = DH$ và $BK \perp CH$.

b) Gọi I là giao điểm của CE và HK . Chứng minh rằng $CE \perp HK$. Từ đó suy ra ba đường thẳng CE, BK, HD đồng quy.

c) Khi diện tích tứ giác $AHEK$ lớn nhất, hãy tính diện tích của tam giác CHK .

Câu V. (1 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} .$$

..... **HẾT**

Họ tên học sinh:; Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.B	4.B	5.A	6.C	7.B	8.A	9.A	10.A
11.A	12.A								

Câu 1: Cho $a+b=1$. Giá trị của biểu thức $a^3+b^3+3ab(a^2+b^2)+6a^3b^2+6a^2b^3+2023$ là
A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2025.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+3ab(a^2+b^2)+6a^3b^2+6a^2b^3+2023 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 3ab((a+b)^2 - 2ab) + 6a^2b^2(a+b) + 2023 \\ &= 1 - 3ab + 3ab(1 - 2ab) + 6a^2b^2 + 2023 \\ &= 2024 \end{aligned}$$

Đáp án cần chọn là A.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{2024.2027}$ ta được kết quả là
A. $P = \frac{675}{4054}$. **B.** $P = \frac{2025}{4054}$. **C.** $P = \frac{2029}{4054}$. **D.** $P = \frac{2033}{4054}$.

Giải

Ta có: $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$ nên $P = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{2024.2027}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} 3P &= \frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \dots + \frac{3}{2024.2027} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2027} \\ 3P &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2027} = \frac{2025}{4054} \Rightarrow P = \frac{675}{4054} \end{aligned}$$

Hay

Đáp án cần chọn là A.

Câu 3: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
A. $a^2+b^2+c^2 > 0$. **B.** $a^3+b^3+c^3 = 0$.
C. $2023a+2024b+2025c \neq 0$. **D.** $abc = 1$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \\ & \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2ab+2bc+2ca \\ & \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2 \\ & \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=0 \text{ (vì } a+b+c=0) \end{aligned}$$

Suy ra $a=b=c=0$

Đáp án cần chọn là B.

- Câu 4:** Phân tích đa thức $P(x) = x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$ thành nhân tử, ta được $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 - cx + d)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính giá trị của tổng $T = a + 2b + 3c + 4d$.
- A.** $T = 12004$ **B.** $T = 8102$ **C.** $T = 8099$ **D.** $T = -216$

Giải

Ta có: $P(x) = x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$

$$\begin{aligned} &= (x^4 - x) + (2024x^2 + 2024x + 2024) = x(x^3 - 1) + 2024(x^2 + x + 1) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2024(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2024) \end{aligned}$$

Suy ra $a = b = c = 1; d = 2024$

Vậy $T = a + 2b + 3c + 4d = 8102$

Đáp án cần chọn là B.

- Câu 5:** Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2024}{3x^2 - 6x + 2023}$ là $\frac{a}{b}$; với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
- A.** $a + 3b = 2021$ **B.** $a + 3b = 2022$ **C.** $a + 3b = 2023$ **D.** $a + 3b = 2024$

Giải

$$P = \frac{2024}{3x^2 - 6x + 2023} = \frac{2024}{3(x - 1)^2 + 2020}$$

Ta có:

Nhận xét: để P lớn nhất thì $Q(x) = 3(x - 1)^2 + 2020$ nhỏ nhất.

Mà $Q(x) = 3(x - 1)^2 + 2020 \geq 2020$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra $\min Q(x) = 2020 \Rightarrow \max P = \frac{2024}{2020} = \frac{506}{505}$. Hay $a = 506; b = 505$.

Vậy $a + 3b = 2021$.

Đáp án cần chọn là A.

- Câu 6:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 - 6x^2 - 4x(y - 1) + 4y^2 + 7$ là
- A.** -5 **B.** -10 **C.** -13 **D.** -12

Giải

Ta có:

$$A = x^4 - 6x^2 - 4x(y - 1) + 4y^2 + 7 = x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4xy + 4y^2 - 13$$

$$\text{Hay } A = (x^2 - 4)^2 + (x + 2)^2 + (x - 2y)^2 - 13 \geq -13$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -13 .

Đáp án cần chọn là C.

- Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên âm x thỏa mãn $x^5 - x^2(x - 8) = 8$?
- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải

Ta có: $x^5 - x^2(x-8) = 8 \Leftrightarrow x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

Suy ra $x = 1; x = -1; x = -2$.

Hay có 2 số nguyên âm x thỏa mãn yêu cầu.

Đáp án cần chọn là B.

- Câu 8:** Biết đa thức $P(x) = 18x^3 - 27x^2 + 16x - 2m$ chia hết cho đa thức $Q(x) = 3x - 4$. Tổng giá trị các số nguyên dương nhỏ hơn m là
A. 28. **B.** 36. **C.** 45. **D.** 55.

Giải

Để $P(x) = 18x^3 - 27x^2 + 16x - 2m$ chia hết cho đa thức $Q(x) = 3x - 4$ thì

$$P\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow 18\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 27\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16\left(\frac{4}{3}\right) - 2m = 0 \Rightarrow 16 - 2m = 0 \Rightarrow m = 8$$

Các số nguyên dương nhỏ hơn 8 gồm 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Vậy tổng các số nguyên dương nhỏ hơn 8 là $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.

Đáp án cần chọn là A.

- Câu 9:** Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + 2b$ và $Q(x) = x^2 - 2x - 3$, với a, b là các số thực. Biết $P(x):Q(x)$. Giá trị $a^2 + b^3$ là
A. 28. **B.** -26. **C.** -18. **D.** -23.

Giải

Ta có: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + 2b = (x^3 + x - 2)(x^2 - 2x - 3) + (a-1)x + 2b - 6$

Hay $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + 2b = (x^3 + x - 2) \cdot Q(x) + (a-1)x + 2b - 6$

Để $P(x):Q(x)$ thì $\begin{cases} a-1=0 \\ 2b-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

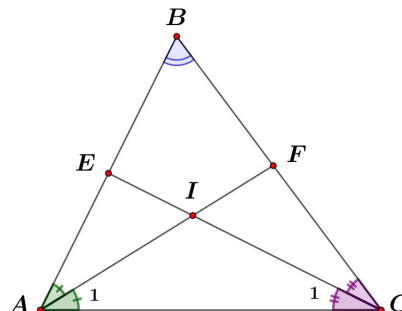
Vậy $a^2 + b^3 = 28$.

Đáp án cần chọn là A.

- Câu 10:** Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 64^\circ$. Gọi I là giao điểm hai đường phân giác của hai góc $\angle A, \angle C$. Tìm số đo của góc $\angle AIC$.
A. $\angle AIC = 122^\circ$. **B.** $\angle AIC = 121^\circ$. **C.** $\angle AIC = 124^\circ$. **D.** $\angle AIC = 128^\circ$.

Giải

Hình vẽ



Xét tam giác ABC , ta có: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

$$\angle A_1 + \angle C_1 = \frac{\angle A + \angle C}{2} = 58^\circ$$

Suy ra

Xét tam giác IAC , ta có:

$$\angle A_1 + \angle AIC + \angle C_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle AIC = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

Đáp án cần chọn là A.

Câu 11: Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD và đáy nhỏ AB . Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Biết tia phân giác của góc $\angle BCD$ đi qua điểm K . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\angle BKC = 90^\circ$.

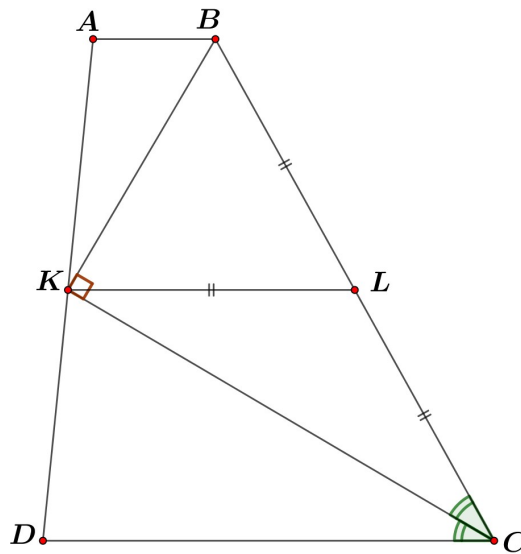
B. $\angle BKC = 45^\circ$.

C. $\angle BKC = 60^\circ$.

D. $\angle BKC = 30^\circ$.

Giải

Hình vẽ



Gọi L là trung điểm của cạnh BC .

Khi đó $AB \parallel KL \parallel CD$, suy ra $\angle KCB = \angle KCD$.

Mà $\angle KCB = \angle KCD$ (vì CK là tia phân giác của góc $\angle BCD$) nên $\angle KCB = \angle KCD = \frac{1}{2} \angle BCD$ và tam giác KLC cân tại L .

Suy ra $LC = LK = LB$ hay tam giác LKB cân tại $L \Rightarrow \angle KLB = \angle LKB$.

Mặt khác $\angle KLB = \angle ABK$ nên $\angle KLB = \angle ABK = \angle LKB = \frac{1}{2} \angle ABC$.

$$\angle BKC = \angle KLB + \angle KCB = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Ta có:

Đáp án cần chọn là A.

Câu 12: Một hộp đựng 12 viên bi khác nhau gồm 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp trên. Xác suất của biến cố: “Chọn ra được 3 viên bi có đủ 3 màu” là

A. $\frac{3}{11}$.

B. $\frac{1}{11}$.

C. $\frac{1}{66}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Giải

+) Số cách chọn 1 viên bi từ 12 viên bi: có 12 cách chọn;
 Số cách chọn 1 viên bi từ 11 viên bi còn lại: có 11 cách chọn;
 Số cách chọn 1 viên bi từ 10 viên bi còn lại: có 11 cách chọn;

Suy ra số cách chọn 3 viên bi từ 12 viên bi là $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3} = 440$ cách.

+) Số cách chọn 1 viên bi xanh từ 3 viên bi xanh: có 3 cách chọn;
 Số cách chọn 1 viên bi xanh từ 3 viên bi xanh: có 3 cách chọn;
 Số cách chọn 1 viên bi đỏ từ 4 viên bi đỏ: có 4 cách chọn;
 Số cách chọn 1 viên bi vàng từ 5 viên bi vàng: có 5 cách chọn;
 Hay số cách chọn 3 viên bi có đủ 3 màu là $3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ cách.

Vậy xác suất của biến cố: “Chọn ra được 3 viên bi có đủ 3 màu” là $\frac{120}{440} = \frac{3}{11}$
 Đáp án cần chọn là A.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I. (2 điểm)		
a) Phân tích đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thành nhân tử. b) Cho hai số thực phân biệt a và b khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = [(a-1)(b-1)]^{2024}$.		
	a) Phân tích đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thành nhân tử. Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ $= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$ $= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz$ $= (x+y+z)((x+y)^2 - (x+y)z + z^2) - 3xy(x+y+z)$ $= (x+y+z)((x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy)$ $= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ $= \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$ $= \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$	
	b) Cho hai số thực phân biệt a và b khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = [(a-1)(b-1)]^{2024}$. Theo câu a), ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$ Mà $(x-y)^2 \geq 0; (y-z)^2 \geq 0; (z-x)^2 \geq 0$, với mọi x, y, z nên suy ra: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ Ta có: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3a^2b^2 = a^3b^3$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + (-ab)^3 - 3a.b.(-ab) = 0$ $\Leftrightarrow a + b - ab = 0 \text{ (vì } a, b, ab \neq 0)$ Khi đó: $T = [(a-1)(b-1)]^{2024} = (ab - a - b + 1)^{2024} = 1^{2024} = 1$.	
Câu II. (3 điểm)		

a) Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2$. b) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $3x^2y + y^3 = -14$ và $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 5y = 0$.		
	a) Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2$. Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ (*) Nhận xét: $x = 0$ không là nghiệm của (*) Xét $x \neq 0$: chia 2 vế của (*) cho x^2, ta được $2x^2 - 7x + 9 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (**)$ Đặt $t = x + \frac{1}{x}, (t \geq 2)$ Suy ra $t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $2(t^2 - 2) - 7t = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Khi đó (**) trở thành Với $t = 4$ thì $x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ Với $t = -\frac{1}{2}$: loại do $t \geq 2$. Vậy đa thức $f(x)$ đã cho có 2 nghiệm là $x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$.	
	b) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $3x^2y + y^3 = -14$ và $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 5y = 0$. Theo đề: $3x^2y + y^3 = -14 \Rightarrow 3x^2y + y^3 + 14 = 0$ Và $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 5y = 0$ Nên ta có: $3x^2y + y^3 + 14 + 3(2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 5y) = 0$ $\Leftrightarrow 3x^2y + 6x^2 + 6xy + 12x + y^3 + 2y^2 + 4y^2 + 8y + 7y + 14 = 0$ $\Leftrightarrow 3x^2(y+2) + 6x(y+2) + y^2(y+2) + 4y(y+2) + 7(y+2) = 0$ $\Leftrightarrow (y+2)(3x^2 + 6x + y^2 + 4y + 7) = 0$ $\Leftrightarrow (y+2)(3x^2 + 6x + 3 + y^2 + 4y + 4) = 0$	

$\Leftrightarrow (y+2)(3(x+1)^2 + (y+2)^2) = 0$ Suy ra $y+2=0$ hoặc $3(x+1)^2 + (y+2)^2 = 0$. - Với $y+2=0 \Rightarrow y=-2$ và thay $y=-2$ vào $3x^2y + y^3 + 14 = 0$, ta được $x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$. - Với $3(x+1)^2 + (y+2)^2 = 0$ ta được $\begin{cases} x+1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$. Vậy các cặp số thỏa yêu cầu là $(1; -2); (-1; -2)$.	
--	--

Câu III. (2 điểm)

- a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$.
- b) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện $p > q > 3; p - q = 2$.
- Chứng minh rằng $p^3 + q^3$ chia hết cho 36.

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$. Ta có: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 16 (*)$ Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - 2y) \in \mathbb{Z}$ và $-4 \leq y \leq 4; -4 \leq x - 2y \leq 4$. Ta xét các trường hợp sau: - Xét $y=0: (*) \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$. - Xét $y=-4: (*) \Leftrightarrow (x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 8$. - Xét $y=4: (*) \Leftrightarrow (x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 8$. Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(4; 0); (-4; 0); (8; 4); (8; -4)$. b) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện $p > q > 3; p - q = 2$. Chứng minh rằng $p^3 + q^3$ chia hết cho 36. Ta có: p, q là hai số nguyên tố và $p > q > 3 \Rightarrow \begin{cases} q = 6k + 1 \\ q = 6k + 5 \end{cases}, (k \in \mathbb{N})$ - Xét $q = 6k + 1$: suy ra $p = q + 2 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ là hợp số nên loại $q = 6k + 1$. - Xét $q = 6k + 5$: suy ra $p = q + 2 = 6k + 7$. Khi đó: $p^3 + q^3 = (6k + 5)^3 + (6k + 7)^3 = 12.36k^3 + 36.36k^2 + 37.36k + 13.36$ nên suy ra $p^3 + q^3$ chia hết cho 36.	
--	--

Câu IV. (6 điểm)

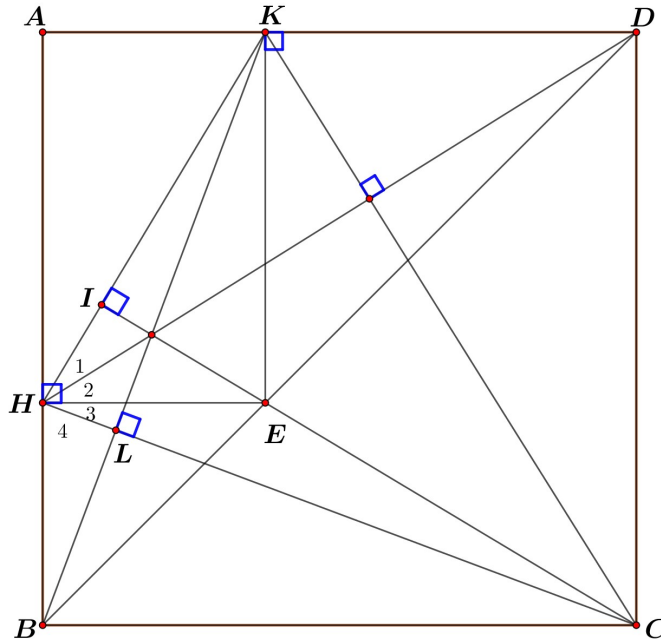
Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2024. Gọi E là điểm di động trên cạnh BD , (E không

trùng với B và D). Từ E kẻ EH vuông góc với AB tại H và kẻ EK vuông góc với AD tại K .

a) Chứng minh rằng $CK = DH$ và $BK \perp CH$.

b) Gọi I là giao điểm của CE và HK . Chứng minh rằng $CE \perp HK$. Từ đó suy ra ba đường thẳng CE , BK , HD đồng quy.

c) Khi diện tích tứ giác $AHEK$ lớn nhất, hãy tính diện tích của tam giác CHK .



a) Chứng minh rằng $CK = DH$ và $BK \perp CH$.

Xét tứ giác $AHEK$ có $\angle A = \angle H = \angle K = 90^\circ \Rightarrow AHEK$ là hình chữ nhật.

Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H và $\angle BHE = 45^\circ$. Suy ra $\triangle BHE$ vuông cân tại $H \Rightarrow HE = BH$.

Ta lại có: $KD = AD - AK$; $AH = AB - HB$. Mà $AD = AB$; $AK = HE = HB$ nên $KD = AH$.

Xét $\triangle CKD$ và $\triangle DHA$, có:

- $AD = CD$ ($ABCD$ là hình vuông).
- $\angle HAD = \angle KDC = 90^\circ$.
- $KD = AH$ (cmt).

Suy ra $\triangle CKD = \triangle DHA$ (c-g-c). Suy ra $CK = DH$.

Đặt: $\angle KHD = \angle H_1$; $\angle DHE = \angle H_2$; $\angle EHC = \angle H_3$; $\angle CHB = \angle H_4$.

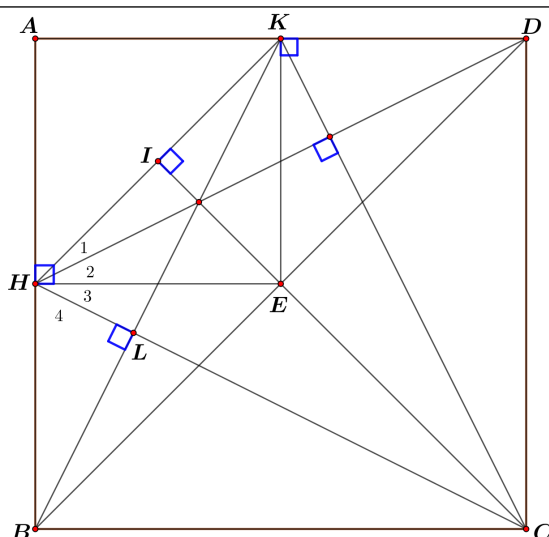
Gọi L là giao điểm của CH và BK

Xét $\triangle BHC$ và $\triangle AKB$, có:

- $AB = CB$ ($ABCD$ là hình vuông)
- $\angle BAK = \angle CBH = 90^\circ$
- $AK = HB$ (cmt)

Suy ra $\triangle BHC = \triangle AKB$ (c-g-c). Suy ra $\angle ABK = \angle HCB$.

	Mà $\widehat{HCB} + \widehat{H}_4 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} + \widehat{H}_4 = 90^\circ \Rightarrow \Delta HBL$ vuông tại L hay $BK \perp CH$.	
	b) Gọi I là giao điểm của CE và HK. Chứng minh rằng $CE \perp HK$. Từ đó suy ra ba đường thẳng CE, BK, HD đồng quy. Ta có: $HK = EA$ ($AHEK$ là hình chữ nhật) và $EA = EC$ (tính chất hình vuông). Suy ra $HK = EC$. Xét ΔBHK và ΔHEC, có: ▪ $BH = HE$ (cmt) ▪ $BK = CH$ ($\Delta BHC = \Delta AKB$) ▪ $HK = EC$ (cmt) Suy ra $\Delta BHK = \Delta HEC$ (c-c-c). Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{HEC}$. Mà $\widehat{BHK} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4$ và $\widehat{HEC} + \widehat{HEI} = 180^\circ$ hay $\widehat{HEC} = 180^\circ - \widehat{HEI}$. Nên $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 = 180^\circ - \widehat{HEI} \Leftrightarrow \widehat{HHE} + 90^\circ = 180^\circ - \widehat{HEI} \Leftrightarrow \widehat{HHE} + \widehat{HEI} = 180^\circ$ Suy ra tam giác IHE vuông tại I hay $CE \perp HK$. Xét ΔHAD và ΔKDC, có: ▪ $AD = CD$ ($ABCD$ là hình vuông) ▪ $\widehat{HAD} = \widehat{KDC} = 90^\circ$ ▪ $AH = KD$ (cmt) Suy ra $\Delta HAD = \Delta KDC$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{DCK}$. Mà $\widehat{DCK} + \widehat{EKD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{EKD} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp DH$. Xét tam giác CHK, có: $CE \perp HK; BK \perp CH; HD \perp CK$ nên CE, BK, HD là ba đường cao của tam giác CHK hay CE, BK, HD đồng quy.	
	c) Khi diện tích tứ giác $AHEK$ lớn nhất, hãy tính diện tích của ΔCHK. Ta có: $AHEK$ là hình chữ nhật nên $S_{AHEK} = AH \cdot AK \leq \left(\frac{AH + AK}{2} \right)^2 \Rightarrow S_{AHEK} \leq \frac{AD^2}{4}$ Mà $AH \cdot AK \leq \left(\frac{AH + AK}{2} \right)^2$ và $AH + AK = AK + KD = AD$ $\Rightarrow S_{AHEK} \leq \frac{AD^2}{4} = 1012^2$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AH = AK = \frac{AD}{2}$ hay E chính là trung điểm của BD. Suy ra diện tích $AHEK$ lớn nhất bằng 1012^2 (đvdt) khi E chính là trung điểm của BD. Suy ra H, K cũng lần lượt là trung điểm của AB, AD.	



Khi đó:

$$S_{\Delta CHK} = S_{ABCD} - S_{\Delta AHK} - S_{\Delta HBC} - S_{\Delta KDC} = AB^2 - \frac{1}{2}AH \cdot AK - \frac{1}{2}BH \cdot BC - \frac{1}{2}KD \cdot DC$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CHK} = 2024^2 - \frac{1}{2} \cdot 1012^2 - \frac{1}{2} \cdot 1012 \cdot 2024 - \frac{1}{2} \cdot 1012 \cdot 2024 = \frac{3}{2} \cdot 1012^2$$

$$S_{\Delta CHK} = \frac{3}{2} \cdot 1012^2 \quad (\text{đvdt}).$$

Câu V. (1 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1}$$

Với $b > 0$, theo BĐT Cô-si, ta có: $2b^3 + 1 = b^3 + b^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{b^3 \cdot b^3 \cdot 1} = 3b^2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $b^3 = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

Tương tự: $2c^3 + 1 \geq 3c^2$; $2a^3 + 1 \geq 3a^2$.

Ta lại có: với $a, b, c > 0$ thì $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$$\text{Hay } (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

Khi đó:

$$\frac{a}{2b^3 + 1} = a - \frac{2ab^3}{b^3 + b^3 + 1} \geq a - \frac{2ab^3}{3b^2} \Rightarrow \frac{a}{2b^3 + 1} \geq a - \frac{2ab}{3}$$

$$\frac{b}{2c^3 + 1} = b - \frac{2bc^3}{c^3 + c^3 + 1} \geq b - \frac{2bc^3}{3c^2} \Rightarrow \frac{b}{2c^3 + 1} \geq b - \frac{2bc}{3}$$

$$\frac{c}{2a^3 + 1} = c - \frac{2ca^3}{a^3 + a^3 + 1} \geq c - \frac{2ca^3}{3a^2} \Rightarrow \frac{c}{2a^3 + 1} \geq c - \frac{2ca}{3}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq a + b + c - \frac{2(ab + bc + ca)}{3} = a + b + c - 2$$

	Suy ra $A \geq 3 - 2 = 1$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1.	
--	---	--

----- Hết -----

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.